

Jogos simultâneos

Roberto Guena

USP

19 de agosto de 2011

Representando um jogo com lances simultâneos

Exemplo: Pedra, papel, tesoura

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
	Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
	Tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Jogos de soma zero

Quando em todas as células da representação matricial do jogo a soma dos *payoffs* dos jogadores é constante, diz-se que trata-se de um jogo de soma zero, ou de soma constante.

Representação resumida de um jogo de soma zero.

Exemplo: pedra, papel, tesoura

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	0	-1	1
	Papel	1	0	-1
	Tesoura	-1	1	0

Equilíbrio de Nash

Um equilíbrio de Nash é uma combinação de estratégias tal que, para cada jogador, sua estratégia é a melhor possível dadas as estratégias adotadas pelos outros jogadores.

Estratégias dominantes

Estratégias dominantes

Uma estratégia dominante é uma estratégia que paga o maior payoff entre todas as estratégias de um jogador, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos outros jogadores.

Estratégias fracamente dominantes

Uma estratégia fracamente dominante é uma estratégia que paga um payoff ao menos tão bom quanto qualquer outra estratégia, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos outros jogadores, e que paga um payoff superior ao de cada estratégia alternativa para, ao menos, uma combinação de estratégias adotadas pelos outros jogadores.

Equilíbrio com estratégias dominantes

Caso todos jogadores possuam estratégias dominantes, então a combinação dessas estratégias é um equilíbrio de Nash conhecido como **equilíbrio com estratégias dominantes**.

Exemplo

		Jogador 2	
		Esquerda	Direita
Jogador 1	Acima	4, 4	1, 0
	Abaixo	0, 1	0, 0

- Acima é estratégia dominante para o jogador 1.
- Esquerda é estratégia dominante para o jogador 2.
- (Acima, Esquerda) é um equilíbrio de Nash com estratégias dominantes.

O dilema dos prisioneiros

Dois parceiros de um crime são interrogados simultaneamente por agentes policiais. A cada um dos criminosos é contada a seguinte história: as provas que temos contra vocês nos permitem impor uma pena de 3 anos de prisão a cada um. Todavia, nós sabemos (mas não temos provas) que vocês participaram de um sequestro. Se você confessar a participação nesse crime, nós podemos atenuar sua pena da seguinte maneira. Se você confessar o sequestro e seu companheiro não confessar, sua pena será de apenas um ano e seu companheiro terá pena de 9 anos de cadeia. A recíproca é verdadeira. Se ambos confessarem, todavia, não será possível atenuar tanto a pena e cada um de vocês será condenado a 5 anos de cadeia.

O dilema dos prisioneiros

Representação na forma estratégica

		Prisioneiro 2	
		Confessa	Não confessa
Prisioneiro 1	Confessa	-5, -5	-1, -9
	Não confessa	-9, -1	-3, -3

- Para os dois prisioneiros, confessar é estratégia dominante.
- No equilíbrio com estratégia dominantes ambos confessam.

Quando apenas um jogador possui estratégia dominante

A batalha do Mar de Bismark

		Marinha Japonesa	
		Norte	Sul
USAF	Norte	2	2
	Sul	1	3

- Para a Marinha Japonesa, Norte é fracamente dominante.
- Sabendo disso a força aérea americana deve escolher Norte.

Estratégias dominadas

Dominância estrita

Dizemos que a estratégia B é **estritamente dominada** pela estratégia A caso A gere um *payoff* maior do que B independentemente das estratégias escolhidas pelos outros jogadores.

Dominância fraca

Caso A nunca seja pior do que B e, para ao menos uma combinação de estratégias adotadas pelos outros jogadores, A seja melhor do que B , dizemos que B é fracamente dominada por A .

Eliminação recursiva de estratégias dominadas

Como os jogadores não têm razão para jogar estratégias dominadas, por vezes, o equilíbrio de Nash pode ser encontrado eliminando-se recursivamente as estratégias dominadas.

Exemplo: guerra de preços

		Dom Pepe		
		Alto	Médio	Baixo
Zia Peppa	Alto	60, 60	36, 70	36, 35
	Médio	70, 36	50, 50	30, 35
	Baixo	35, 36	35, 30	25, 25

Estratégias de minimax

Definição

Em um jogo de soma zero, uma **estratégia de minimax** é uma estratégia que torna máximo o pior resultado do jogador, ou, equivalentemente, que torna mínimo o melhor resultado de seu oponente.

Equilíbrio com estratégias minimax

Se, em um jogo de soma zero, os dois jogadores jogam estratégias de minimax, então a combinação dessas estratégias é um equilíbrio de Nash.

Minimax – exemplo

Jogador 2

	c_1	c_2	c_3	
l_1	2	5	13	min= 2
l_2	6	6	10	min= 6
l_3	6	5	1	min= 1
l_4	10	3	-2	min=-1
	max=10	max=6	max=13	

Jogador 2

- A linha com maior mínimo é l_2 .
- A coluna com menor máximo é c_2 .
- O equilíbrio de minmax é (l_2, c_2)

Exemplo: guerra de preços

Método 1: riscar respostas não ótimas

		Dom Pepe		
		Alto	Médio	Baixo
Zia Peppa	Alto	60 , 60	36 , 70	36, 36
	Médio	70, 36	50, 50	30 , 36
	Baixo	36 , 36	36 , 30	26 , 26

Exemplo: guerra de preços

Método 2: marcar melhores respostas.

		Dom Pepe		
		Alto	Médio	Baixo
Zia Peppa	Alto	60, 60	36, 70	36, 35
	Médio	70, 36	50, 50	30, 35
	Baixo	35, 36	35, 30	25, 25

Estratégias puras que são escolha de variáveis contínuas

Exemplo

As pizzarias Don Peppe (DP) e Zia Peppa (ZP) devem escolher os preços de suas pizzas. As duas pizzarias produzem com custo médio constante de R\$ 3 por pizza. As funções de demanda para cada pizzaria são:

$$x_{DP}(p_{DP}, p_{ZP}) = 12 - p_{DP} + 0,5p_{ZP}$$

$$x_{ZP}(p_{DP}, p_{ZP}) = 12 - p_{ZP} + 0,5p_{DP}$$

Quais são as funções de reação para cada pizzaria. Quais são os preços no equilíbrio de Nash? Quais são os preços que maximizam os lucros conjuntos das duas pizzarias?

Quando Zia Peppa dá a melhor resposta a Dom Pepe?

O lucro da Zia Peppa é

$$\pi_{ZP} = (p_{ZP} - 3)x_{ZP} = (p_{ZP} - 3)(12 - p_{ZP} + 0,5p_{DP})$$

A melhor resposta da Zia Peppa ocorre quando ela escolhe o preço que torna esse lucro máximo, quando isso ocorre, temos

$$\frac{\partial \pi_{ZP}}{\partial x_{ZP}} = 0 \Rightarrow 15 - 2p_{ZP} + 0,5p_{DP} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_{ZP} = 7,5 + 0,25p_{DP}}$$

Função de melhor resposta da ZP.

Quando Dom Pepe dá a melhor resposta a Zia Peppa?

O lucro de Dom Pepe é

$$\pi_{DP} = (p_{DP} - 3)x_{DP} = (p_{DP} - 3)(12 - p_{DP} + 0,5p_{ZP})$$

A melhor resposta de Dom Pepe ocorre quando ele escolhe o preço que torna esse lucro máximo, quando isso ocorre, temos

$$\frac{\partial \pi_{ZP}}{\partial x_{ZP}} = 0 \Rightarrow 15 - 2p_{DP} + 0,5p_{ZP} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_{DP} = 7,5 + 0,25p_{ZP}}$$

Função de melhor resposta da DP.

Equilíbrio de Nash

Cada pizzaria deve praticar um preço que é melhor resposta ao preço praticado pela outra:

$$\begin{cases} p_{ZP} = 7,5 + 0,25P_{DP} \\ p_{DP} = 7,5 + 0,25P_{ZP} \end{cases}$$

Resolvendo essas duas equações, obtemos os preços praticados no equilíbrio de Nash:

$$p_{ZP} = p_{DP} = 10$$

Maximização do lucro conjunto

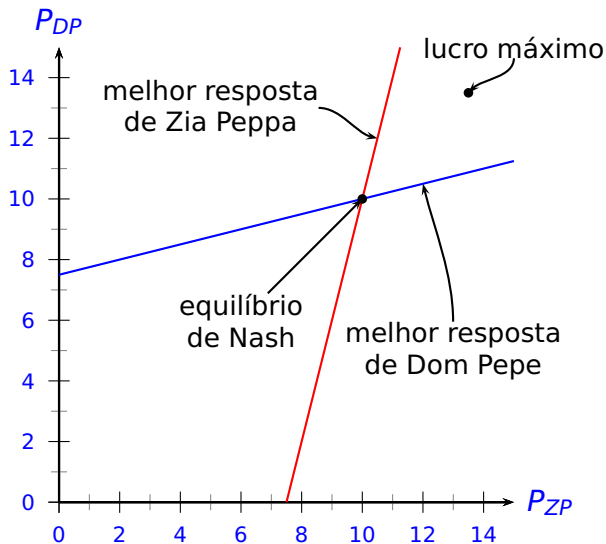
O lucro conjunto das das pizzarias é

$$\begin{aligned}\pi &= \pi_{ZP} + \pi_{DP} \\ &= (p_{ZP} - 3)(12 - p_{ZP} + 0,5p_{DP}) + (p_{DP} - 3)(12 - p_{DP} + 0,5p_{ZP})\end{aligned}$$

As condições de máximo de primeira ordem são

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial p_{ZP}} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial p_{DP}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13,5 - 2p_{ZP} + p_{DP} = 0 \\ 13,5 - 2p_{DP} + p_{ZP} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{ZP} = 13,5 \\ p_{DP} = 13,5 \end{cases}$$

Solução gráfica



Exemplo: o jogo da metade da média

Dois jogadores devem escolher simultaneamente um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 100. Se o número escolhido por um jogador for igual à metade da média entre os dois números escolhidos, esse jogador ganhará um prêmio de R\$5.000,00.

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \quad (1)$$

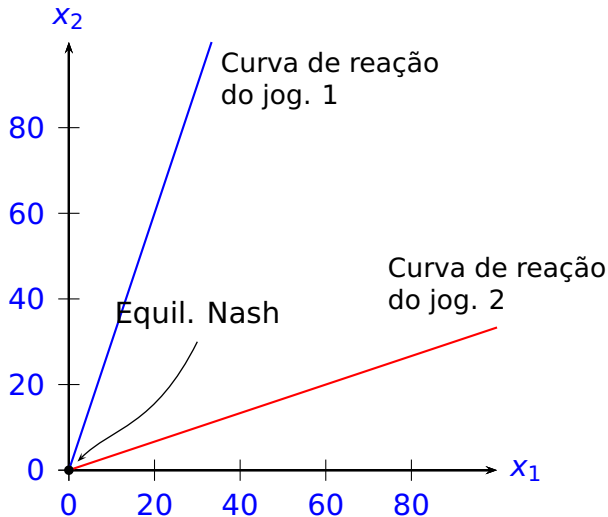
Para que x_2 seja a melhor escolha do jogador 2 dado x_1 é preciso que

$$x_2 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{3}. \quad (2)$$

O equilíbrio de Nash ocorre quando (1) e (2) ocorrem simultaneamente, ou seja quando

$$x_1 = x_2 = 0$$

Solução gráfica



Três ou mais jogadores

Exemplo: o jogo do jardim na rua

Talia

contribui (C)

não contribui (N)

Nina

Nina

C

N

C

N

Emily

C

N

5, 5, 5	3, 6, 3
6, 3, 3	4, 4, 1

Emily

C

N

3, 3, 6	1, 4, 4
4, 1, 4	2, 2, 2

Múltiplos equilíbrios

Exemplo: corrida armamentista

		URSS	
		Controla	Constrói
USA	Controla	4, 4	1, 3
	Constrói	3, 1	2, 2

Exemplo: chicken

		Dean	
		Chicken	Durão
James	Chicken	0, 0	-1, 1
	Durão	1, -1	-2, -2

Exemplo: Batalha dos sexos

		Ele	
		Ballet	Futebol
Ela	Ballet	2, 1	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2

Equilíbrio de Nash e estratégias fracamente dominadas

		B		
		0	1	2
A	0	0, 0	0, 5	0, 0
	1	5, 0	0, 0	-5, 0
	2	0, 0	0, -5	-5, -5

Jogos sem equilíbrios em estratégias puras – exemplo

		Hingis	
		DL	CC
Seles	DL	50	80
	CC	90	20