Estratégias mistas

Roberto Guena

USP

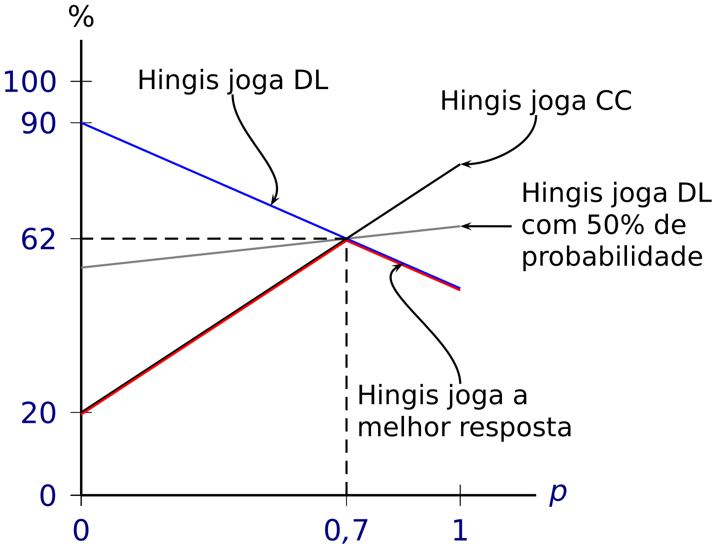
25 de agosto de 2011

Exemplo: Efeito sobre a probabilidade de Seles vencer quando ela mistura suas estratégias

		Hingis	
		DL	CC
	DL	50	80
Seles	CC	90	20
	p-mix	$50p+90(1-p)$	$80p+20(1-p)$

p-mix é a estratégia mista na qual Seles joga DL com probabilidade p e CC com probabilidade $1-p$.

Payoff de Seles em função de p



Melhor resposta de Hingis quando Seles mistura estratégias

Se $p < 0{,}7$ a melhor resposta será CC e Seles vence com probabilidade inferior a 62%.

Se $p > 0{,}7$ a melhor resposta será DL e Seles vence com probabilidade inferior a 62%.

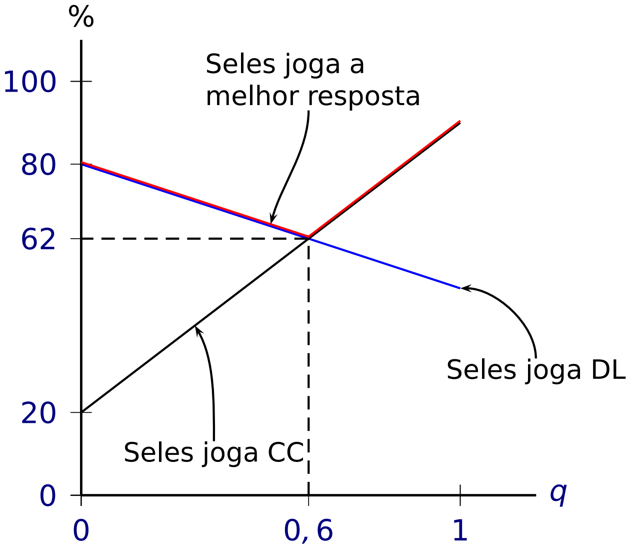
Se $p = 0{,}7$ DL, CC e qualquer estratégia mista são equivalentes para Hings e Seles vence com probabilidade de 62%.

Efeito sobre a probabilidade de Seles vencer quando Hingis mistura as estratégias

		Hingis		
		DL	CC	q-mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$

q-mix é a estratégia mista na qual Hingis joga DL com probabilidade q e CC com probabilidade $1-q$.

Payoff de Seles em função de q



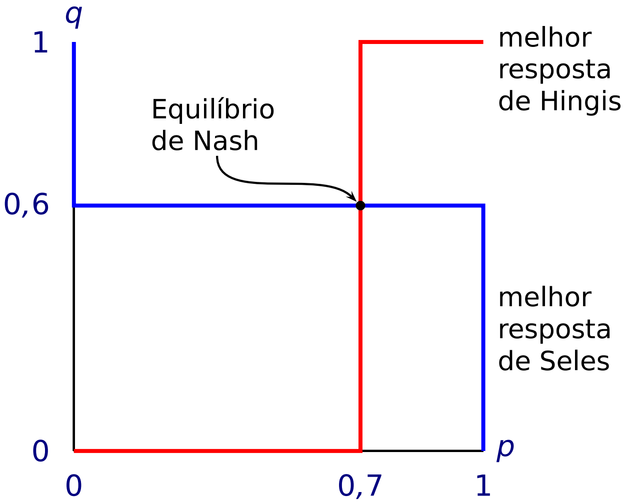
Melhor resposta de Seles quando Hingis mistura estratégias

Se $p < 0{,}6$ a melhor resposta será DL e Seles vence com probabilidade superior a 62%.

Se $p > 0{,}6$ a melhor resposta será CC e Seles vence com probabilidade superior a 62%.

Se $p = 0{,}6$ DL, CC e qualquer estratégia mista são equivalentes para Seles e ela vence com probabilidade de 62%.

Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash

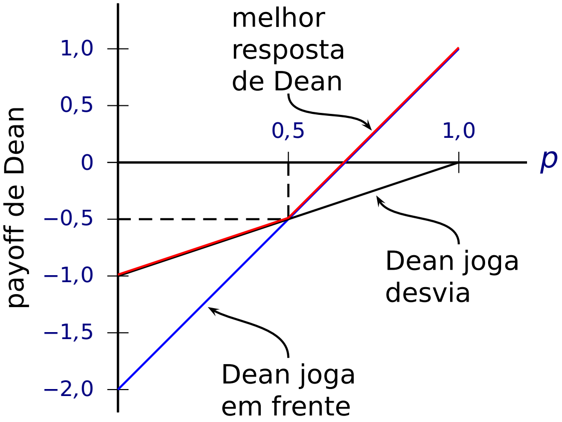


Estratégias mistas em jogos que não são de soma zero: exemplo

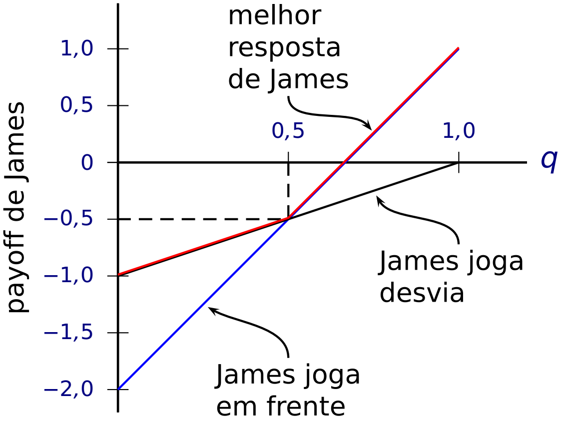
		Dean		
		Desvia	Em frente	q-mix
James	Desvia	$0,\quad 0$	$-1,\quad 1$	$q-1, 1-q$
	Em frente	$1, -1$	$-2, -2$	$3q-2, q-2$
	p-mix	$1-p, p-1$	$p-2, 3p-2$	

$p(q-1)+(1-p)(3q-2), q(p-1)+(1-q)(3p-2)$

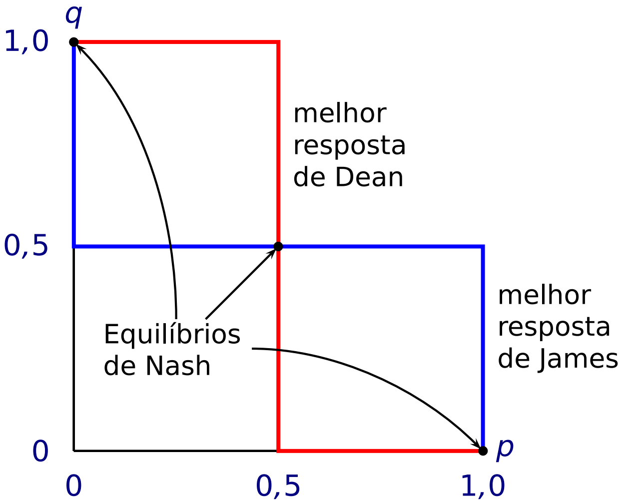
Melhor resposta de Dean



Melhor resposta de James



Curvas de melhor resposta e equilíbrio de Nash



Coordenando escolhas aleatórias

- No equilíbrio de Nash em estratégias mistas, cada jogador desvia com probabilidade de 50% e o payoff esperado é $-0{,}5$.
- Caso os dois deviassem, o payoff de cada um deles seria igual a zero.
- Porém, (desviar, desviar) não é um equilíbrio de Nash.
- O payoff igual a zero pode ser atingido se os dois jogadores concordarem,por exemplo, em jogar uma moeda e que, caso o resultado seja cara, o jogador 1 deve desviar e o jogador 2 deve seguir em frente e, caso o resultado seja coroa, o jogador 1 deve seguir em frente e o jogador 2 desviar.
- Esse é um exemplo do que se chamam equilíbrios correlacionados.

Exercício

Encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas (não degeneradas) para o jogo Chicken supondo a seguinte matriz de payoffs.

		Dean	
		Desvia	Em frente
James	Desvia	$0, \ 0$	$-1, \ 1$
	Em frente	$1, -1$	$-10, -10$

Exercício

Considere o seguinte jogo:

		J_2	
		Esquerda	Direita
J_1	Acima	a, A	b, B
	Abaixo	c, C	d, D

Se p é a probabilidade com que J_1 escolhe "Acima" e q é a probabilidade com que J_2 escolhe "esquerda". Mostre que, caso haja um equilíbrio de Nash em estratégias mistas com $0 < p < 1$ e $0 < q < 1$, então, nesse equilíbrio

$$\frac{p}{1-p} = \frac{D-C}{A-B} \quad \text{e} \quad \frac{q}{1-q} = \frac{d-b}{a-c}$$

Exercício

Encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas não degeneradas para o jogo "guerra dos sexos" descrito abaixo

		Ele	
		Ballet	Futebol
Ela	Ballet	$2, 1$	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2$

Exercício

Seles aprimorou sua paralela e as probabilidades de ela ganhar o ponto passaram a ser as seguintes:

		Hingis	
		DL	CC
Seles	DL	55	90
	CC	90	20

Com que frequência Seles escolherá DL? Essa frequência é maior ou menor do que no nosso exemplo inicial? Explique seu resultado.

Mais de duas estratégias puras: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q-mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	60	$70q+60(1-q)$
	p-mix	$20p_2-20p_1+70$	$20p_1-40p_2+60$	

$$p_1[50q+80(1-q)]+p_2[90q+20(1-q)]+(1-p_1-p_2)[70q+60(1-q)]$$

p_1: probabilidade com que Seles escolhe DL.

p_2: probabilidade com que Seles escolhe CC.

q: probabilidade com que Hingis escolhe DL.

Encontrando a estratégia de minimax de Hingis

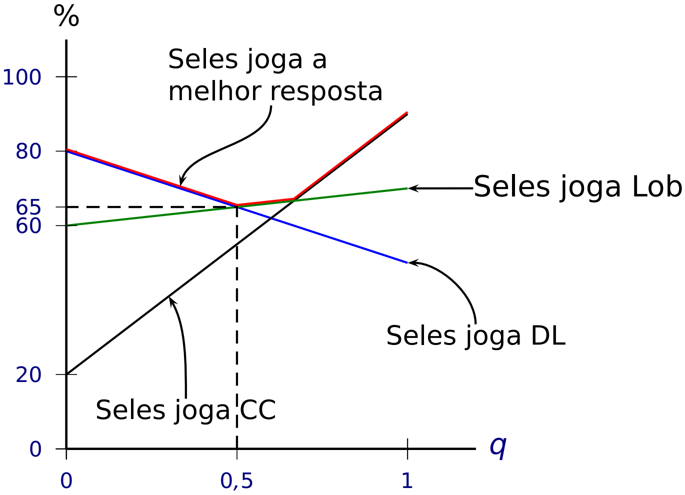
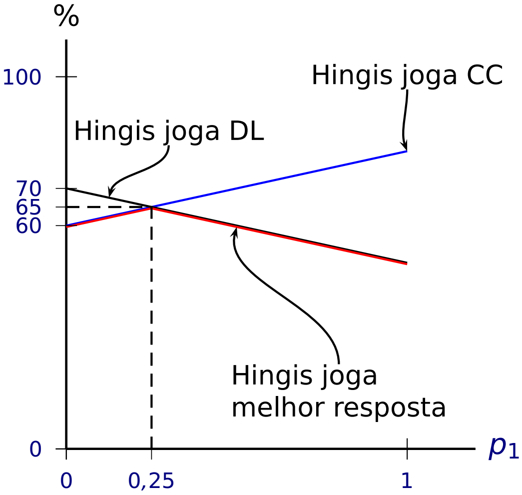


Tabela de payoffs após a eliminação da estratégia CC para Seles

		Hingis		
		DL	CC	q-mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	Lob	70	60	$70q+60(1-q)$
	p-mix	$50p_1+70(1-p_1)$	$80p_1+60(1-p_1)$	

$p_1[50q+80(1-q)]+(1-p_1)[70q+60(1-q)]$

Encontrando a estratégia de maxmin de Seles

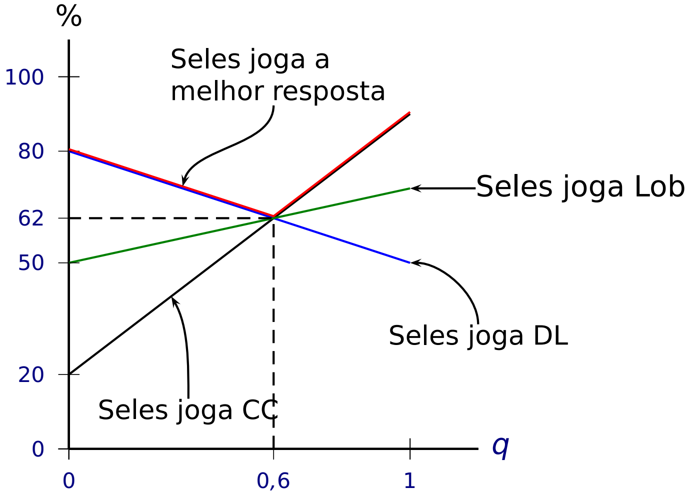


Infinitos equilíbrios: exemplo

		Hingis		
		DL	CC	q-mix
Seles	DL	50	80	$50q+80(1-q)$
	CC	90	20	$90q+20(1-q)$
	Lob	70	50	$70q+50(1-q)$
	p-mix	$20p_2-20p_1+70$	$30p_1-30p_2+50$	

$$p_1[50q+80(1-q)]+p_2[90q+20(1-q)]+(1-p_1-p_2)[70q+50(1-q)]$$

Encontrando a estratégia de minimax de Hingis



Definindo a estratégia de Seles

Para maximizar seu menor payoff, Seles deve escolher p_1 e p_2 de modo a fazer que

$$20p_2 - 20p_1 + 70 = 30p_1 - 30p_2 + 50 \Rightarrow p_2 = p_1 - 0{,}4$$

Além disso, p_1 e p_2 deve satisfazer as condições $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq p_2 \leq 1$ e $0 \leq p_1 + p_2 \leq 1$.

Múltiplos p-mix de equilíbrio de Seles