# REC 1214 – MICROECONOMIA II – EXERCÍCIOS SOBRE CUSTOS

ROBERTO GUENA DE OLIVEIRA

(1) Encontre a função de custo de curto prazo para as seguintes funções de produção nas quais o fator fixo é $x_2$:
   (a) $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}, \quad 0 < a < 1$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, \quad a, b > 0$
   (c) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$
   (d) $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad a, b > 0$
   (e) $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$
   (f) $f(x_1, x_2) = \ln(ax_1 + bx_2), \quad a, b > 0$
   (g) $f(x_1, x_2) = \min\left\{\sqrt{ax_1}, \sqrt{bx_2}\right\}$
   (h) $f(x_1, x_2) = 10 \ln x_1 + x_2$

(2) Para as mesmas funções de produção do exercício 1 encontre as funções de demanda condicionadas dos fatores de produção e as funções de custo de longo prazo.

(3) Para uma das funções de custo que você derivou acima, determine se há ou não há economias de escala. Caso a resposta seja "depende", determine sob que condições haverá economias de escala.

(4) As seguintes observações foram colhidas de uma empresa que opera escolhendo as quantidades empregadas de seus dois únicos fatores de produção, $x_1$ e $x_2$, que são obtidos aos preços $w_1$ e $w_2$, respectivamente, de modo a minimizar seu custo de produção:

| Observação | $w_1$ | $w_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | $y^*$ |
| B | 4 | 1 | $1/2$ | 2 | $y^*$ |
| C | 1 | 4 | 2 | $1/2$ | $y^*$ |

   Quais das afirmações abaixo são incompatíveis com a hipótese de minimização de custos?
   (a) Quando $w_1 = 5$, $w_2 = 1$ e $y = y^*$, o custo de produção é $c = 5$;
   (b) Quando $w_1 = 2$, $w_2 = 1$ e $y = y^*$, o custo de produção é $c = 5/2$;
   (c) Quando $w_1 = 1/2$, $w_2 = 1$ e $y = y^*$, o custo de produção é $c = 4/5$;
   (d) Quando $w_1 = 2$, $w_2 = 2$ e $y = y^*$, o custo de produção é $c = 3$.

(5) Esboce em um gráfico as curvas de custo marginal, custo médio e custo variável médio de cada uma das funções de custo de curto prazo que você encontrou ao resolver o exercício 1.

(6) Esboce em um gráfico as curvas de custo médio e de custo marginal de longo prazo para as função de custo que você encontrou ao resolver o exercício 2.

## 1. Respostas

(1)

(a) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 y^{\frac{1}{a}} x_2^{\frac{a-1}{a}} + w_2x_2$
(b) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 y^{\frac{1}{a}} x_2^{\frac{b}{a}} + w_2x_2$
(c) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 \left(y - \sqrt{x_2}^2 + w_2x_2\right)$
(d) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 \frac{y}{a} + w_2x_2$
(e) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 \frac{e^y - bx_2}{a} + w_2x_2$Apenas para $y \leq \sqrt{bx_2}$.
(f) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 \frac{y^2}{a} + w_2x_2$
(g) $c(y,w_1,w_2,x_2) = w_1 e^{\frac{y-x_2}{10}} - w_2x_2$

(2)

(a)

$$x_1(y,w_1,w_2) = y\left[\frac{aw_2}{(1-a)w_1}\right]^{1-a}$$
$$x_2(y,w_1,w_2) = y\left[\frac{(1-a)w_1}{aw_2}\right]^{a}$$
$$c(y,w_1,w_2) = y\frac{w_1^a w_2^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}$$

(b)

$$x_1(w_1,w_2,y) = y^{\frac{1}{a+b}}\left[\frac{a}{b}\frac{w_2}{w_1}\right]^{\frac{b}{a+b}}$$
$$x_2(w_1,w_2,y) = y^{\frac{1}{a+b}}\left[\frac{b}{a}\frac{w_1}{w_2}\right]^{\frac{a}{a+b}}$$
$$c(w_1,w_2,y) = w_1x_1(w_1,w_2,y) + w_2x_2(w_1,w_2,y) = y^{\frac{1}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} \frac{a+b}{a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}}$$

(c)

$$x_1(y,w_1,w_2) = \frac{y^2w_2^2}{(w_1+w_2)^2}$$
$$x_2(y,w_1,w_2) = \frac{y^2w_1^2}{(w_1+w_2)^2}$$
$$c(y,w_1,w_2) = \frac{y^2w_1w_2}{w_1+w_2}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{y}{a} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{caso } \frac{w_1}{w_2} < \frac{a}{b} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y}{b} \end{bmatrix} & \text{caso } \frac{w_1}{w_2} > \frac{a}{b} \\ \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : ax_1 + bx_2 = y\right\} & \text{caso } \frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{b} \end{cases}$$
$$c(y,w_1,w_2) = \min\left\{w_1\frac{y}{a}, w_2\frac{y}{b}\right\}.$$

(e)

$$x_1(y,w_1,w_2) = \frac{y}{a}$$
$$x_2(y,w_1,w_2) = \frac{y}{b}$$
$$c(y,w_1,w_2) = y\left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right)$$

(f)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{e^y}{a} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{caso } \frac{w_1}{w_2} < \frac{a}{b} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^y}{b} \end{bmatrix} & \text{caso } \frac{w_1}{w_2} > \frac{a}{b} \\ \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : ax_1 + bx_2 = e^y \right\} & \text{caso } \frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{b} \end{cases}$$
$$c(y,w_1,w_2) = \min\left\{w_1\frac{e^y}{a}, w_2\frac{e^y}{b}\right\}.$$

(g)

$$x_1(y,w_1,w_2) = \frac{y^2}{a}$$
$$x_2(y,w_1,w_2) = \frac{y^2}{b}$$
$$y(y,w_1,w_2) = (\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b})y^2$$

(h)

$$x_1(y,w_1,w_2) = \min\left\{10\frac{w_2}{w_1}, e^{\frac{y}{10}}\right\}$$
$$x_2(y,w_1,w_2) = y - \min\{\ln 10 + \ln w_2 - \ln w_1, y\}$$
$$c(y,w_1,w_2) = w_1 \min\left\{10\frac{w_2}{w_1}, e^{\frac{y}{10}}\right\} + w_2\,(y - \min\{\ln 10 + \ln w_2 - \ln w_1, y\})$$

(3)

(a) O custo médio não depende de $y$ e, portanto, não há nem economia nem deseconomia de escala.
(b) Haverá economia de escala, deseconomia de escala ou os custos médios serão constantes em relação a $y$ caso, respectivamente, $a+b>1$, $a+b<1$ ou $a+b=1$.
(c) Há deseconomias de escala, visto que o custo marginal é sempre superior ao custo médio.
(d) Não há economia ou deseconomia de escala.
(e) Não há economia ou deseconomia de escala.
(f) Há economias de escala para $y<1$ e deseconomias de escala para $y>1$.
(g) Há deseconomias de escala, visto que o custo médio é crescente.
(h) No caso de solução de canto com $x_2 = 0$, há deseconomias de escala. No caso de solução interior há economias de escala.

(4)

(a) A observação não é compatível com a hipótese de minimização de custos, pois, aos preços informados, seria mais barato produzir $y^*$ empregando-se o plano de produção da linha B da tabela.
(b) A observação é compatível com a hipótes de minimização de custos.
(c) A observação é compatível com a hipótes de minimização de custos.
(d) A observação não é compatível com a hipótese de minimização de custos, pois as demandas condicionais dos fatores de produção quando $w_1 = 2$ e $w_2 = 2$ são as mesmas quando $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$, visto que elas dependem apenas dos preços relativos dos fatores. Assim, pela hipótese de minimização de custos, quando os preços dos insumos são $w_1 = 2$ e $w_2 = 2$, a empresa deveria empregar $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ para produzir $y^*$, conforme informa a linha A da tabela. Mas se fosse assim, o custo de produção seria 4 e não 3.