Tecnologia

Roberto Guena de Oliveira

USP

2 de setembro de 2011

Sumário

Sumário

O conjunto de produção

Plano de produção

Um plano de produção é uma combinação de determinadas quantidades de insumos ou fatores de produção com determinadas quantidades de produtos.
Notação: $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$ sendo x_i a quantidade empregada do insumo i, $i = 1, \ldots, n$, e y a quantidade produzida.

Conjunto de produção

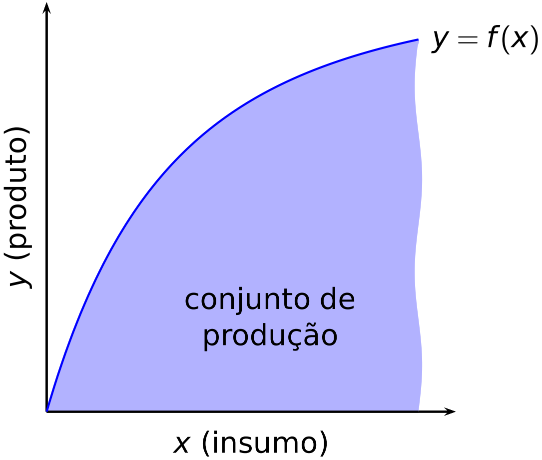
O conjunto de produção é o conjunto de planos de produção tecnologicamente factíveis.

Função de produção

No caso de uma empresa com apenas um produto e n insumos podemos definir uma função $f : \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ que retorna a quantidade máxima de produto que uma empresa pode obter dados o emprego que ela faz dos n fatores de produção:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Representação gráfica: um insumo



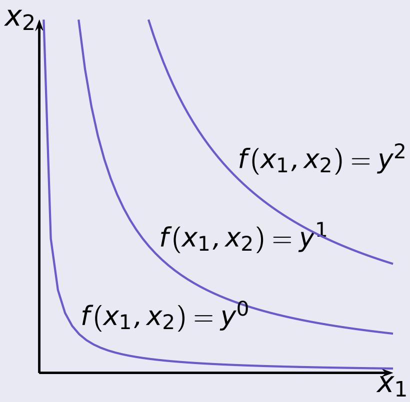
Curvas de isoquanta

definição

Uma curva de isoquanta associada a uma quantidade $y^0 \geq 0$ de produto é o conjunto das combinações entre x_1 e x_2 tais que $f(x_1, x_2) = y^0$, ou seja, o conjunto

$$\left\{(x_1, x_2) \geq 0 : f(x_1, x_2) = y^0\right\}$$

Representação gráfica



Produto médio e produto marginal

Produto médio do fator *i* (PM_i)

$$PM_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i}$$

Produto marginal do fator de produção *i* (PMg_i)

$$PMg_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$$

- $PMg_i \approx$ aumento no produto caso uma unidade adicional do fator *i* seja contratada.
- produtividade média = produto médio = rendimento médio.
- produtividade marginal= produto marginal = rendimento marginal.

Taxa técnica de substituição

Definição:

A taxa técnica de substituição (TTS), também chamada taxa marginal de substituição técnica, entre os bens 1 e 2 é definida por

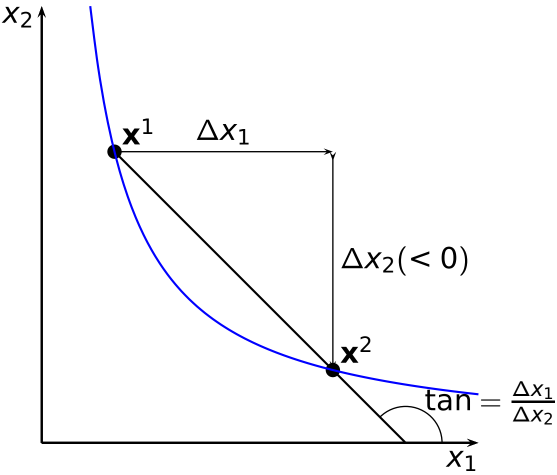
$$TTS(x_1, x_2) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \left. \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right|_{f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)=f(x_1,x_2)}$$
$$= \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{dy=0}$$

TTS e produtividades marginais

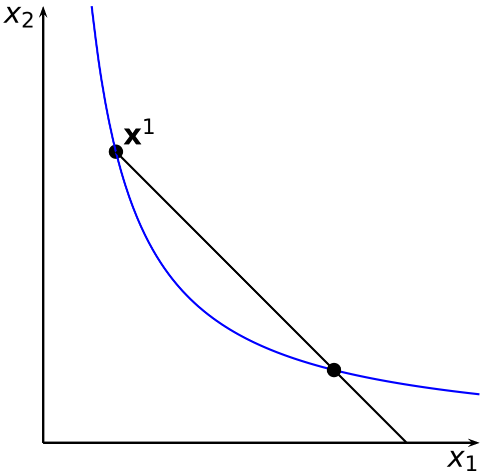
Não é difícil mostrar que

$$TTS = -\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = -\frac{PMg_1}{PMg_2}.$$

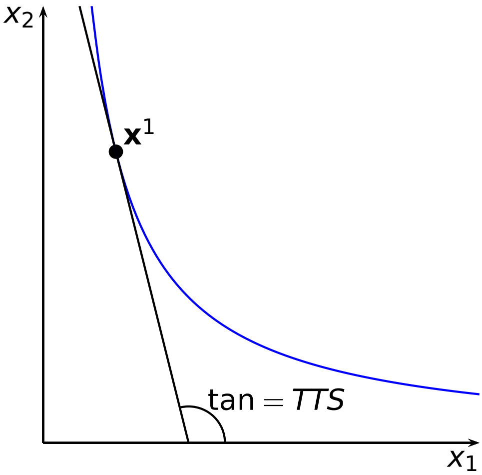
TTS – Interpretação gráfica



TTS – Interpretação gráfica



TMS – Interpretação gráfica



Sumário

Hipótese de free disposal

A função de produção é não decrescente em relação ao emprego dos fatores de produção.

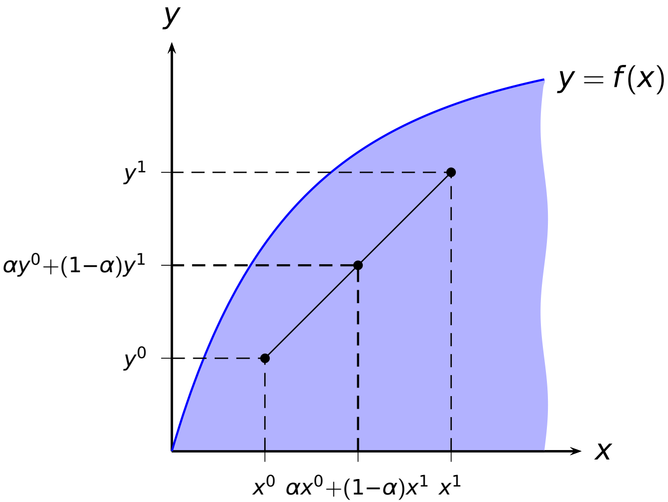
Convexidade

Dizemos que o conjunto de produção é convexo caso, sempre que dois planos de produção quaisquer $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y^0)$ e $(x_1^1, \ldots, x_n^1; y^1)$ pertençam a esse conjunto, então, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, o plano de produção

$$\left(\alpha x_1^0 + (1-\alpha)x_1^1, \ldots, \alpha x_n^0 + (1-\alpha)x_n^1; \alpha y^0 + (1-\alpha)y^1\right)$$

também pertencerá ao conjunto de produção. Em outras palavras, o conjunto de produção é convexo quando sempre que dois planos de produção sejam factíveis, a média desses dois planos também será factível.

Exemplo

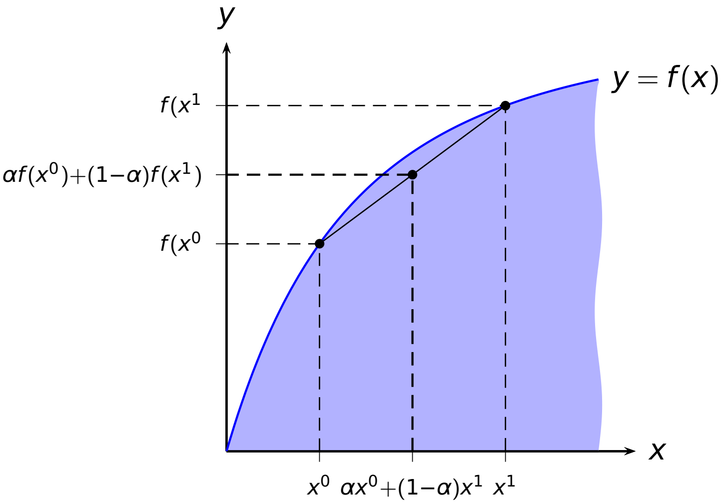


Convexidade e a função de produção

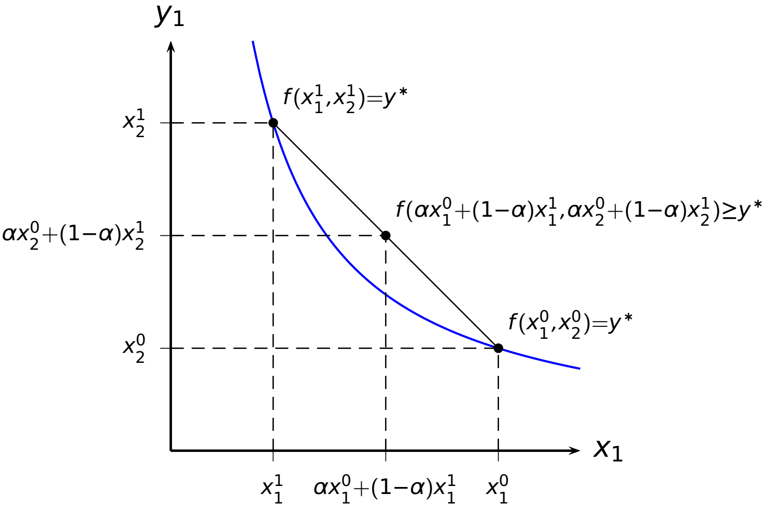
Se o conjunto de produção é convexo, a função de produção será côncava, isto é, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$,

$$f\left(\alpha x_1^0 + (1-\alpha)x_1^1, \dots, \alpha x_n^0 + (1-\alpha)x_n^1\right) \\ \geq \alpha f(x_1^0, \dots, x_n^0) + (1-\alpha) f(x_1^1, \dots, x_n^1)$$

Exemplo



Convexidade e curvas de isoquanta



Produto marginal decrescente

Dizemos que uma função de produção apresenta produtividade marginal decrescente em seus fatores de produção caso o valor do produto marginal de cada fator de produção diminua sempre que a quantidade empregada desse fator de produção aumente e as quantidades empregadas dos outros fatores de produção permaneçam constantes.

Se a função de produção for duas vezes diferenciável, haverá produtividade marginal decrescente da função de produção em relação ao fator x_i, caso

$$\frac{\partial PMg_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i} < 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i^2} < 0$$

Sumário

Longo e Curto Prazos

Longo Prazo

Definimos por longo prazo o horizonte de tempo para o qual a empresa é capaz de ajustar o emprego de todos seus fatores de produção.

Curto Prazo

No curto prazo, a empresa é incapaz de mudar o emprego de alguns fatores de produção. Tais fatores são chamados fatores fixos de produção. Os outros fatores são chamados fatores de produção variáveis. No caso de apenas dois fatores de produção, supondo que o fator fixo é o fator x_2 ($x_2 = \bar{x_2}$), função de produção pode ser expressa por

$$f_c(x_1) = f(x_1, \bar{x_2})$$

Sumário

Rendimentos de escala - definições

1. Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos constantes de escala caso, dado $t > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2), \quad \text{isto é,} \quad \frac{f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)}{(t-1)f(x_1, x_2)} = 1$$

2. Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos crescentes de escala caso, dado $t > 0$

$$\frac{f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)}{(t-1)f(x_1, x_2)} > 1$$

3. Uma função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos decrescentes de escala caso, dado $t > 0$

$$\frac{f(tx_1, tx_2) - f(x_1, x_2)}{(t-1)f(x_1, x_2)} < 1$$

Uma medida local para rendimentos de escala

Note que a função de produção $f(x_1, x_2)$ apresenta rendimentos crescentes, constantes ou descrescentes de escala no ponto $(\hat{x_1}, \hat{x_2})$, caso para $t > 0$ a fração

$$\frac{f(t\hat{x_1}, t\hat{x_2}) - f(\hat{x_1}, \hat{x_2})}{(t-1)f(\hat{x_1}, \hat{x_2})}$$

seja, respectivamente maior, igual ou menor do que zero. Para determinarmos como se comporta localmente $f(x_1, x_2)$ em termos de rendimentos crescentes de escala, devemos calcular o limite dessa fração quando $t \to 1$

Uma medida local para rendimentos de escala (continuação)

Aplicando o teorema de l'Hopital,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 1} \frac{f(t\hat{x_1}, t\hat{x_2}) - f(\hat{x_1}, \hat{x_2})}{(t-1)f(\hat{x_1}, \hat{x_2})} = \\
&\lim_{t\to 1} \frac{\frac{d}{dt}\left[f(t\hat{x_1}, t\hat{x_2}) - f(\hat{x_1}, \hat{x_2})\right]}{\frac{d}{dt}\left[(t-1)f(\hat{x_1}, \hat{x_2})\right]} = \\
&\lim_{t\to 1} \frac{\hat{x_1}\frac{\partial f(t\hat{x_1}, t\hat{x_2})}{\partial x_1} + \hat{x_2}\frac{\partial f(t\hat{x_1}, t\hat{x_2})}{\partial x_2}}{f(\hat{x_1}, \hat{x_2})} = \\
&\frac{PMg_{x_1}}{PMe_{x_1}} + \frac{PMg_{x_2}}{PMe_{x_2}}
\end{aligned}
$$

Sumário

4 exemplos:

1. $f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ (função de produção Cobb-Douglas).
2. $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ (coeficiente fixos)
3. $f(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$ (substitutos perfeitos na produção)
4. $f(x_1, x_2) = A\left[ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$, $0 < a < 1$ e $\gamma, A > 0$, (função de produção CES)