UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto
Departamento de Economia

REC 2110 – TEORIA MICROECONÔMICA II – EXERCÍCIOS SOBRE TECNOLOGIA

ROBERTO GUENA DE OLIVEIRA

(1) Encontre a taxa técnica de substituição para as seguintes funções de produção:
  (a) $f(x_1,x_2) = x_1^a x_2^b$
  (b) $f(x_1,x_2) = A\left[ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$
  (c) $f(x_1,x_2) = \ln\left[(x_1+x_2)^2+1\right]$
  (d) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + \sqrt{x_2}$
  (e) $f(x_1,x_2) = \ln(1+x_1)+\ln(1+x_2)$.

(2) Determine sob que condições cada uma das funções do exercício anterior apresenta economias crescentes de escala.

(3) É possível que todos os fatores de produção apresentem rendimentos marginais decrescentes e, ainda assim, a função de produção apresente rendimentos crescentes de escala?

(4) (Desafio) Uma função de produção CES é uma função que pode ser expressa pela fórmula

$$f(x_1,x_2) = A\left[ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

na qual $\rho \le 1$, $A > 0$ e $0 \le a \le 1$. Mostre que, quando ρ tende a zero, essa função se aproxima de

$$f(x_1,x_2) = Ax_1^{\gamma\alpha}x_2^{\gamma(1-\alpha)}.$$

(5) (Desafio) Mostre que, se $f(x_1,x_2)$ é (estritamente) côncava e $f(0,0) \ge 0$, então, $f(x_1,x_2)$ apresenta rendimentos (decrescentes) não crescentes de escala.

1. Respostas

(1)
  (a) $|TTS| = \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}$.
  (b) $|TTS| = \frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/(1-\rho)}$.
  (c) $|TTS| = 1$.
  (d) $|TTS| = x_1\sqrt{x_2}$.
  (e) $|TTS| = \frac{x_2}{x_1}$

(2)
  (a) A função apresenta rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala conforme, respectivamente, $a+b>1$, $a+b=1$ ou $a+b<1$.
  (b) A função apresenta rendimentos crescentes, constantes ou decrescentes de escala conforme, respectivamente, $\gamma>1$, $\gamma=1$ ou $\gamma<1$.

(c) Para determinar se essa função apresenta rendimentos crescentes ou decrescentes de escala, lembremos que os rendimentos de escala dependem da soma das razões entre as produtividades marginais e as produtividades médias de todos os fatores de produção. Se esta for maior do que 1, a função de produção apresenta rendimentos crescentes de escala, se ela for igual a um, a função de produção apresenta rendimentos constantes de escala e, se ela for menor do que 1, a função de produção apresenta crescimentos decrescentes de escala. A produtividade marginal dos fatores de produção são:

$$PMg_1 = \frac{2(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2+1} \quad \text{e} \quad PMg_2 = \frac{2(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2+1}.$$

As produtividades médias são:

$$PM_1 = \frac{\ln[(x_1+x_2)^2+1]}{x_1} \quad \text{e} \quad PM_2 = \frac{\ln[(x_1+x_2)^2+1]}{x_2}.$$

Assim, nossa resposta depende do valor da soma

$$\frac{PMg_1}{PM_1} + \frac{PMg_2}{PM_2} = \frac{2(x_1+x_2)^2}{[(x_1+x_2)^2+1]\ln[(x_1+x_2)^2+1]}.$$

Ocorre que, para valores suficientemente pequenos de x_2+x_1, essa soma é maior do que 1 e, para valores, suficientemente elevados de x_1+x_2, essa soma é menor do que 1. Considere, por exemplo, o caso em que $x_1+x_2=\sqrt{e-1}$. Nesse caso, a soma acima se reduz a

$$\frac{2(e-1)}{e} > 1.$$

Considere agora o caso em que $x_1+x_2=e^2$. Nesse caso, a soma das razões entre as produtividades marginais e médias passa a ser

$$1-\frac{1}{e^2} < 1.$$

Assim, caso a soma x_1+x_2 seja suficientemente pequena, a função de produção apresentará localmente rendimentos crescentes de escala e,caso ela seja suficientemente grande, ela apresentará localmente rendimentos decrescentes de escala. Para essa função é um pouco complicado encontrar o valor de x_1+x_2 abaixo do qual essa soma é "suficientemente baixa" e acima do qual ela é "suficientemente elevada". Tal valor é dado pela expressão

$$x_1+x_2 = e^{\Omega(2)}-1$$

em que $\Omega(x)$ é uma função definida por $x=\Omega(x)e^{\Omega(x)}$. O valor numérico aproximado a partir do qual a função de produção em questão passa a apresentar retornos decrescentes de escala é $x_1+x_2 > 1,98029$.[1]

(d) A função de produção $f(x_1,x_2)=x_1^2+\sqrt{x_2}$ apresenta rendimentos crescentes de escala na região em que $x_2 < 4x_1^4$, rendimentos constantes de escala onde $x_2=4x_1^4$ e rendimentos decrescentes de escala nos pontos em que $x_2 > 4x_1^4$.

(e) A função de produção apresenta rendimentos decrescentes de escala. Para ver isso, empregamos o resultado do exercício 5. Como a função $\ln(x+1)$ é estritamente côncava e, como a soma de duas funções estritamente côncavas também é estritamente côncava, a função $f(x_1,x_2)=\ln(1+x_1)+\ln(1+x_2)$ é estritamente côncava. Como $f(0,0)=0$, concluímos que tal função apresenta rendimentos decrescentes de escala.

[1]Essa é uma questão que não é adequada para uma prova.

(a) Sim. Considere, por exemplo, a seguinte função de produção:

$$y = x_1^{3/4} x_2^{3/4}$$

As produtividades marginais dos dois fatores de produção são

$$\text{PMg}_1 = \frac{3x_2^{3/4}}{4\sqrt[4]{x_1}} \quad \text{e} \quad \text{PMg}_2 = \frac{3x_1^{3/4}}{4\sqrt[4]{x_2}}.$$

Claramente, PMg_1 é decrescente em relação a x_1 e PMg_2 é decrescente em relação a x_2. Assim, os dois fatores de produção têm rendimentos marginais decrescentes. Todavia, essa função apresenta rendimentos crescentes de escala, pois trata-se de uma função Cobb-Douglas com a soma dos coeficientes totalizando um valor maior do que 1 ($\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$).

(b) Em termos. É possível que isso ocorra pontualmente. Isso é, é possível que haja uma função de produção tal que, para um determinado emprego dos fatores de produção, um pequeno aumento na mesma proporção de todos os fatores de produção leve a um aumento em menor proporção na função de produção e, para cada fator de produção, um pequeno aumento em seu uso (mantidos os empregos dos outros fatores constantes) leve a um aumento em sua produtividade marginal. Porém, dada a dificuldade em se conceber um exemplo de tal função, não será pedida uma questão como essa em prova.

(3) Resolvido em sala de aula.