Teoria do Consumidor: Preferências e Utilidade

Roberto Guena de Oliveira

13 de Setembro de 2022

Partes

Preferências racionais

Representação das preferências: curvas de indiferença e função de utilidade

Convexidade

Casos especiais

Parte I

Conceitos básicos

Cestas de bens e o conjunto de consumo

Operações com vetores

Conjunto de Consumo

Consumidores, bens e preferências

De um modo geral os modelos fundamentais de escolha em teoria microeconomica consideram um agente, usualmente denominado consumidora ou consumidor, que deve escolher entre diversos rumos de ação alternativos, respeitando um conjunto de restrições, visando a afetar a disponibilidade para si de bens, isto é itens que afetam seu bem estar.

Flexibilidade do modelo geral

Um consumidor pode ser uma pessoa ou um grupo de pessoas (família, habitantes de um país, etc).

Um bem pode ser entendido como algo muito específico ou algo muito genérico:

- nos modelos mais abstratos de equilíbrio geral, um bem pode ser definido por suas características físicas em conjunto com a localidade, o momento do tempo e sob que condições estará disponível;
- em vários modelos de economia do trabalho, há apenas dois bens — consumo e tempo de lazer.

Na maioria das aplicações

Os números de consumidores e de bens são finitos;

A cada bem é associado um preço de mercado. Os preços de mercado definem razões às quais os bens podem ser trocados entre si. Nesse caso, os bens são denominados mercadorias.

Os consumidores escolhem diretamente as quantidades que desejam de cada mercadoria respeitando restrições exógenas consideradas imutáveis e uma restrição de limitação do valor das mercadorias que consome a um indicador de poder aquisitivo denominado, em alguns modelos de renda e, em outros riqueza.

Cesta de bens

Se L é o número de bens do modelo, cada possível escolha da consumidora pode ser representada por um conjunto ordenado de números tal como

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$$

na qual x_i é a quantidade escolhida do bem i, $i = 1, 2, \ldots, L$. Tal representação e chamada de cesta de bens ou, quando os bens foram escolhidos por um consumidor, cesta de consumo ou ainda, caso todos os bens sejam mercadorias, cesta de mercadorias.

Matematicamente, $(x_1, x_2, \ldots, x_L)$, é chamada de uma L-upla. Após definirmos duas operações para essa L-upla, ela receberá a designação de vetor.

Exemplos

Em um modelo com apenas dois bens, a cesta

$$\mathbf{x} = (2, 5)$$

é uma cesta com duas unidades do bem 1 e cinco unidades do bem 2.

Em um modelo com cinco bens, a cesta

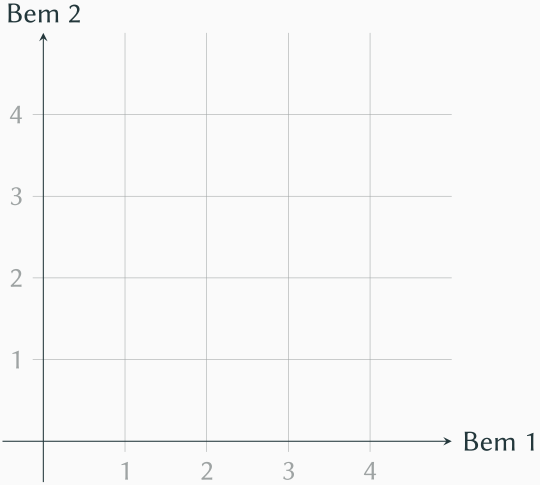
$$\mathbf{x} = (0, 3, 4, 0, 0)$$

contém 3 unidades do bem 2, 4 unidades do bem 3 e zero unidades dos outros bens.

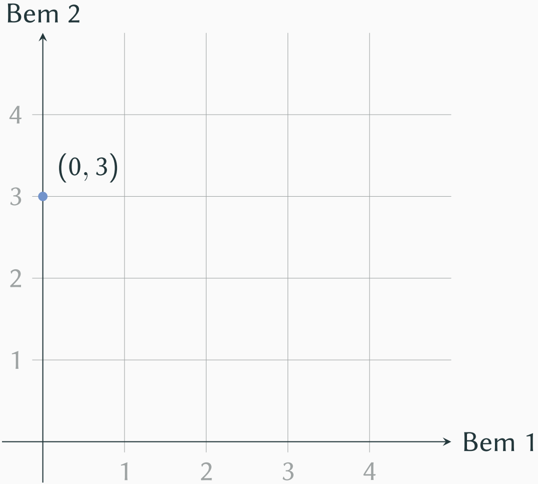
Representação gráfica

Nos modelos com apenas dois bens, uma cesta de bens sempre pode ser pensada como o ponto no plano cartesiano com abcissa (coordenada horizontal) igual à quantidade do bem 1 e ordenada (coordenada vertical) igual à quantidade do bem 2.

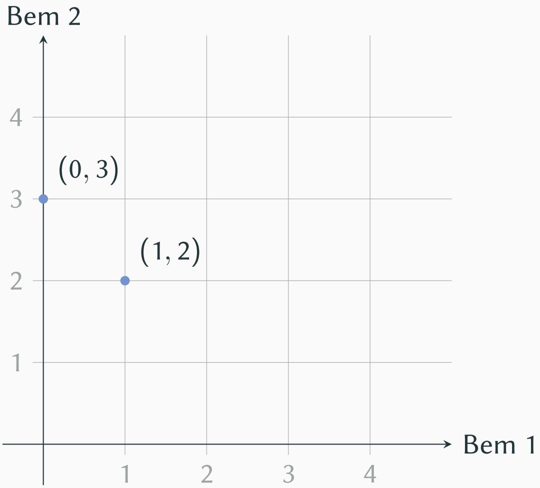
Exemplos



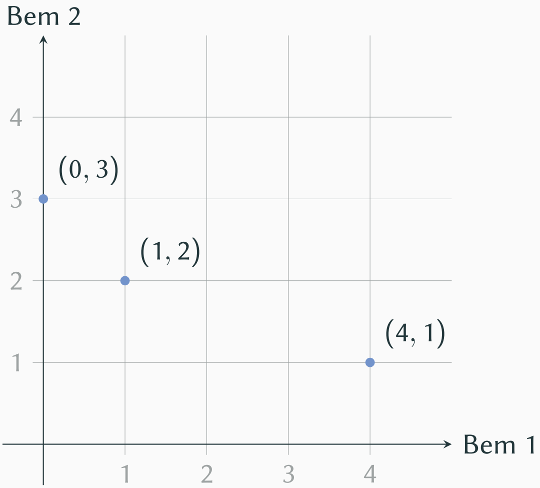
Exemplos



Exemplos



Exemplos



O conjunto de consumo

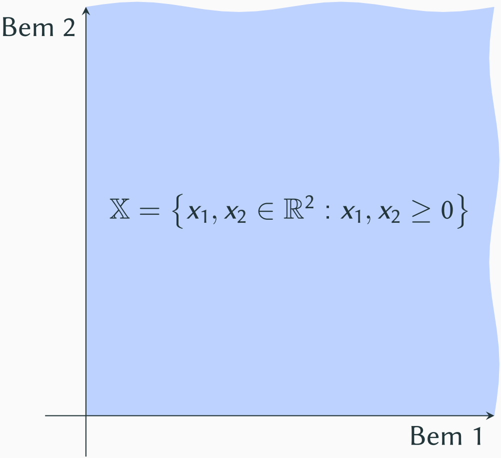
A maioria dos modelos assumem que há algumas restrição ao consumo que são imutáveis.

Tais restrições definem o conjunto de cestas que as atendem. Tal conjunto é chamado o *conjunto de consumo* e será representado por $\mathbb{X}$.

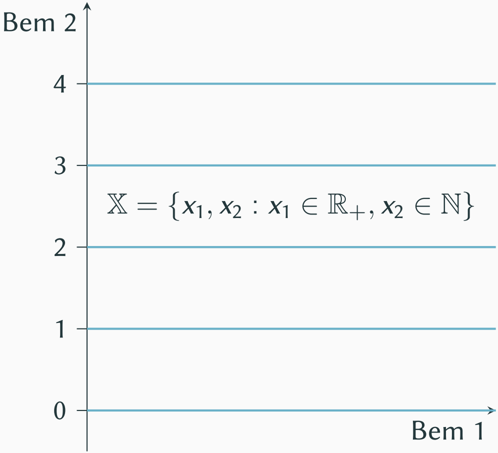
Por exemplo, é comum supor que não haja consumo negativo de qualquer bem, mas que o consumo de qualquer quantidade representada por um número real positivo seja possível. Nesse caso, o conjunto de consumo será dado pelo conjunto de todas as cestas com quantidades reais não negativas de todos os bens, isto é

$$\mathbb{X} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L : \mathbf{x} \geq 0\right\}$$

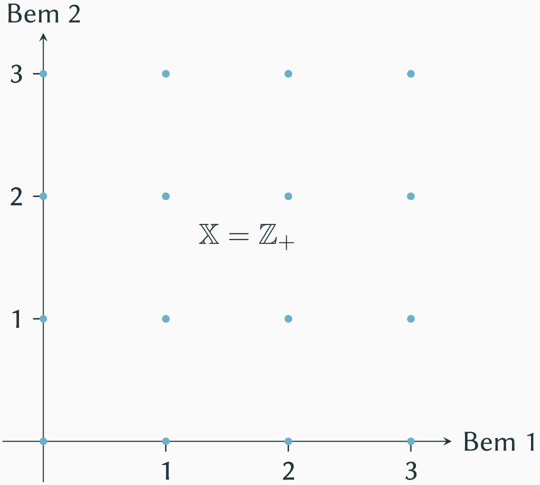
Conjunto de consumo usual — 2 bens



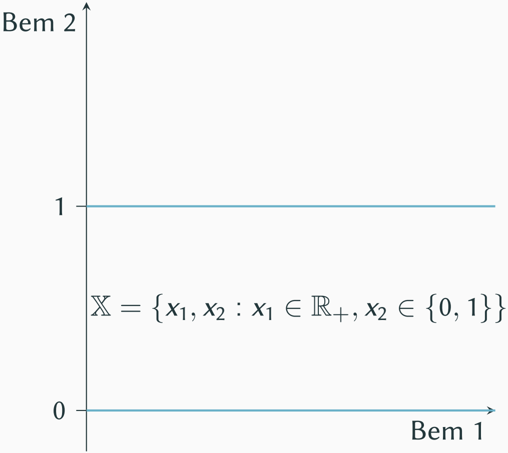
Exemplo: bem 2 é um bem discreto



Exemplo: bens 1 e 2 são discretos



Exemplo: o bem 2 é um bem binário



Operações com vetores

Espaço vetorial real

Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_L)$ duas L-uplas quaisquer com componentes reais, isto é, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^L$. Defina as seguintes operações:

Espaço vetorial real

Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_L)$ duas L-uplas quaisquer com componentes reais, isto é, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^L$. Defina as seguintes operações:

Adição:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_L + y_L)$$

Espaço vetorial real

Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_L)$ duas L-uplas quaisquer com componentes reais, isto é, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^L$. Defina as seguintes operações:

Adição:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_L + y_L)$$

Multiplicação por um escalar:

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_L)$$

em que λ é um número real qualquer.

Espaço vetorial real

Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_L)$ duas L-uplas quaisquer com componentes reais, isto é, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^L$. Defina as seguintes operações:

Adição:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_L + y_L)$$

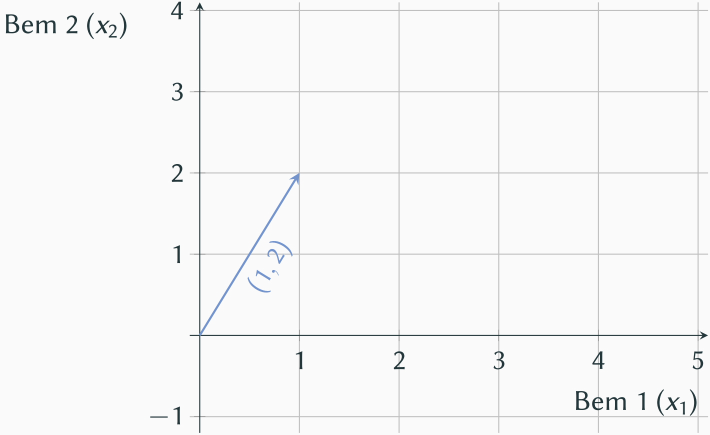
Multiplicação por um escalar:

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_L)$$

em que λ é um número real qualquer.

O conjunto $\mathbb{R}^L$ em associação com essas duas operações definem o que chamamos de espaço vertorial real com dimensão L. Nesse contexto os elementos de $\mathbb{R}^L$, tais como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são denominados de vetores reais.

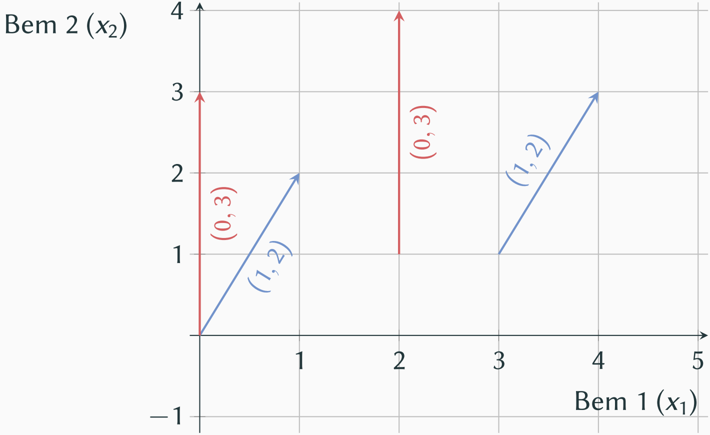
Vetores: representação alternativa



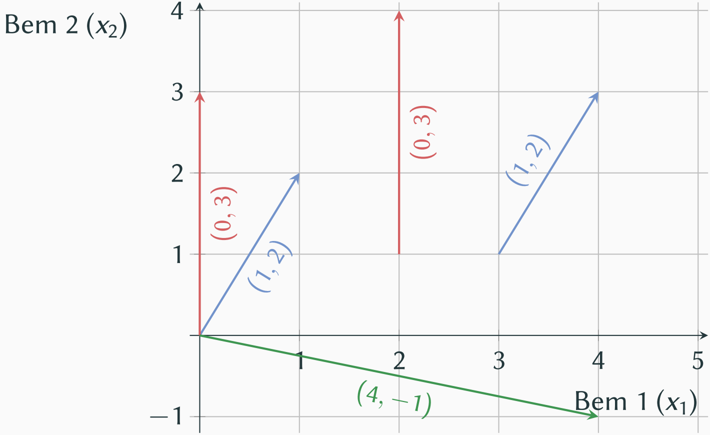
Vetores: representação alternativa

Vetores: representação alternativa

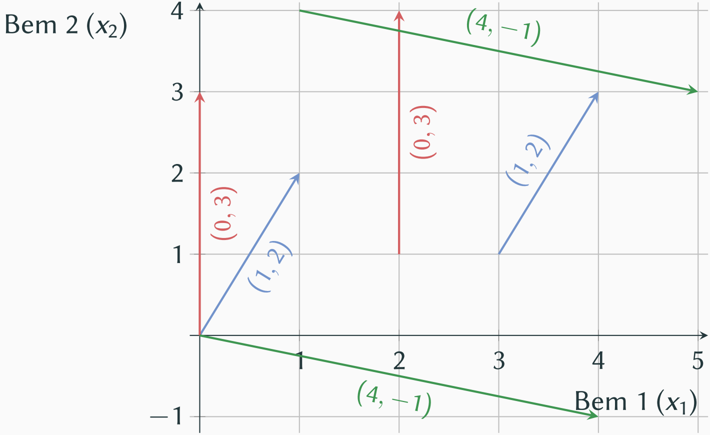
Vetores: representação alternativa



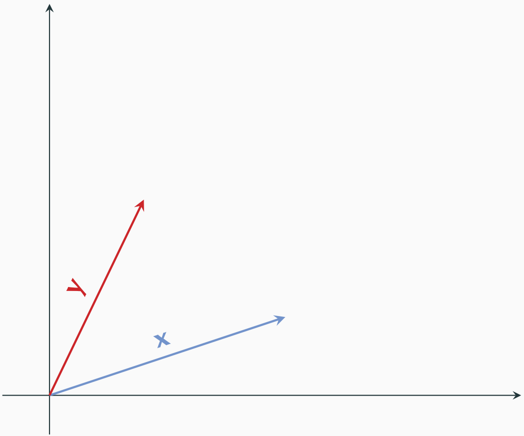
Vetores: representação alternativa



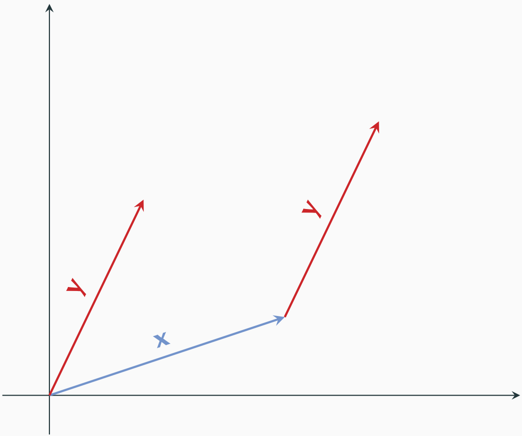
Vetores: representação alternativa



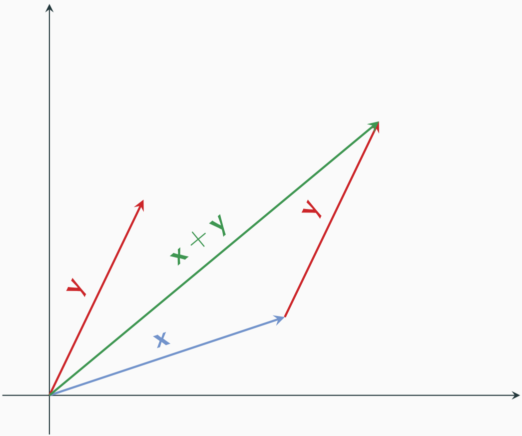
Soma de vetores: representação gráfica



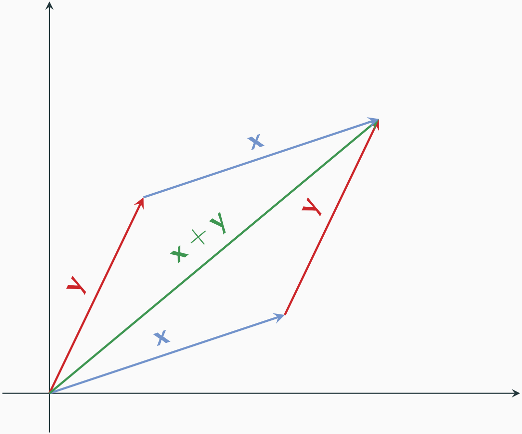
Soma de vetores: representação gráfica



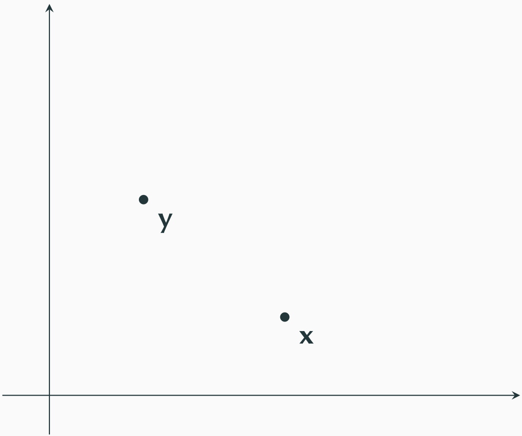
Soma de vetores: representação gráfica



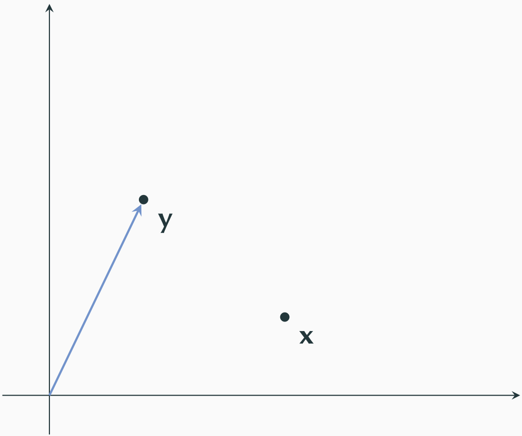
Soma de vetores: representação gráfica



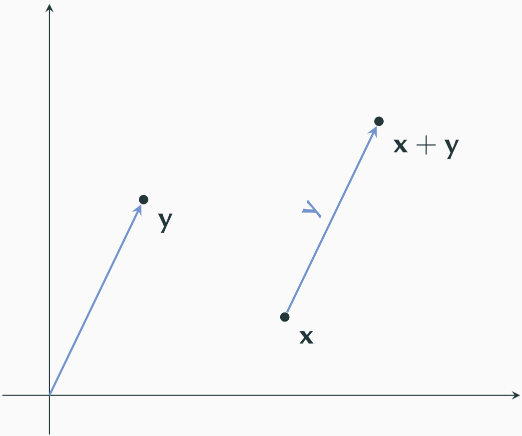
Soma de vetores: representação gráfica



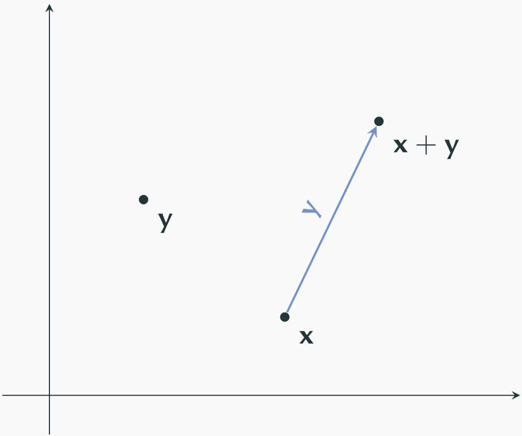
Soma de vetores: representação gráfica



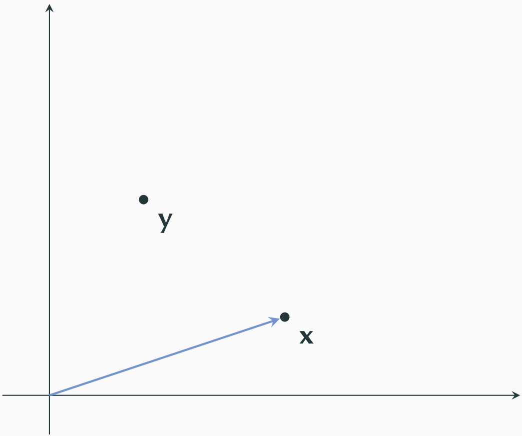
Soma de vetores: representação gráfica



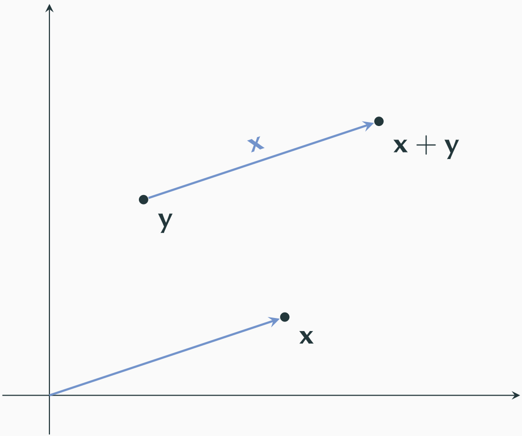
Soma de vetores: representação gráfica



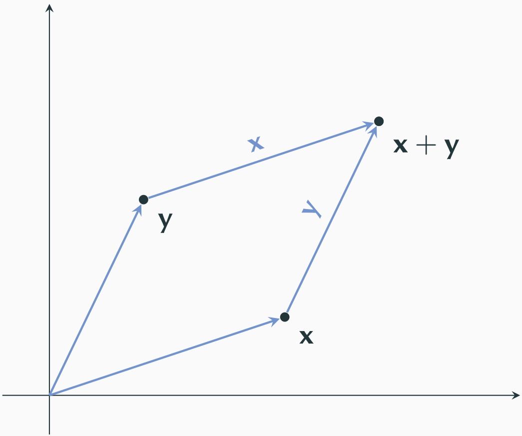
Soma de vetores: representação gráfica



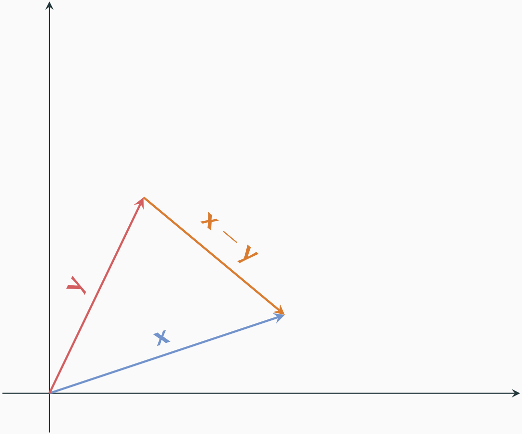
Soma de vetores: representação gráfica



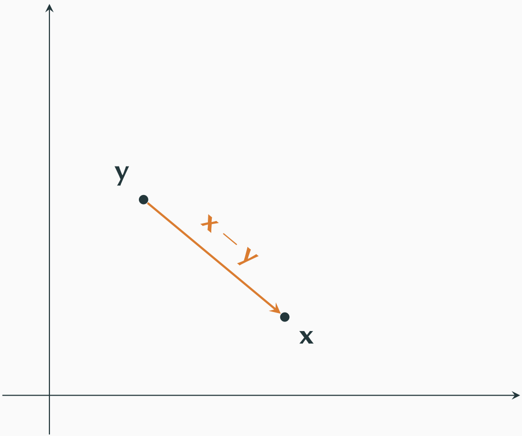
Soma de vetores: representação gráfica



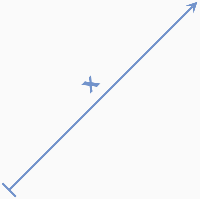
Subtração de vetores: representação gráfica



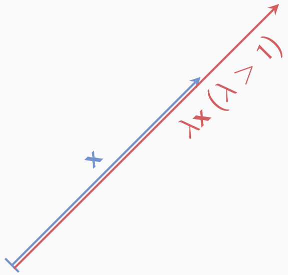
Subtração de vetores: representação gráfica



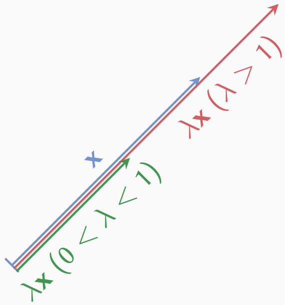
Produto por escalar: representação gráfica



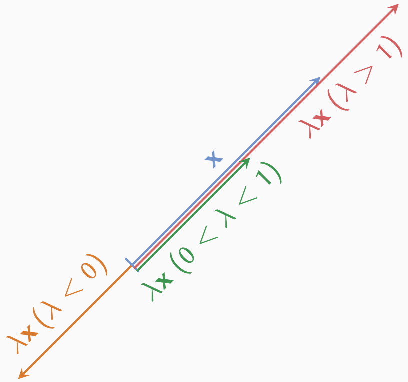
Produto por escalar: representação gráfica



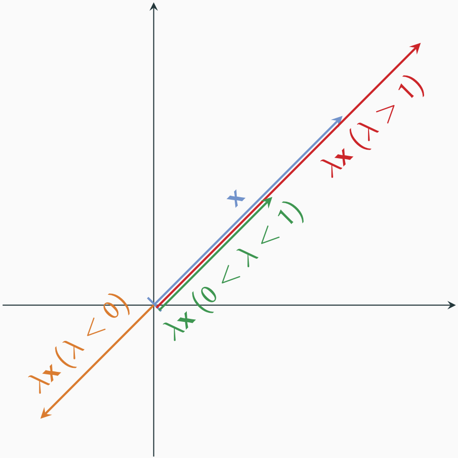
Produto por escalar: representação gráfica



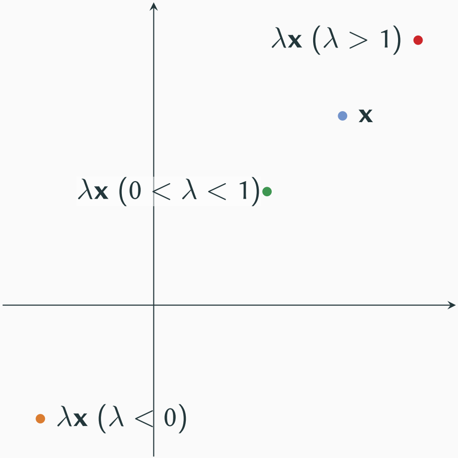
Produto por escalar: representação gráfica



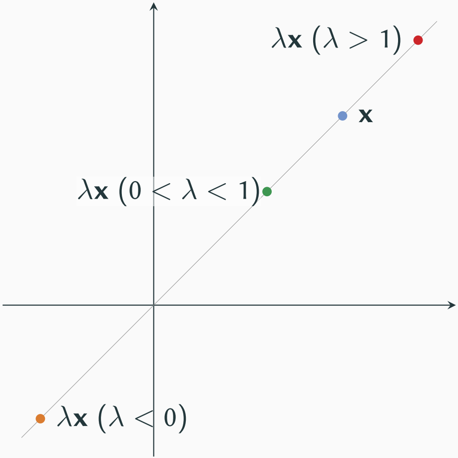
Produto por escalar: representação gráfica



Produto por escalar: representação gráfica



Produto por escalar: representação gráfica



Combinações convexas

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são dois vetores com o mesmo número de componentes e $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 < \lambda < 1$, então o vetor

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$$

Combinações convexas

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são dois vetores com o mesmo número de componentes e $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 < \lambda < 1$, então o vetor

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} = \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

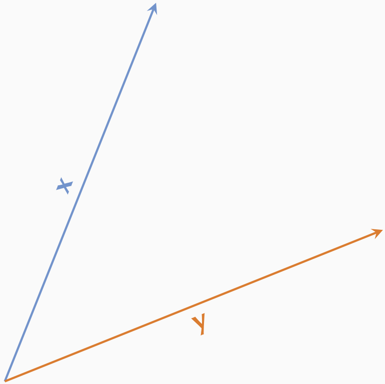
Combinações convexas

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são dois vetores com o mesmo número de componentes e $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 < \lambda < 1$, então o vetor

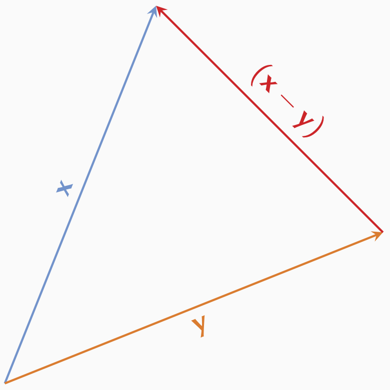
$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} = \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

é chamado de combinação convexa entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

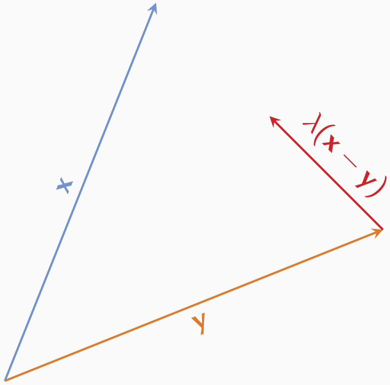
Combinação convexa: representação gráfica



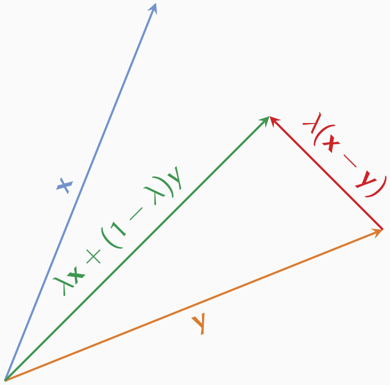
Combinação convexa: representação gráfica



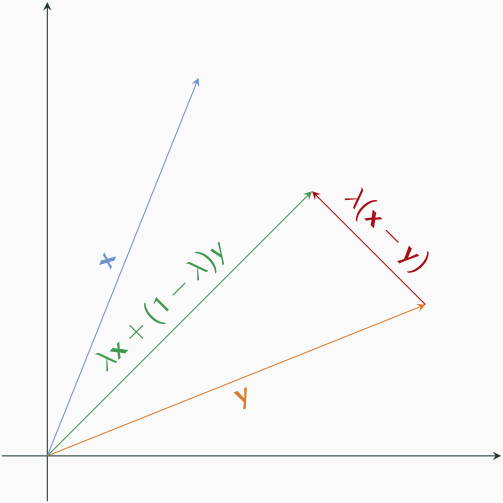
Combinação convexa: representação gráfica



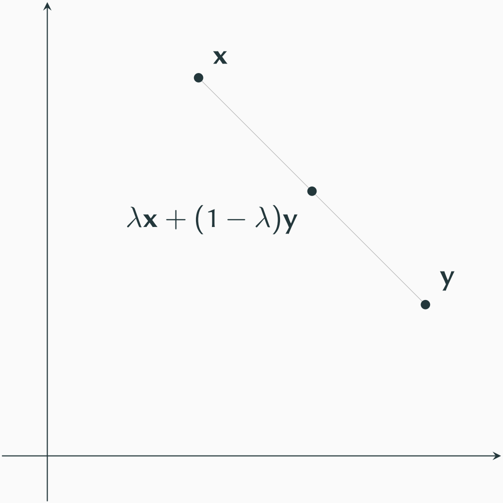
Combinação convexa: representação gráfica



Combinação convexa: representação gráfica



Combinação convexa: representação gráfica



Produto interno e módulo

Produto interno entre dois vetores:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Produto interno e módulo

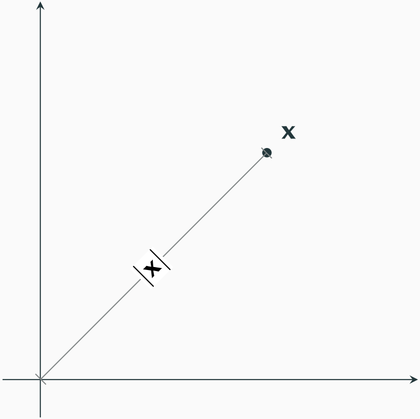
Produto interno entre dois vetores:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

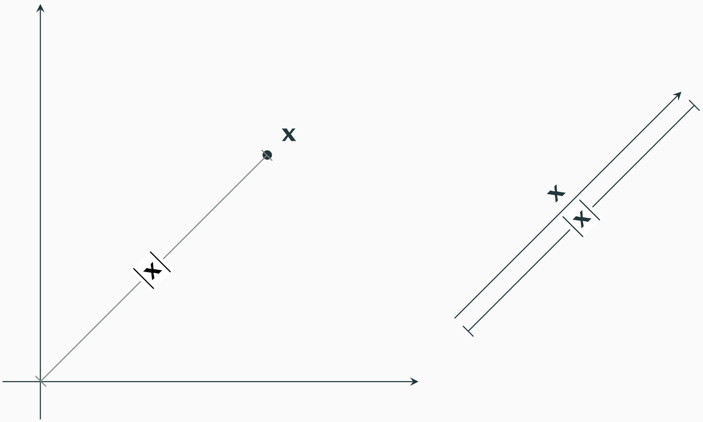
Módulo ou magnitude de um vetor:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

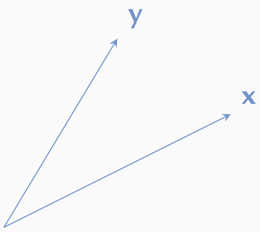
Módulo de um vetor: representação gráfica



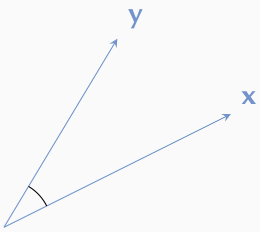
Módulo de um vetor: representação gráfica



Produto interno: representação gráfica

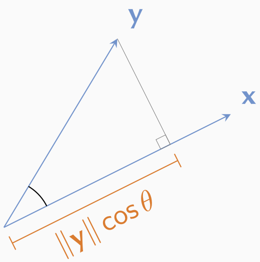


Produto interno: representação gráfica



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$$

Produto interno: representação gráfica

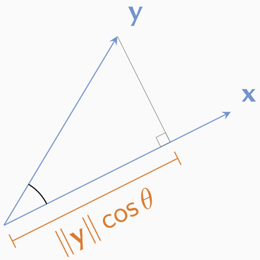


$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$$

Três casos de interesse:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \, \|\mathbf{x}\|$$

Produto interno: representação gráfica



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$$

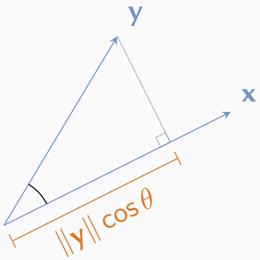
Três casos de interesse:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \, \|\mathbf{x}\|$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

nesse caso, dizemos que os dois vetores são ortogonais

Produto interno: representação gráfica



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$$

Três casos de interesse:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \, \|\mathbf{x}\|$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

nesse caso, dizemos que os dois vetores são ortogonais

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\|\mathbf{y}\| \, \|\mathbf{x}\|$$

Parte II

Preferências e suas representações

Preferências

Preferências racionais

Curvas de indiferença

Preferências contínuas

Não saciedade

Utilidade

Utilidade marginal

Taxa marginal de substituição

Preferências

Notação

Para duas cestas de consumo quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$: Quando o consumidor prefere $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, escrevemos

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}.$$

Notação

Para duas cestas de consumo quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$: Quando o consumidor prefere $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, escrevemos

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}.$$

Quando o consumidor é indiferente entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, escrevemos

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}.$$

Notação

Para duas cestas de consumo quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$: Quando o consumidor prefere $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, escrevemos

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}.$$

Quando o consumidor é indiferente entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, escrevemos

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}.$$

Para dizer que a cesta de bens $\mathbf{x}$ é preferida ou indiferente à cesta de bens (preferência fraca) $\mathbf{y}$, escrevemos

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y},$$

o que é lido como $\mathbf{x}$ é ao menos tão boa quanto $\mathbf{y}$.

Definindo $\succ$ e $\sim$ a partir de $\succsim$

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ se, e somente se, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e não é o caso que $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$.

Definindo $\succ$ e $\sim$ a partir de $\succsim$

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ se, e somente se, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e não é o caso que $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$.

$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ se, e somente se, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$.

Preferências racionais

Definição
Diz-se que um consumidor apresenta preferências racionais caso:

Definição
Diz-se que um consumidor apresenta preferências racionais caso:

1. As preferências sejam completas, isto é, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$,
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ e/ou } \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}.$$

Definição
Diz-se que um consumidor apresenta preferências racionais caso:

1. As preferências sejam completas, isto é, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$,
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ e/ou } \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}.$$

2. As preferências sejam transitivas, ou seja, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$
$$\text{se } \mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}, \text{ então } \mathbf{x} \succsim \mathbf{z}.$$

Notas sobre racionalidade das preferências:

1. Caso as preferências de um consumidor sejam completas então as relações $\succsim$ e $\sim$ serão reflexivas, ou seja, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$,

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}.$$

Notas sobre racionalidade das preferências:

1. Caso as preferências de um consumidor sejam completas então as relações $\succsim$ e $\sim$ serão reflexivas, ou seja, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$,
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}.$$

2. A racionalidade das preferências implica a transitividade das relações $\sim$ e $\succ$, isto é, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \sim \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{z} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$$

Notas sobre racionalidade das preferências:

1. Caso as preferências de um consumidor sejam completas então as relações $\succsim$ e $\sim$ serão reflexivas, ou seja, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$,
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}.$$

2. A racionalidade das preferências implica a transitividade das relações $\sim$ e $\succ$, isto é, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \sim \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{z} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$$

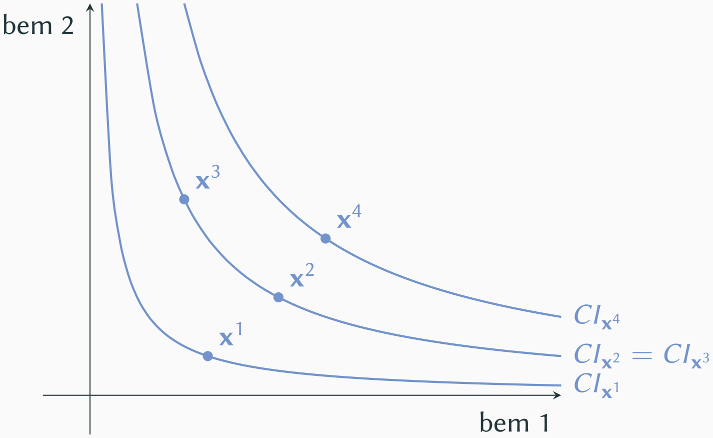
Ao longo de todo o curso suporemos, salvo menção em contrário, que os consumidores apresentam preferências racionais.

Curvas de indiferença

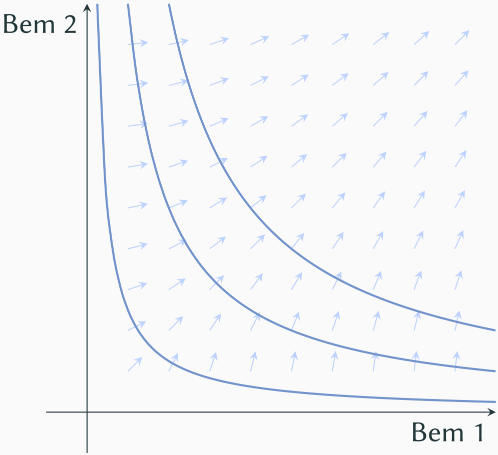
Curvas de Indiferença

A curva de indiferença, CI_{x^0} associada a qualquer cesta de bens $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{X}$ é conjunto de todas as cestas de bens pertencentes ao conjunto de consumo indiferentes a $\mathbf{x}^0$.

Representação gráfica



Representação com indicação da direção em que se localizam as cestas de bens mais preferidas



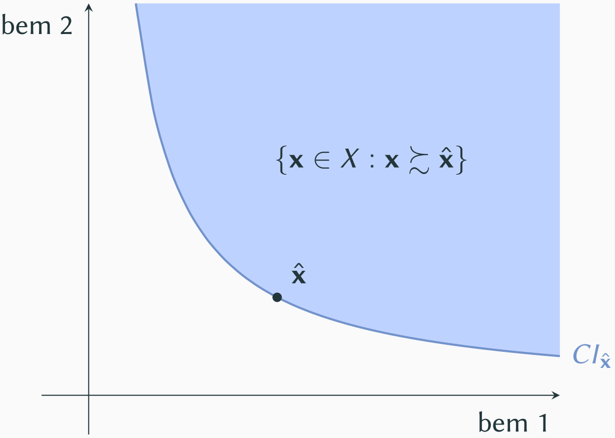
Conjunto fracamente preferido

Outra representação útil das preferências do consumidor é o conjunto das cestas de bens fracamente preferidas a uma cesta de referência. Denominando essa cesta por $\hat{x}$, tal conjunto é definido por

$$\left\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} \succsim \hat{\mathbf{x}}\right\}.$$

Ele é a união da curva de indiferença associada a $\hat{\mathbf{x}}$ mais o conjunto das cestas de bem preferidas à essa cesta.

Representação gráfica



Racionalidade e curvas de indiferença

Se as preferências de uma consumidora são racionais então, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

1. Se $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, então $CI_{\mathbf{x}} = CI_{\mathbf{y}}$; e

Racionalidade e curvas de indiferença

Se as preferências de uma consumidora são racionais então, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

1. Se $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, então $CI_{\mathbf{x}} = CI_{\mathbf{y}}$; e
2. caso contrário, $CI_{\mathbf{x}} \cap CI_{\mathbf{y}} = \varnothing$

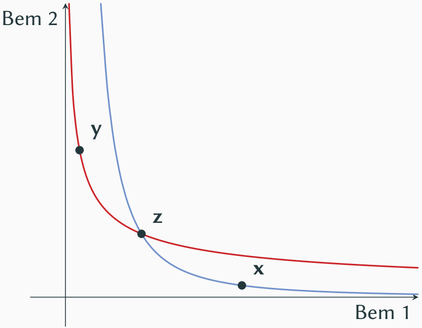
Racionalidade e curvas de indiferença

Se as preferências de uma consumidora são racionais então, para quaisquer duas cestas de bens **x** e **y**:

1. Se $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, então $CI_{\mathbf{x}} = CI_{\mathbf{y}}$; e
2. caso contrário, $CI_{\mathbf{x}} \cap CI_{\mathbf{y}} = \varnothing$

Isso significa que, se duas curvas de indiferença têm um ponto em comum, elas terão todos os pontos em comum. Portanto, duas curvas de indiferença distintas não se cruzam.

Duas curvas de indiferença não se cruzam



$$\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$$

Portanto, se as preferências são transitivas,

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$$

Preferências contínuas

Preferências contínuas

As preferências são ditas contínuas caso, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, então,

1. qualquer cesta de bens suficientemente próxima de $\mathbf{x}$ também será preferida a $\mathbf{y}$ e
2. $\mathbf{x}$ será preferida a qualquer cesta de bens suficientemente próxima de $\mathbf{y}$.

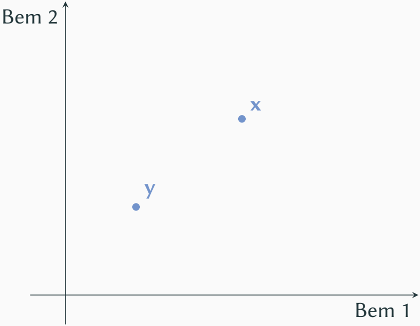
Mais formalmente, as preferências são ditas contínuas caso, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, existirem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que, para quaisquer cestas de bens $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{X}$,

$$\left|\mathbf{z} - \mathbf{x}\right| < \epsilon_1 \Rightarrow \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$$

e

$$\left|\mathbf{w} - \mathbf{y}\right| < \epsilon_2 \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}.$$

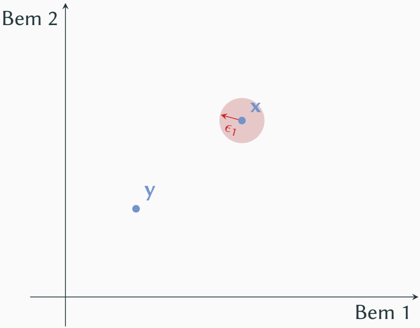
Preferências contínuas



Se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, então:

1. existe um círculo com centro em $\mathbf{x}$ tal que toda a cesta de bens nele contida é preferia a y; e

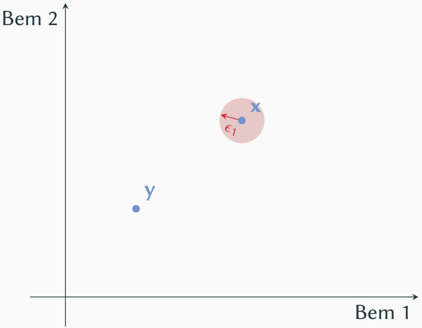
Preferências contínuas



Se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, então:

1. existe um círculo com centro em $\mathbf{x}$ tal que toda a cesta de bens nele contida é preferia a y; e

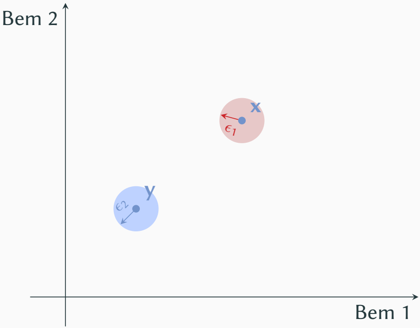
Preferências contínuas



Se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, então:

1. existe um círculo com centro em $\mathbf{x}$ tal que toda a cesta de bens nele contida é preferia a y; e
2. existem um círculo com centro em $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{x}$ é preferido a qualquer cesta de bens nele contida.

Preferências contínuas



Se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, então:

1. existe um círculo com centro em **x** tal que toda a cesta de bens nele contida é preferia a y; e
2. existem um círculo com centro em **y** tal que **x** é preferido a qualquer cesta de bens nele contida.

Exemplo: substitutos perfeitos

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$.

Entre duas cestas de bens quaisquer, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, a consumidora prefere aquela cuja soma das quantidades dos dois bens seja a maior. Se as somas das quantidades dos dois bens for igual para as duas cestas, ela as considera indiferente.

Mais formalmente, suas preferências são tais que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}, \mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2.$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1|$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2}$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_2 - z_2 \leq |x_2 - z_2| = \sqrt{(x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_2 - z_2 \leq |x_2 - z_2| = \sqrt{(x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_2 - z_2 \leq |x_2 - z_2| = \sqrt{(x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

Então, se $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon_1$,

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 < x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_2 - z_2 \leq |x_2 - z_2| = \sqrt{(x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

Então, se $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon_1$,

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 < x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

$$z_1 + z_2 > y_1 + y_2$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_1 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $x_1, x_2, z_1, z_2 > 0$,

$$x_1 - z_1 \leq |x_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_2 - z_2 \leq |x_2 - z_2| = \sqrt{(x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

Então, se $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon_1$,

$$x_1 - z_1 + x_2 - z_2 < x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

$$z_1 + z_2 > y_1 + y_2 \Rightarrow \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça
$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$
Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

$$w_1 - y_1 \leq |w_1 - y_1| = \sqrt{(w_1 - y_1)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

$$w_1 - y_1 \leq |w_1 - y_1| = \sqrt{(w_1 - y_1)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_2 - y_2 \leq |w_2 - y_2| = \sqrt{(w_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

$$w_1 - y_1 \leq |w_1 - y_1| = \sqrt{(w_1 - y_1)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_2 - y_2 \leq |w_2 - y_2| = \sqrt{(w_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 \leq 2|\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

$$w_1 - y_1 \leq |w_1 - y_1| = \sqrt{(w_1 - y_1)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_2 - y_2 \leq |w_2 - y_2| = \sqrt{(w_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 \leq 2|\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

Então, se $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| < \epsilon_2$,

$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 < x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

$$w_1 - y_1 \leq |w_1 - y_1| = \sqrt{(w_1 - y_1)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_2 - y_2 \leq |w_2 - y_2| = \sqrt{(w_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 \leq 2|\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

Então, se $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| < \epsilon_2$,

$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 < x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

$$w_1 + w_2 < x_1 + x_2$$

Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)

Faça

$$\epsilon_2 = \frac{x_1 - y_1 + x_2 - y_2}{2}.$$

Como $w_1, w_2, y_1, y_2 > 0$,

$$w_1 - y_1 \leq |w_1 - y_1| = \sqrt{(w_1 - y_1)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

$$w_2 - y_2 \leq |w_2 - y_2| = \sqrt{(w_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2} = |\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

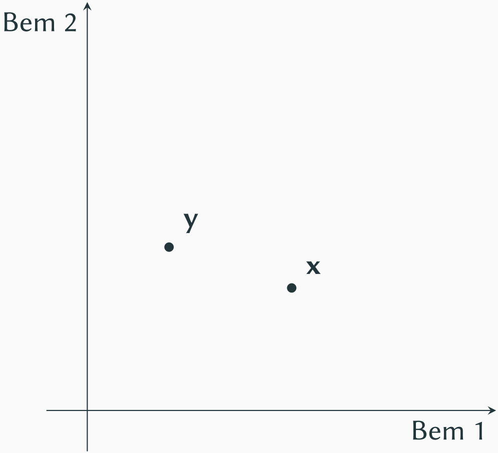
$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 \leq 2|\mathbf{w} - \mathbf{y}|$$

Então, se $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| < \epsilon_2$,

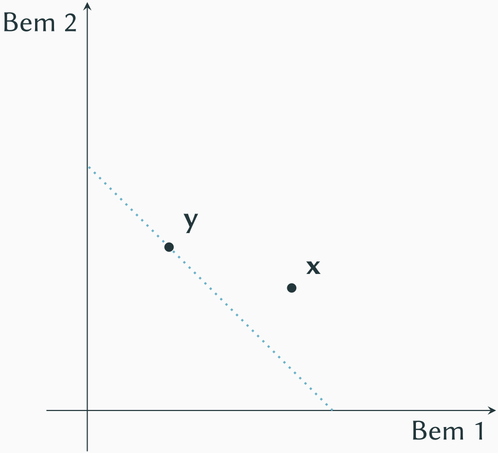
$$w_1 - y_1 + w_2 - y_2 < x_1 - y_1 + x_2 - y_2$$

$$w_1 + w_2 < x_1 + x_2 \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{w}$$

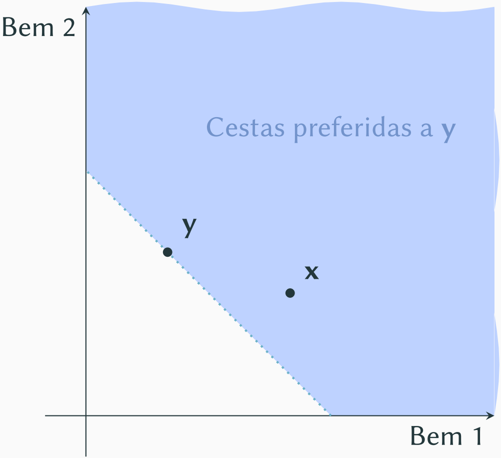
Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



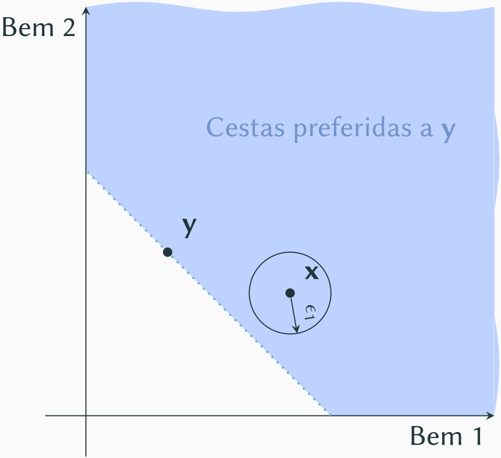
Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



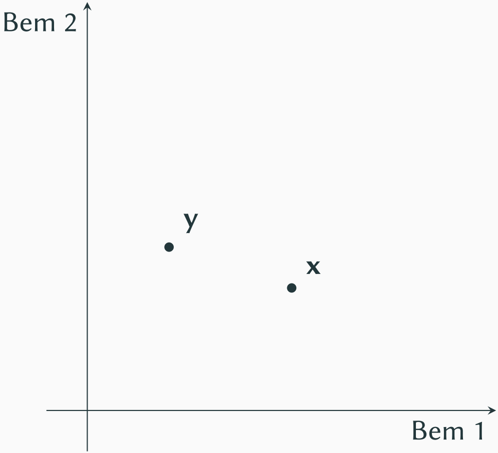
Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



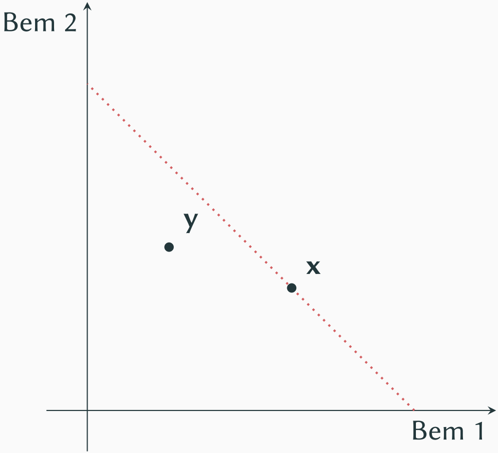
Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



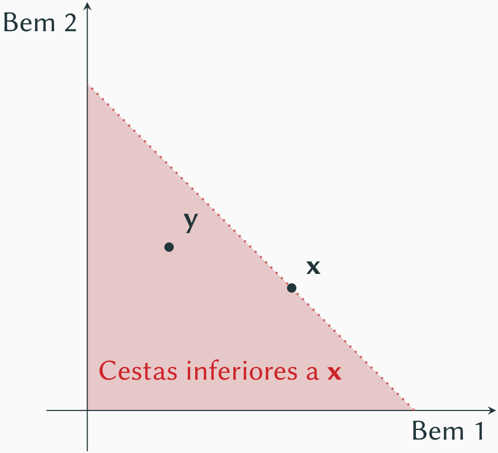
Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



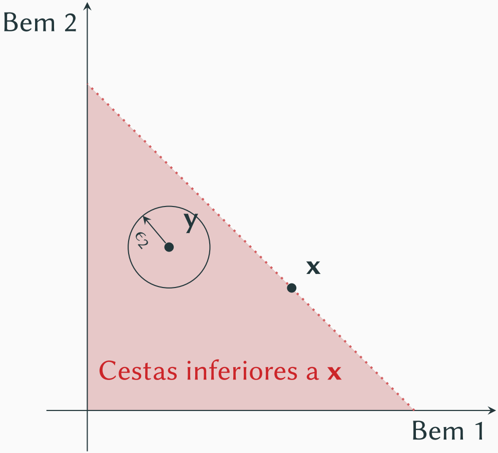
Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



Exemplo: substitutos perfeitos (continuação)



Exemplo: preferências lexicográficas

Uma consumidora escolhe entre duas cestas contendo dois bens de acordo com o seguinte critério:

- Independentemente das quantidades do bem 2, ela prefere a cesta com a maior quantidade do bem 1;

Exemplo: preferências lexicográficas

Uma consumidora escolhe entre duas cestas contendo dois bens de acordo com o seguinte critério:

- Independentemente das quantidades do bem 2, ela prefere a cesta com a maior quantidade do bem 1;
- Se as quantidades do bem 1 nas duas cestas são iguais, ela prefere a que contém a maior quantidade do bem 2;

Exemplo: preferências lexicográficas

Uma consumidora escolhe entre duas cestas contendo dois bens de acordo com o seguinte critério:

- Independentemente das quantidades do bem 2, ela prefere a cesta com a maior quantidade do bem 1;
- Se as quantidades do bem 1 nas duas cestas são iguais, ela prefere a que contém a maior quantidade do bem 2;
- Se as duas cestas contém as mesmas quantidades dos dois bens, então ela é indiferente entre as duas cestas.

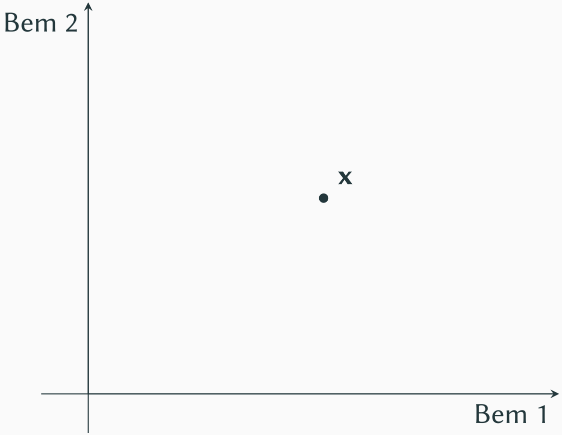
Exemplo: preferências lexicográficas

Uma consumidora escolhe entre duas cestas contendo dois bens de acordo com o seguinte critério:

- Independentemente das quantidades do bem 2, ela prefere a cesta com a maior quantidade do bem 1;
- Se as quantidades do bem 1 nas duas cestas são iguais, ela prefere a que contém a maior quantidade do bem 2;
- Se as duas cestas contém as mesmas quantidades dos dois bens, então ela é indiferente entre as duas cestas.

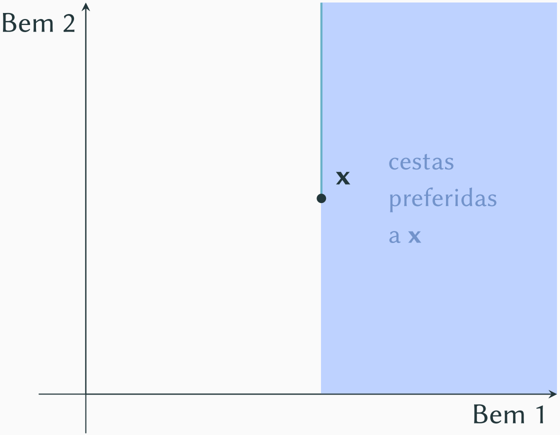
Note que essas preferências são completas e transitivas e, portanto, racionais. Porém, elas não são contínuas.

Preferências lexicográficas



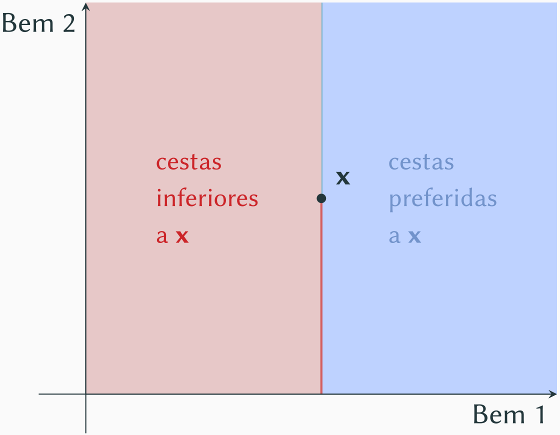
A curva de indiferença associada a **x** contém apenas **x**.

Preferências lexicográficas



A curva de indiferença associada a **x** contém apenas **x**.

Preferências lexicográficas

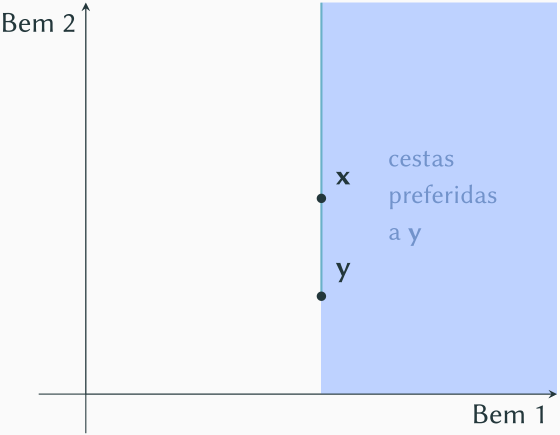


A curva de indiferença associada a **x** contém apenas **x**.

Preferências lexicográficas

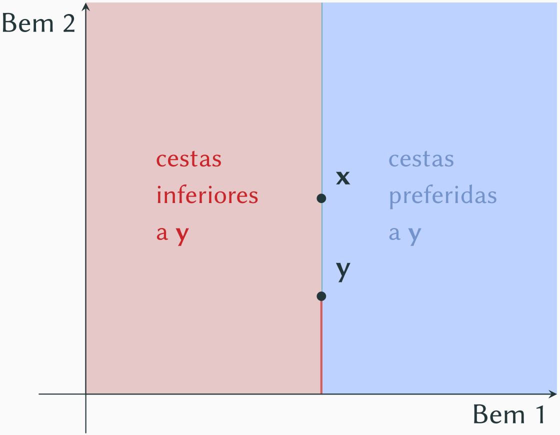
$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$

Preferências lexicográficas



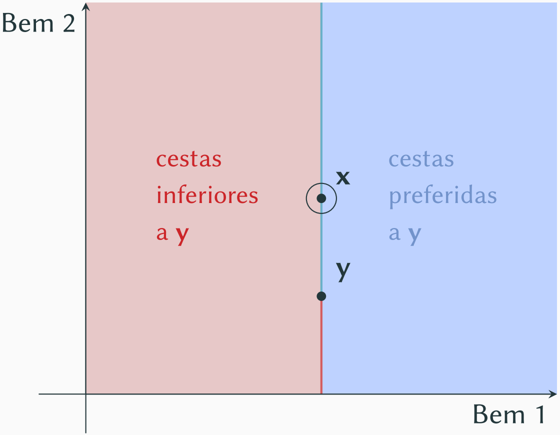
$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$

Preferências lexicográficas



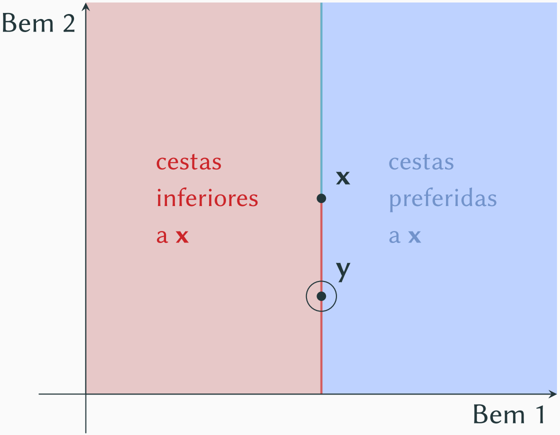
$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$

Preferências lexicográficas



Qualquer círculo com centro em **x** contém cestas inferiores a **y**.

Preferências lexicográficas



Qualquer círculo com centro em **y** contém cestas preferidas a **x**.

Não saciedade

Não saciedade global (NSG)

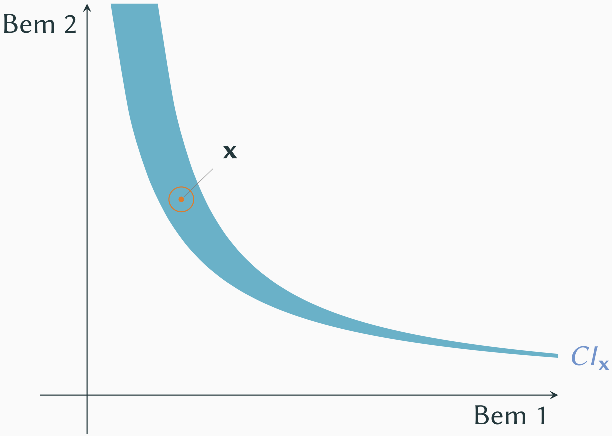
As preferências de um consumidor são ditas globalmente não saciáveis caso, para qualquer cesta de bens $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ exista uma outra cesta $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

Não saciedade local (NSL)

As preferências de um consumidor são ditas localmente não saciáveis caso, para qualquer cesta de bens $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ e qualquer número real positivo ϵ, existe uma cesta de bens $\mathbf{y}$ a uma distância de $\mathbf{x}$ menor do que ϵ, ou seja, tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon$, tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

Se as preferências apresentam não saciedade local, então as curvas de indiferença não podem ser "grossas".

Incompatibilidade entre curvas de indiferença grossas e NSL



Monotonicidade fraca, versão(MFrc)

As preferências de uma consumidora são ditas fracamente monotônicas caso, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, com

$$\mathbf{x} \gg \mathbf{y}, \text{ ou seja, } x_1 > y_1,\ x_2 > y_2, \ldots, x_L > y_L,$$

tenhamos

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}.$$

Consequência: curvas de indiferença não podem ser grossas e não podem ter inclinação positiva.

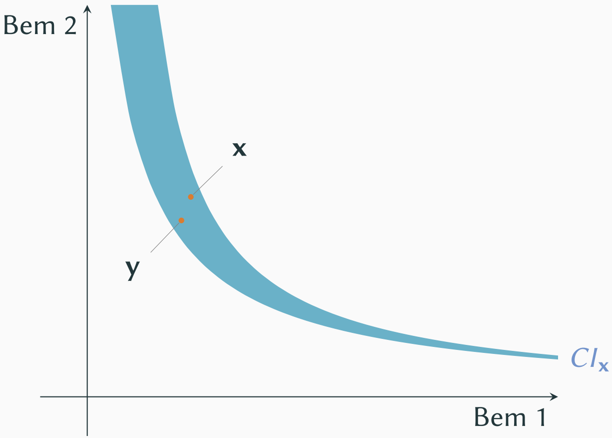
Monotonicidade forte (MFrt)

As preferências de um consumidor são ditas fracamente monotônicas caso, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se $\mathbf{x}$ contiver ao menos a mesma quantidade de todos os bens que $\mathbf{y}$ e uma quantidade maior do que, ao menos um bem, então $\mathbf{x} \succ y$, ou, mais sucintamente,

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y}.$$

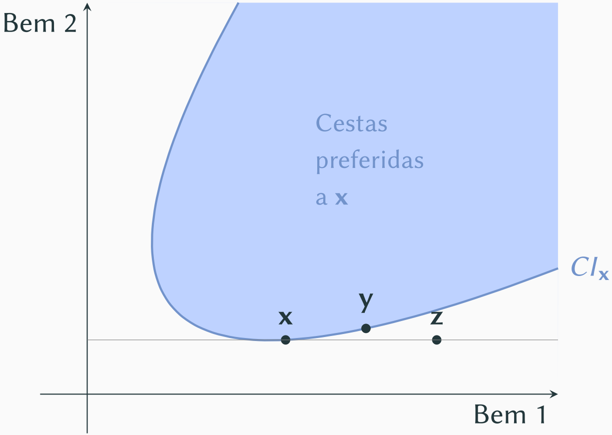
Consequência: não saciedade local, curvas de indiferença não podem ser grossas e têm inclinação positiva.

Exemplo:



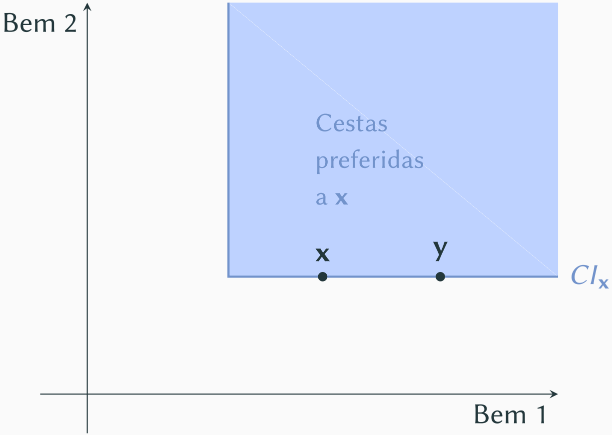
Compatível com não saciedade global, mas incompatível com *M*Frc, NSL e *M*Frt.

Exemplo:



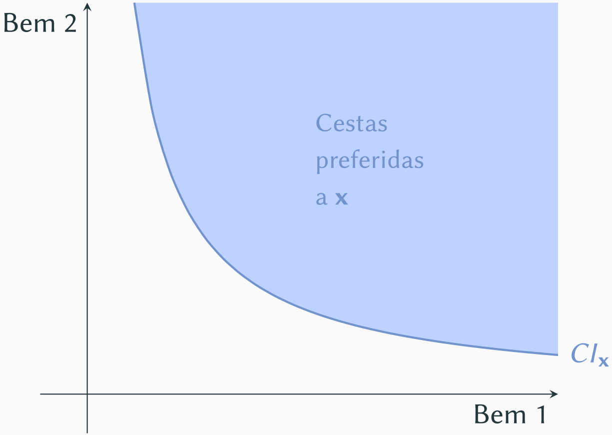
Preferências compatíveis com NSL, mas incompatíveis com MFrc, MFrt.

Exemplo:



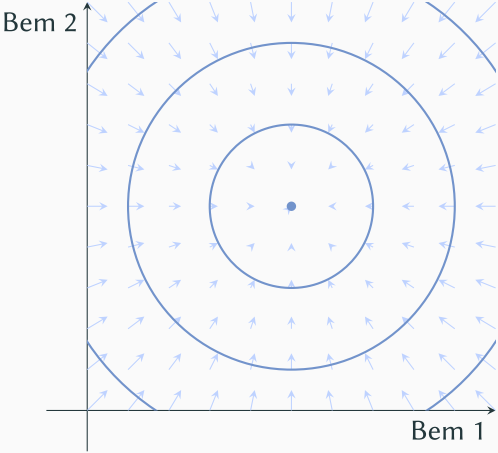
Preferências compatíveis com NSL e MFrc, mas incompatíveis com MFrt.

Exemplo:



Preferências compatíveis com NSL, *M*Frc e *M*Frt.

Preferências com ponto de saciedade global



Utilidade

Utilidade

Uma representação numérica das preferências de um consumidor pode ser obtida atribuindo-se números reais, chamados utilidade, a cada cesta de bens do conjunto $\mathbb{X}$ de tal sorte que:

1. Cestas de bens indiferentes recebam o mesmo número; e
2. de duas cestas não indiferentes, a mais preferida receba um número maior.

Uma função que atribua utilidade a todas as cestas do conjunto de consumo seguindo esse critério é chamada função de utilidade.

Função de Utilidade — Definição

Uma função $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é chamada de função de utilidade caso, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$,

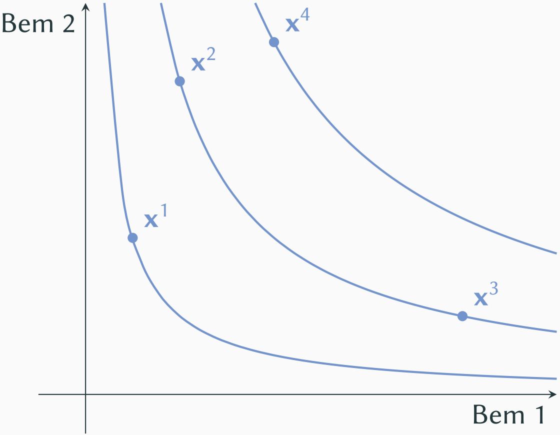
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ se, e somente se, } U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}).$$

Existência da função de utilidade

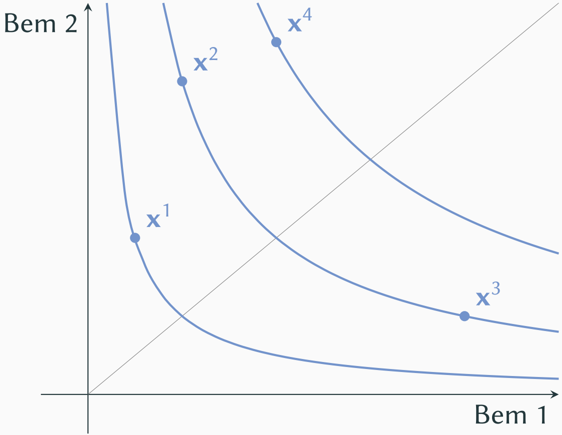
Nem todas preferências são passíveis de serem representadas por uma função de utilidade. Por exemplo, possível construir uma função de utilidade para preferências lexicográficas.

Todavia, preferências contínuas admitem representação por uma função de utilidade contínua.

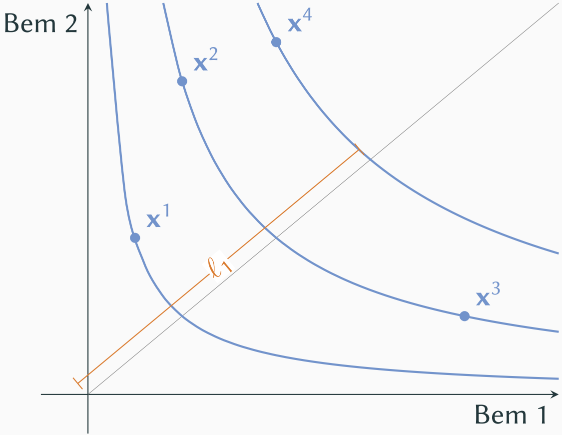
Exemplo: preferências contínuas e fortemente monotônicas



Exemplo: preferências contínuas e fortemente monotônicas

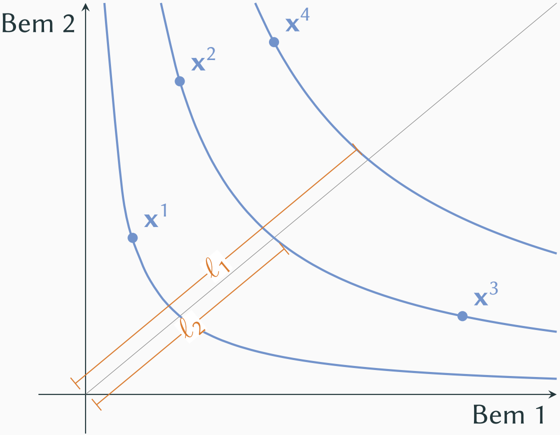


Exemplo: preferências contínuas e fortemente monotônicas



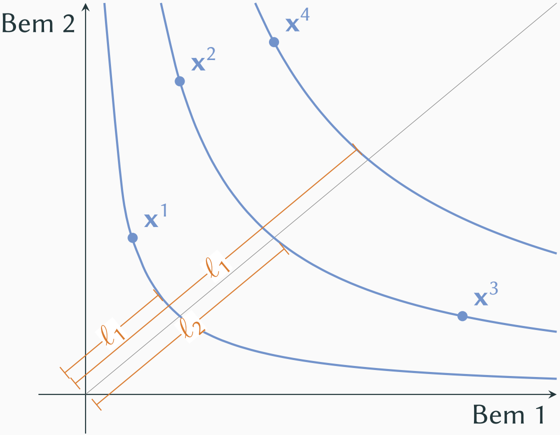
$U(\mathbf{x}^4) = \ell_1$

Exemplo: preferências contínuas e fortemente monotônicas



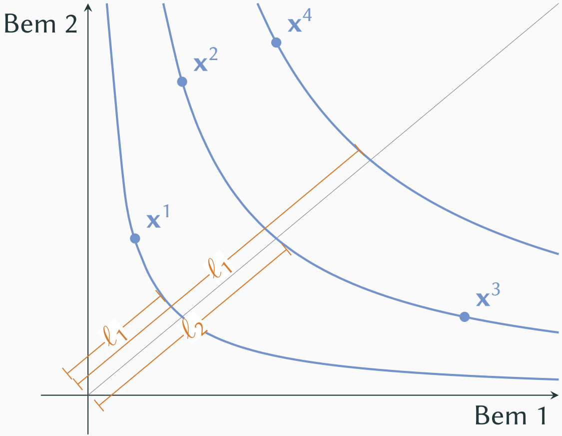
$$U(\mathbf{x}^4) = \ell_1 \quad U(\mathbf{x}^2) = U(\mathbf{x}^3) = \ell_2$$

Exemplo: preferências contínuas e fortemente monotônicas



$$U(\mathbf{x}^4) = \ell_1 \quad U(\mathbf{x}^2) = U(\mathbf{x}^3) = \ell_2 \quad U(\mathbf{x}^1) = \ell_3.$$

Exemplo: função de utilidade alternativa



$$U(\mathbf{x}^4) = \sqrt{\ell_1} \quad U(\mathbf{x}^2) = U(\mathbf{x}^3) = \sqrt{\ell_2} \quad U(\mathbf{x}^1) = \sqrt{\ell_3}.$$

Seja $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade associada a um consumidor. A imagem de U será notada por $U(\mathbb{X})$ e é definida por

$$U(\mathbb{X}) = \{U(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}.$$

Note que $U(\mathbb{X})$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Transformações monotônicas

Seja $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade associada a um consumidor. A imagem de U será notada por $U(\mathbb{X})$ e é definida por

$$U(\mathbb{X}) = \{U(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}.$$

Note que $U(\mathbb{X})$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Assuma uma função real f definida em $U(\mathbb{X})$. Dizemos que f é monotonicamente crescente, monotonamente crescente ou apenas monotônica em $U(\mathbb{X})$ caso, para quaisquer $u, w \in U(\mathbb{X})$:

$$u > w \Rightarrow f(u) > f(w).$$

Se U for uma função de utilidade, isto é, se, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ se, e somente se } U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}),$$

e f for uma função monotônica em $U(\mathbb{X})$, então a função composta, definida no conjunto de consumo como:

$$V(\mathbf{x}) = f\left(U(\mathbf{x})\right)$$

também será será uma função de utilidade, ou seja,

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ se, e somente se } V(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{y}),$$

Exemplo

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$$

Exemplo

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$$
$$U(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1 \, x_2}$$

Exemplo

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$$
$$U(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1\, x_2}$$
$$U(\mathbb{X}) = \mathbb{R}_+$$

Exemplo

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$$

$$U(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1 \, x_2}$$

$$U(\mathbb{X}) = \mathbb{R}_+$$

A função $f(u) = u^2$ é monotônica em R_+ e, portanto, monotônica na imagem de U.

Exemplo

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$$
$$U(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1\, x_2}$$
$$U(\mathbb{X}) = \mathbb{R}_+$$

A função $f(u) = u^2$ é monotônica em R_+ e, portanto, monotônica na imagem de U. Assim, uma função de utilidade que representa as mesmas preferências é a função

$$V(\mathbf{x}) = (U(\mathbf{x}))^2 = x_1 x_2.$$

Relação entre as funções de utilidade

$V(\mathbf{x})$ e $U(\mathbf{x})$ representam as preferências de uma mesma consumidora se, e somente se, tais funções são transformações monotônicas uma da outra.

Propriedades ordinais e cardinais de uma função de utilidade

As propriedades de uma função de utilidade que são preservadas por transformações monotônicas são chamadas propriedades ordinais dessa função. Elas dependem apenas de como as cestas de bens são ordenadas de acordo com as preferências do consumidor.

Propriedades ordinais e cardinais de uma função de utilidade

As propriedades de uma função de utilidade que são preservadas por transformações monotônicas são chamadas propriedades ordinais dessa função. Elas dependem apenas de como as cestas de bens são ordenadas de acordo com as preferências do consumidor.

A propriedades da função de utilidade que não são preservadas por transformações monotônicas são as chamadas propriedades cardinais dessa função. As propriedades cardinais têm significado apenas no caso em que se acredita que a função de utilidade mede de alguma maneira a intensidade das preferências do consumidor.

Exemplo

Suponha que as preferências de uma consumidora possam ser representadas pela função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1, x_2}.$$

Então, ao comparar as cestas de bens $\mathbf{x}^1 = (2, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (4, 4)$, podemos constatar que:

Exemplo

Suponha que as preferências de uma consumidora possam ser representadas pela função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1, x_2}.$$

Então, ao comparar as cestas de bens $\mathbf{x}^1 = (2, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (4, 4)$, podemos constatar que:

1. $U(\mathbf{x}^2) > U(\mathbf{x}^1)$, o que indica que $\mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$; e

Exemplo

Suponha que as preferências de uma consumidora possam ser representadas pela função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1, x_2}.$$

Então, ao comparar as cestas de bens $\mathbf{x}^1 = (2, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (4, 4)$, podemos constatar que:

1. $U(\mathbf{x}^2) > U(\mathbf{x}^1)$, o que indica que $\mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$; e
2. $U(\mathbf{x}^2) = 2U(\mathbf{x}^1)$, isto é, a utilidade da cesta $\mathbf{x}^2$ é o dobro da utilidade da cesta $\mathbf{x}^1$.

Exemplo (continuação)

Considere agora a função de utilidade alternativa já apresentada

$$V(x_1, x_2) = [U(\mathbf{x})]^2 = x_1 x_2.$$

Exemplo (continuação)

Considere agora a função de utilidade alternativa já apresentada

$$V(x_1, x_2) = [U(\mathbf{x})]^2 = x_1 x_2.$$

Agora, ao comparar $\mathbf{x}^1 = (2, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (4, 4)$, observamos

1. $V(\mathbf{x}^2) > V(\mathbf{x}^1)$, portanto, a utilidade de $\mathbf{x}^2$ continua maior do que a utilidade de $\mathbf{x}^1$. Essa é uma propriedade ordinal das duas funções de utilidade.

Exemplo (continuação)

Considere agora a função de utilidade alternativa já apresentada

$$V(x_1, x_2) = [U(\mathbf{x})]^2 = x_1 x_2.$$

Agora, ao comparar $\mathbf{x}^1 = (2, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (4, 4)$, observamos

1. $V(\mathbf{x}^2) > V(\mathbf{x}^1)$, portanto, a utilidade de $\mathbf{x}^2$ continua maior do que a utilidade de $\mathbf{x}^1$. Essa é uma propriedade ordinal das duas funções de utilidade.
2. $V(\mathbf{x}^2) = 4V(\mathbf{x}^1)$, ou seja, a utilidade da cesta $\mathbf{x}^2$ é agora 4 vezes maior do que a da cesta $\mathbf{x}^1$. Como essa propriedade foi alterada pela transformação monotônica, ela é uma propriedade cardinal.

Utilidade marginal

Utilidade Marginal

Se a função de utilidade é diferenciável em uma cesta $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, então, a utilidade marginal do bem i é definida por

$$UMg_i = \frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}).$$

Exemplo: se $U(x_1, x_2) = x_1\, x_2$, a utilidade marginal do bem 1 em qualquer cesta $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ é

$$UMg_1(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1\, x_2) = x_2.$$

Propriedades da utilidade marginal

A utilidade marginal é uma propriedade cardinal da função de utilidade.

Propriedades da utilidade marginal

A utilidade marginal é uma propriedade cardinal da função de utilidade.

A utilidade marginal é medida em unidades de utilidade por unidades do bem 1.

Propriedades da utilidade marginal

A utilidade marginal é uma propriedade cardinal da função de utilidade.

A utilidade marginal é medida em unidades de utilidade por unidades do bem 1.

Se a unidade em que o bem i é medido é pequena, então a utilidade marginal pode ser interpretada como de quanto cresce o valor da função de utilidade quando o consumo desse bem é aumentado em uma unidade.

Utilidade marginal e monotonicidade

Se as preferências são fortemente monotônicas, então, para qualquer cesta de bens, todos os bens possuem utilidade marginal positiva (> 0).

Utilidade marginal e monotonicidade

Se as preferências são fortemente monotônicas, então, para qualquer cesta de bens, todos os bens possuem utilidade marginal positiva (> 0).

Se as preferências são fracamente monotônicas (versão I ou II), então, para qualquer cesta de bens, todos os bens possuem utilidade marginal não negativa (≥ 0).

Utilidade marginal e monotonicidade

Se as preferências são fortemente monotônicas, então, para qualquer cesta de bens, todos os bens possuem utilidade marginal positiva (> 0).

Se as preferências são fracamente monotônicas (versão I ou II), então, para qualquer cesta de bens, todos os bens possuem utilidade marginal não negativa (≥ 0).

O sinal da utilidade marginal é uma propriedade ordinal, pois não pode ser alterado por transformações monotônicas da função de utilidade.

Sinal da utilidade marginal e tranformações monotônicas

Seja $f(u)$ uma função monotônica e diferenciável em $U(\mathbb{X})$. Então

$$\frac{d}{du}f(u) > 0 \text{ para qualquer } u \in U(\mathbb{X}).$$

Se $V(\mathbf{x}) = f\left(U(\mathbf{x})\right)$, então,

Sinal da utilidade marginal e tranformações monotônicas

Seja $f(u)$ uma função monotônica e diferenciável em $U(\mathbb{X})$. Então

$$\frac{d}{du}f(u) > 0 \text{ para qualquer } u \in U(\mathbb{X}).$$

Se $V(\mathbf{x}) = f\left(U(\mathbf{x})\right)$, então,

$$\text{sinal de } \frac{\partial V}{\partial x_i} = \text{ sinal de } \frac{d}{dx_i}f\left(U(\mathbf{x})\right)$$

Sinal da utilidade marginal e tranformações monotônicas

Seja $f(u)$ uma função monotônica e diferenciável em $U(\mathbb{X})$. Então

$$\frac{d}{du}f(u) > 0 \text{ para qualquer } u \in U(\mathbb{X}).$$

Se $V(\mathbf{x}) = f\left(U(\mathbf{x})\right)$, então,

$$\begin{aligned}
\text{sinal de } \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \text{ sinal de } \frac{d}{dx_i}f\left(U(\mathbf{x})\right) \\
&= \text{ sinal de } \left[\frac{d}{du}f\left(U(\mathbf{x})\right)\frac{\partial}{\partial x_i}U(\mathbf{x})\right]
\end{aligned}$$

Sinal da utilidade marginal e tranformações monotônicas

Seja $f(u)$ uma função monotônica e diferenciável em $U(\mathbb{X})$. Então

$$\frac{d}{du}f(u) > 0 \text{ para qualquer } u \in U(\mathbb{X}).$$

Se $V(\mathbf{x}) = f\left(U(\mathbf{x})\right)$, então,

$$\begin{aligned}
\text{sinal de } \frac{\partial V}{\partial x_i} = &\text{ sinal de } \frac{d}{dx_i}f\left(U(\mathbf{x})\right) \\
= &\text{ sinal de } \left[\frac{d}{du}f\left(U(\mathbf{x})\right)\frac{\partial}{\partial x_i}U(\mathbf{x})\right] = \\
&\text{sinal de } \frac{\partial}{\partial x_i}U(\mathbf{x}) = \text{ sinal de } UMg_i.
\end{aligned}$$

Taxa marginal de substituição

Taxa marginal de substituição (TMS)

Considere o caso de dois bens. Sejam

Δx_1	uma variação qualquer no consumo do bem 1; e
Δx_2	a variação no consumo do bem 2 que faz com que, após a variação no consumo do bem 1, o consumidor volte à curva de indiferença anterior a essa variação.

$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ indica a variação média de x_2 por unidade alterada de x_1.

Taxa marginal de substituição (TMS)

Considere o caso de dois bens. Sejam

Δx_1 uma variação qualquer no consumo do bem 1; e

Δx_2 a variação no consumo do bem 2 que faz com que, após a variação no consumo do bem 1, o consumidor volte à curva de indiferença anterior a essa variação.

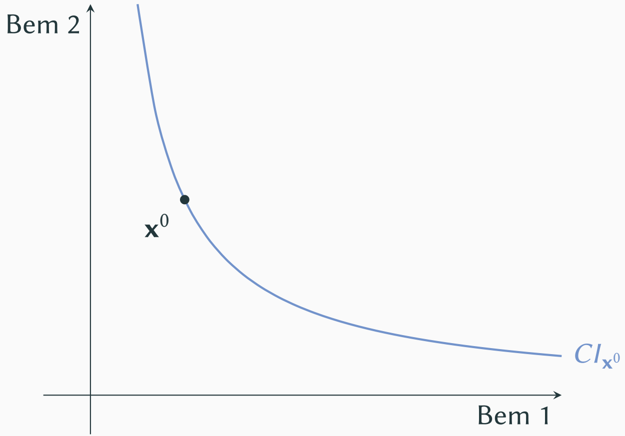
$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ indica a variação média de x_2 por unidade alterada de x_1.

A taxa marginal de substituição é o valor ao qual essa razão converge quando Δx_1 tende a zero:

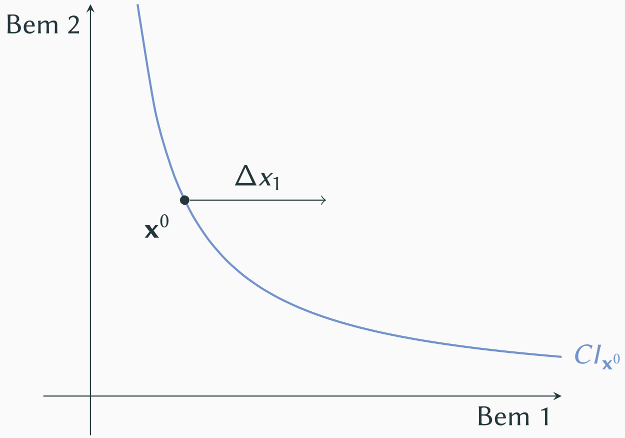
$$TMS = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

quando Δx_2 é calculado para manter o consumidor sobre a mesma curva de indiferença.

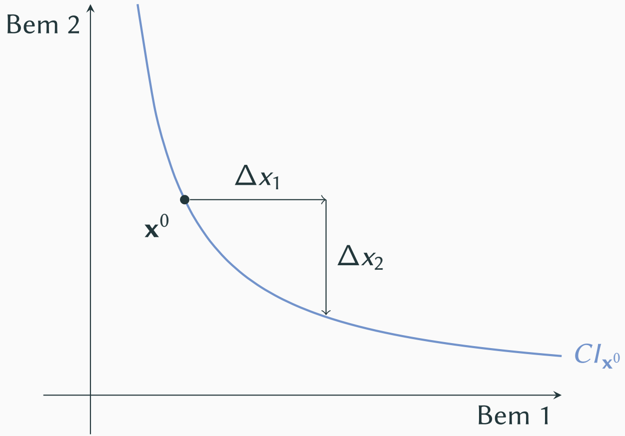
Interpretação gráfica



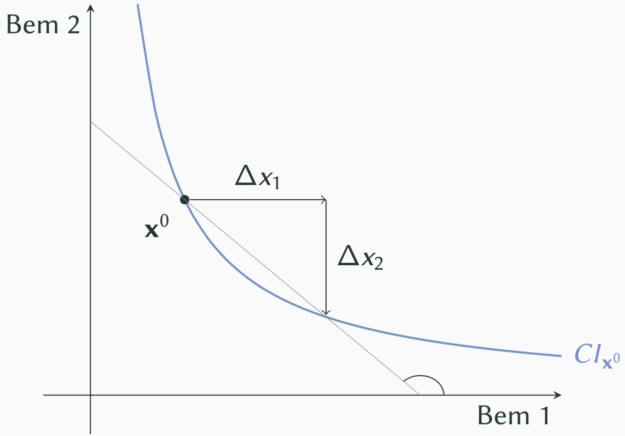
Interpretação gráfica

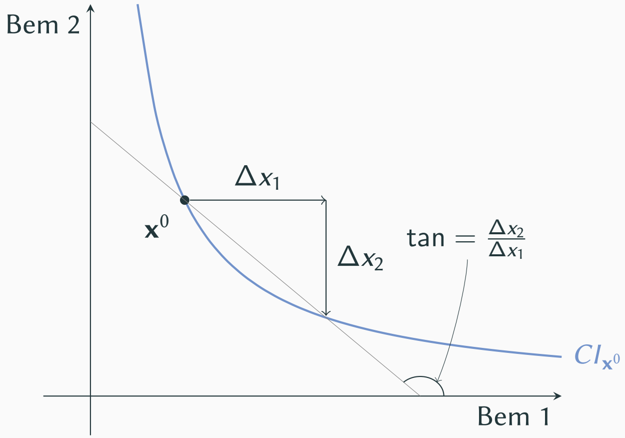


Interpretação gráfica

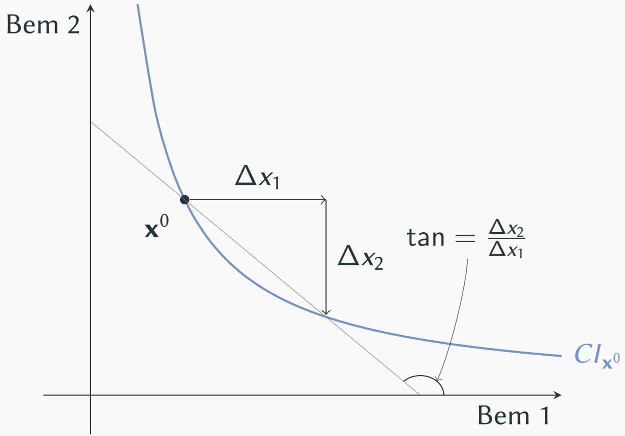


Interpretação gráfica

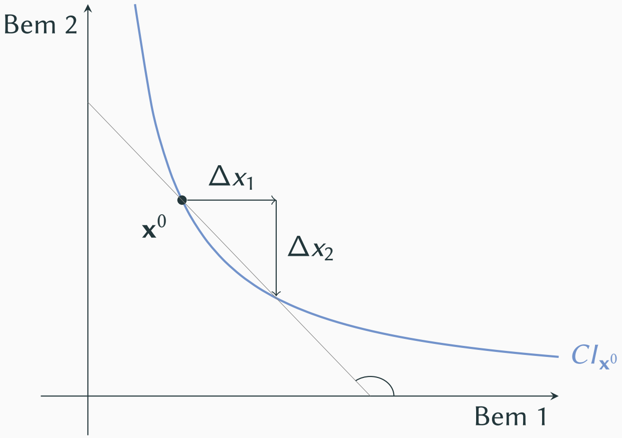



Bem 2
Δx_1
$\mathbf{x}^0$
Δx_2
$\tan = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$
$CI_{\mathbf{x}^0}$
Bem 1

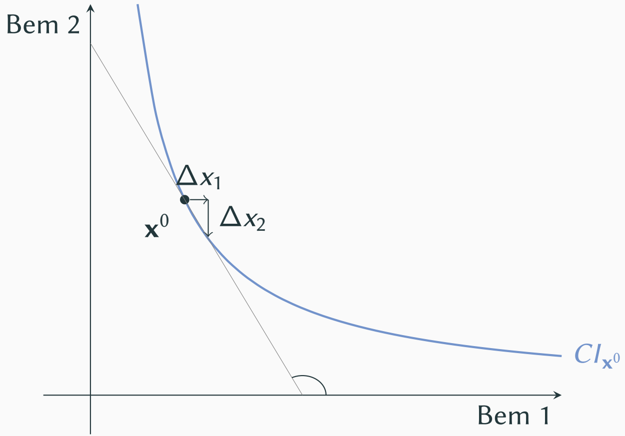
Interpretação gráfica



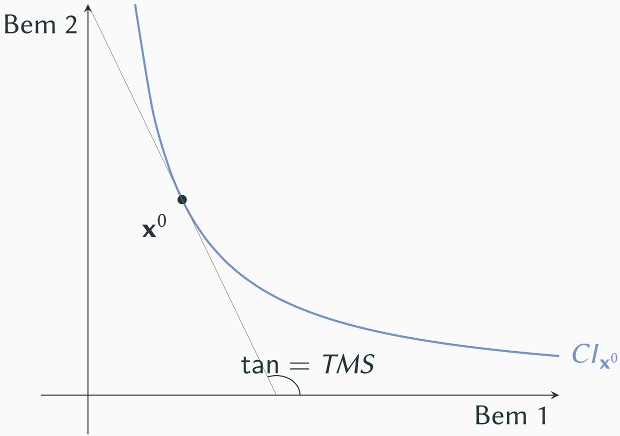
Interpretação gráfica



Interpretação gráfica



Interpretação gráfica



Taxa marginal de substituição e utilidade marginal.

Dada a função de utilidade, a curva de indiferença associada a uma cesta de bens $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_0^2\right) \in \mathbb{X}$ pode ser definida por

$$CI_{\mathbf{x}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{X} : U(x_1, x_2) = U\left(x_1^0, x_2^0\right)\right\}.$$

Tal definição estabelece implicitamente x_2 como função de x_1.

Taxa marginal de substituição e utilidade marginal.

Dada a função de utilidade, a curva de indiferença associada a uma cesta de bens $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_0^2\right) \in \mathbb{X}$ pode ser definida por

$$CI_{\mathbf{x}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{X} : U(x_1, x_2) = U\left(x_1^0, x_2^0\right)\right\}.$$

Tal definição estabelece implicitamente x_2 como função de x_1.

Aplicando o teorema da função implícita,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U\left(x_1^0, x_2^0\right) + \frac{\partial}{\partial x_2} U\left(x_1^0, x_2^0\right) \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

Taxa marginal de substituição e utilidade marginal.

Dada a função de utilidade, a curva de indiferença associada a uma cesta de bens $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_0^2\right) \in \mathbb{X}$ pode ser definida por

$$CI_{\mathbf{x}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{X} : U(x_1, x_2) = U\left(x_1^0, x_2^0\right)\right\}.$$

Tal definição estabelece implicitamente x_2 como função de x_1.

Aplicando o teorema da função implícita,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U\left(x_1^0, x_2^0\right) + \frac{\partial}{\partial x_2} U\left(x_1^0, x_2^0\right) \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$UMg_1\left(x_1^0, x_2^0\right) + UMg_2(x_1^0, x_2^0)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

Taxa marginal de substituição e utilidade marginal.

Dada a função de utilidade, a curva de indiferença associada a uma cesta de bens $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_0^2\right) \in \mathbb{X}$ pode ser definida por

$$CI_{\mathbf{x}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{X} : U(x_1, x_2) = U\left(x_1^0, x_2^0\right)\right\}.$$

Tal definição estabelece implicitamente x_2 como função de x_1.

Aplicando o teorema da função implícita,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U\left(x_1^0, x_2^0\right) + \frac{\partial}{\partial x_2} U\left(x_1^0, x_2^0\right) \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$UMg_1\left(x_1^0, x_2^0\right) + UMg_2(x_1^0, x_2^0)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UMg_1}{UMg_2}$$

Taxa marginal de substituição e utilidade marginal.

Dada a função de utilidade, a curva de indiferença associada a uma cesta de bens $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_0^2\right) \in \mathbb{X}$ pode ser definida por

$$CI_{\mathbf{x}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{X} : U(x_1, x_2) = U\left(x_1^0, x_2^0\right)\right\}.$$

Tal definição estabelece implicitamente x_2 como função de x_1.

Aplicando o teorema da função implícita,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U\left(x_1^0, x_2^0\right) + \frac{\partial}{\partial x_2} U\left(x_1^0, x_2^0\right) \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$UMg_1\left(x_1^0, x_2^0\right) + UMg_2(x_1^0, x_2^0)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UMg_1}{UMg_2}$$

$$TMS = -\frac{UMg_1}{UMg_2}$$

Interpretação

Se o bem 1 é medido em unidades pequenas, a taxa marginal de substituição pode ser interpretada como, aproximadamente, a quantidade máxima do bem 1 da qual a consumidora está disposta a abrir mão para ter uma unidade adicional do bem 1.

Interpretação

Se o bem 1 é medido em unidades pequenas, a taxa marginal de substituição pode ser interpretada como, aproximadamente, a quantidade máxima do bem 1 da qual a consumidora está disposta a abrir mão para ter uma unidade adicional do bem 1.

Alternativamente, ele pode ser interpretada como a quantidade mínima do bem 2 que é preciso dar à consumidora para que ela aceite reduzir seu consumo do bem 1 de uma unidade.

Observações:

Generalizando para o caso de L bens, a taxa marginal de substituição entre os bens i e j é dada por

$$TMS_{i,j} = -\frac{UMg_i}{UMg_j}.$$

Observações:

Generalizando para o caso de L bens, a taxa marginal de substituição entre os bens i e j é dada por

$$TMS_{i,j} = -\frac{UMg_i}{UMg_j}.$$

Muitos autores, por exemplo, Mas-Collel, Whinston e Green (1995), preferem definir a taxa marginal de substituição sem o sinal negativo.

Observações:

Generalizando para o caso de L bens, a taxa marginal de substituição entre os bens i e j é dada por

$$TMS_{i,j} = -\frac{UMg_i}{UMg_j}.$$

Muitos autores, por exemplo, Mas-Collel, Whinston e Green (1995), preferem definir a taxa marginal de substituição sem o sinal negativo.

A unidade na qual a TMS é expressa é unidades do bem 2 por unidades do bem 1.

Observações:

Generalizando para o caso de L bens, a taxa marginal de substituição entre os bens i e j é dada por

$$TMS_{i,j} = -\frac{UMg_i}{UMg_j}.$$

Muitos autores, por exemplo, Mas-Collel, Whinston e Green (1995), preferem definir a taxa marginal de substituição sem o sinal negativo.

A unidade na qual a TMS é expressa é unidades do bem 2 por unidades do bem 1.

A taxa marginal de substituição é uma propriedade ordinal das funções de utilidade — a razão entre as utilidades marginais não é alterada por transformações monotônicas.

Parte III

Convexidade

Preferências convexas

Preferências convexas

Convexidade

As preferências são ditas convexas caso, para quaisquer $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$, então, para qualquer λ tal que $0 < \lambda < 1$,

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \succsim \mathbf{y}.$$

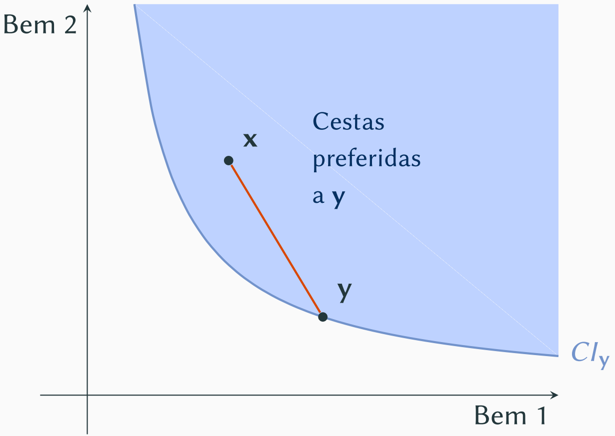
Convexidade estrita

As preferências são ditas estritamente convexas caso, para quaisquer $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$, então, para qualquer λ tal que $0 < \lambda < 1$,

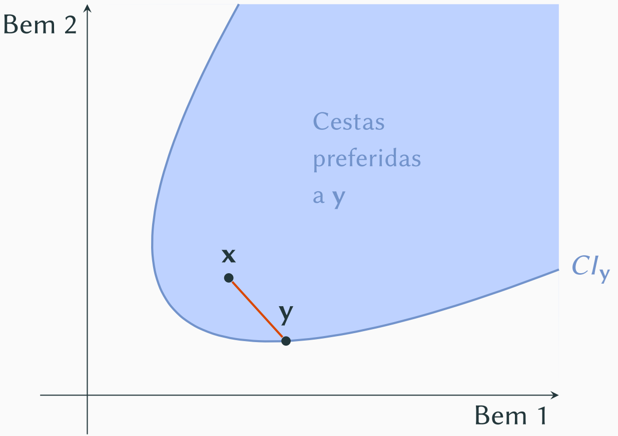
$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}.$$

Toda preferência estritamente convexa é convexa. Nem toda preferência convexa é estritamente convexa.

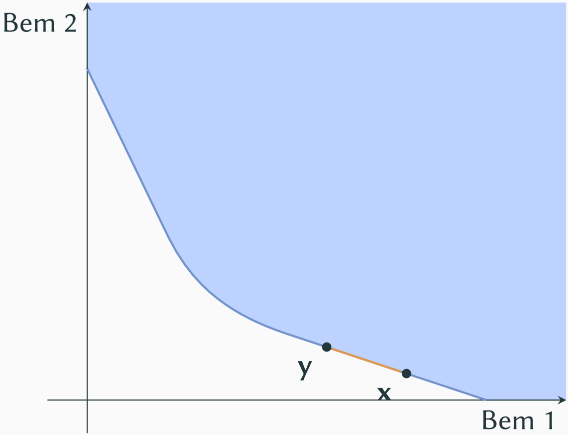
Exemplo de preferências estritamente convexas



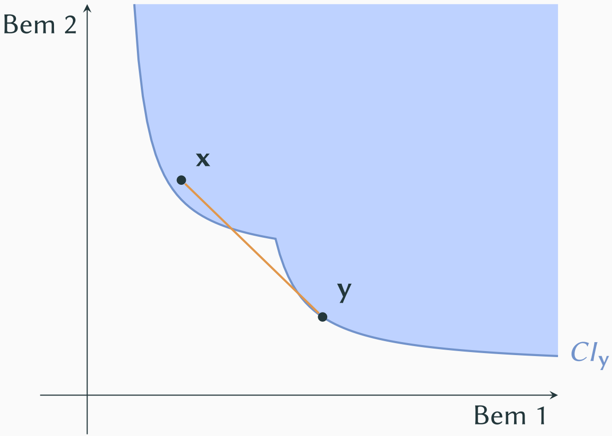
Exemplo de preferências convexas, mas não monotônicas



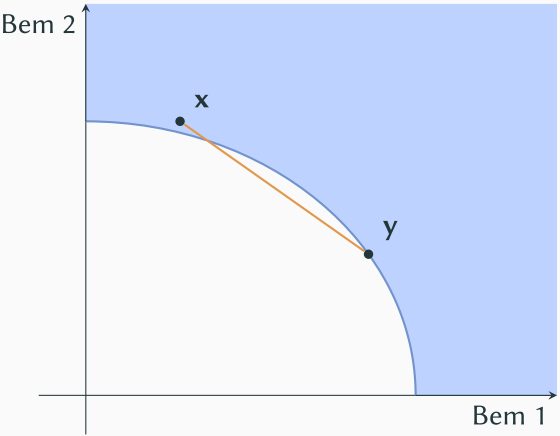
Exemplo: preferências convexas, mas não extritamente convexas



Preferências não convexas

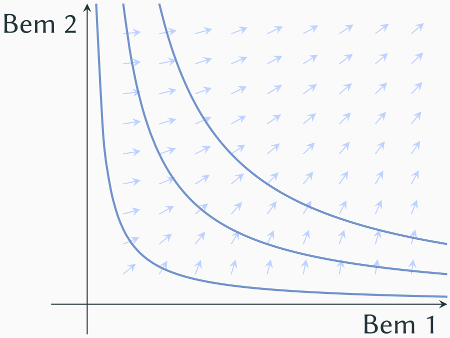


Preferências não convexas



Preferências bem comportadas

Varian (2012) define preferências bem comportadas como preferências (fortemente) monotônicas e convexas. Elas apresentam curvas de indiferença negativamente inclinadas e com $|TMS|$ não crescente da esquerda para a direita.



Hipótese de convexidade

É usual supor que os consumidores apresentem preferências convexas.

Preferências convexas indicam que consumidores gostam de misturar o consumo de diversos bens, o que, em muitas aplicações, é representativo do comportamento efetivo dos consumidores.

Preferências convexas também implicam, como veremos, a continuidade das funções de demanda, o que é conveniente para modelagem.

Parte IV

Casos especiais

Substitutos perfeitos

Complementares perfeitos

Neutros

Males

Preferências quase lineares

Preferências homotéticas

- Preferências Cobb Douglas
- Preferências CES

Substitutos perfeitos

Substitutos perfeitos — o caso de dois bens

Dizemos que dois bens são substitutos perfeitos para uma consumidora caso suas preferências possam ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(x_1,\, x_2) = ax_1 + x_2$$

na qual a é uma constante real positiva, que representa uma $|TMS|$ constante.

Substitutos perfeitos — o caso de dois bens

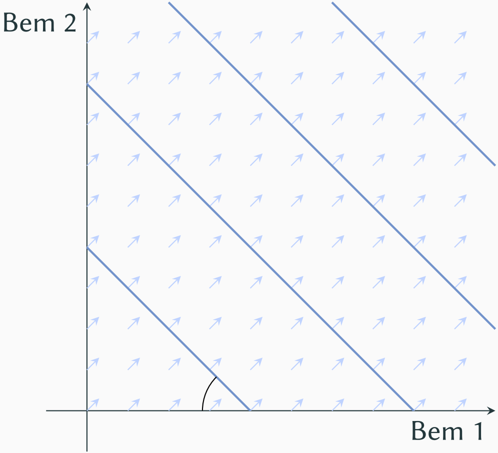
Dizemos que dois bens são substitutos perfeitos para uma consumidora caso suas preferências possam ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(x_1,\, x_2) = ax_1 + x_2$$

na qual a é uma constante real positiva, que representa uma $|TMS|$ constante.

Com a escolha correta das unidades nas quais os dois bens são medidos é possível fazer $a = 1$.

Substitutos perfeitos — representação gráfica



Substitutos perfeitos — o caso geral

Dizemos que dois bens são substitutos perfeitos para um consumidor caso suas preferências possam ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(\mathbf{x}) = f(ax_i + x_j, \hat{\mathbf{x}})$$

na qual $\hat{\mathbf{x}}$ é um vetor formado pelas quantidades dos outros bens, que não i e j, na cesta $\mathbf{x}$ e a é uma constante real positiva, que representa uma $|TMS|$ constante entre os bens i e j.

Substitutos perfeitos — exemplos

Na função de utilidade abaixo os bens 1 e 2 são substitutos na razão de 2 unidades do bem 2 por unidade do bem 1:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(2x_1 + x_2)x_3}.$$

Substitutos perfeitos — exemplos

Na função de utilidade abaixo os bens 1 e 2 são substitutos na razão de 2 unidades do bem 2 por unidade do bem 1:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(2x_1 + x_2)x_3}.$$

Na função de utilidade abaixo os bens 1 e 3 são substitutos na razão de 1 unidade do bem 3 por unidade do bem 1:

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1 + x_3} + \ln(x_2 + 1) + x_4.$$

Complementares perfeitos

Complementares perfeitos — dois bens

Dois bens são ditos complementares perfeitos para uma consumidor caso sua preferências possam ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(x_1, x_2) = \min\{a\, x_1, x_2\}$$

na qual a é uma constante real positiva.

Complementares perfeitos — dois bens

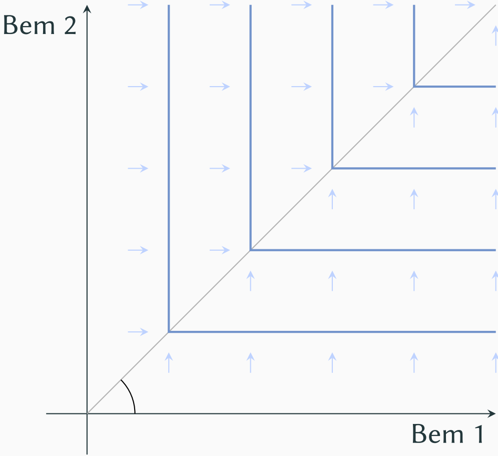
Dois bens são ditos complementares perfeitos para uma consumidor caso sua preferências possam ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(x_1, x_2) = \min\{a\, x_1, x_2\}$$

na qual a é uma constante real positiva.

Interpretação: uma unidade do bem 1 só traz benefício para o consumidor caso seja acompanhada de a unidades do bem 2, ou, *vice-versa*, uma unidade do bem 2 só traz benefício se acompanhada de $1/a$ unidades do bem 1.

Complementares perfeitos – representação gráfica



Complementares perfeitos — o caso geral

Dizemos que dois bens são complementares perfeitos para um consumidor caso suas preferências possam ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(\mathbf{x}) = f\left(\min\left\{ax_i, x_j\right\}, \hat{\mathbf{x}}\right)$$

na qual $\hat{\mathbf{x}}$ é um vetor formado pelas quantidades dos outros bens, que não i e j, na cesta $\mathbf{x}$ e a é uma constante real positiva.

Complementares perfeitos — exemplos

Na função de utilidade abaixo os bens 1 e 2 são complementares na razão de 2 unidades do bem 2 por unidade do bem 1:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\min\left\{2x_1, x_2\right\} x_3}.$$

Complementares perfeitos — exemplos

Na função de utilidade abaixo os bens 1 e 2 são complementares na razão de 2 unidades do bem 2 por unidade do bem 1:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\min\{2x_1, x_2\}\, x_3}.$$

Na função de utilidade abaixo os bens 1 e 3 são complementares na razão de 1 unidade do bem 3 por unidade do bem 1:

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{\min\{x_1, x_3\}} + \ln(x_2 + 1) + x_4.$$

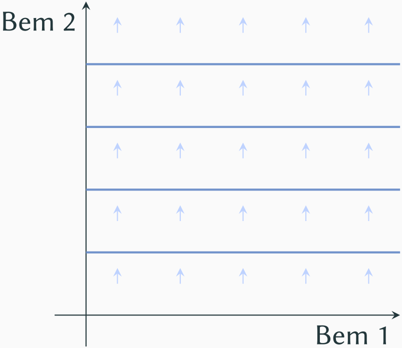
Neutros

Neutros

Um bem é dito um neutro para um consumidor caso, este seja indiferente entre quaisquer duas cestas de bens que contenham quantidades diferentes desse bem e quantidades iguais de todos os outros bens.

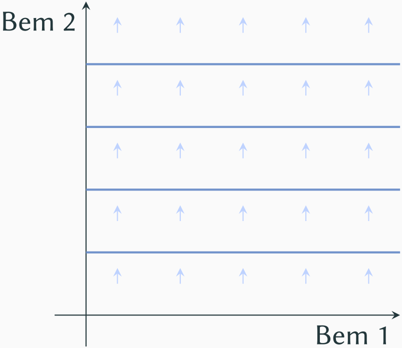
Neutros — representação gráfica

Bem 1 é um neutro

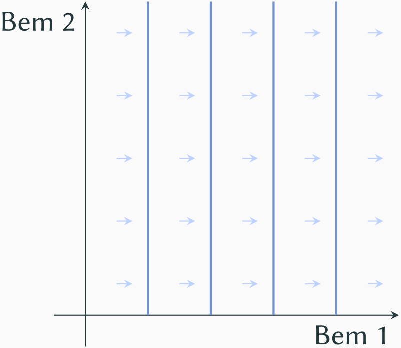


Neutros — representação gráfica

Bem 1 é um neutro



Bem 2 é um neutro



Males

Males

Uma consumidora considera um serviço ou objeto físico, i, um mal caso, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se as duas cestas de bens contém as mesmas quantidade de todos os bens exceto o bem i, então ela prefere a cesta de bens com a menor quantidade do bem i.

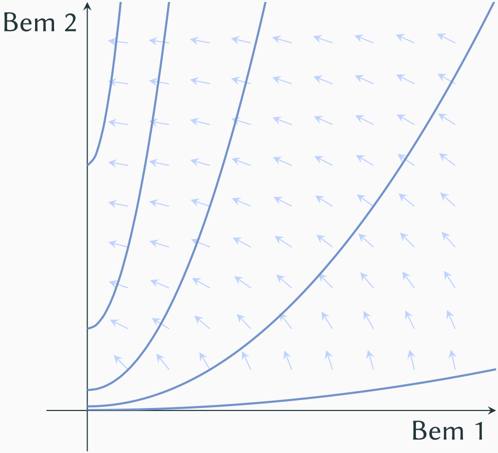
Mais formalmente, o bem i é um mal, quando e apenas quando, para quaisquer cestas $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, se

$$x_j = y_j \text{ para todo } j \neq i,\ j \in \{1, 2, \ldots, L\}$$

então

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ se, e somente se, } x_i \leq y_i$$

Males — representação gráfica



Preferências quase lineares

Preferências quase lineares: definição em termos de função de utilidade

Dizemos que as preferências racionais de um consumidor são quase lineares em relação ao bem i caso elas sejam monotônicas e contínuas e, passíveis de serem representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(\mathbf{x}) = x_i + v(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_L).$$

Preferências quase lineares: definição em termos de preferências

Dizemos que as preferências racionais de um consumidor são quase lineares em relação ao bem i caso elas sejam contínuas e monotônicas no bem i e, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ contidas no conjunto de consumo, tais que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$,

$$(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_L) \succsim (y_1, \ldots, y_i + \Delta x_i, \ldots, y_L)$$

para todo $\Delta x_i \in \mathbb{R}$ para o qual

$$(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_L), \ (y_1, \ldots, y_i + \Delta x_i, \ldots, y_L) \in \mathbb{X}.$$

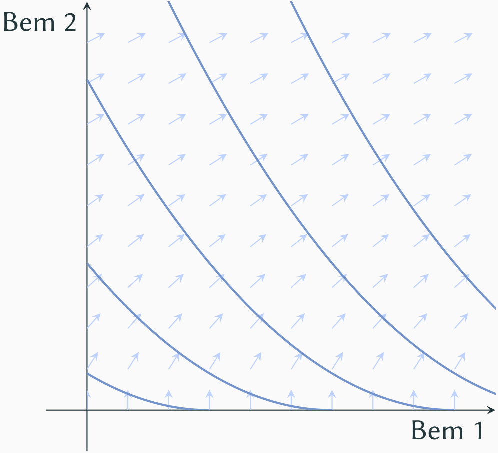
TMS e preferências quase lineares

$$\frac{UMg_i}{UMg_j} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_j} v(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_L)}.$$

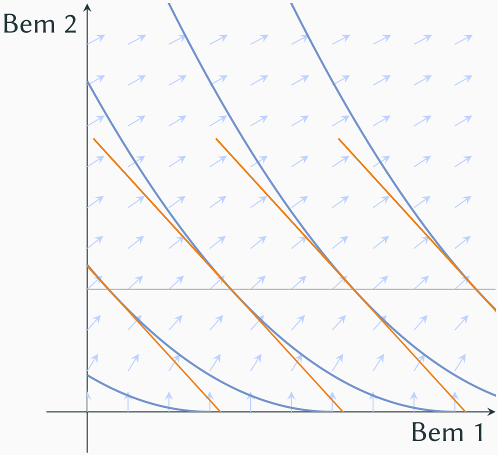
Logo a taxa marginal de substituição entre o bem *i* e o bem *j* não depende da quantidade consumida do bem *i*.

No caso de dois bens, a taxa marginal de substituição dependerá apenas da quantidade consumida do bem no qual as preferências não são lineares.

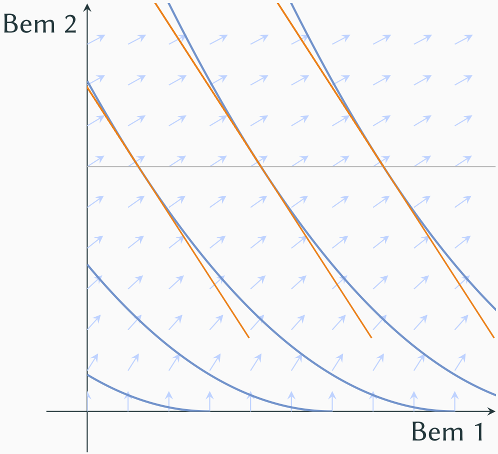
Preferências quase lineares em relação ao bem 1: curvas de indiferença



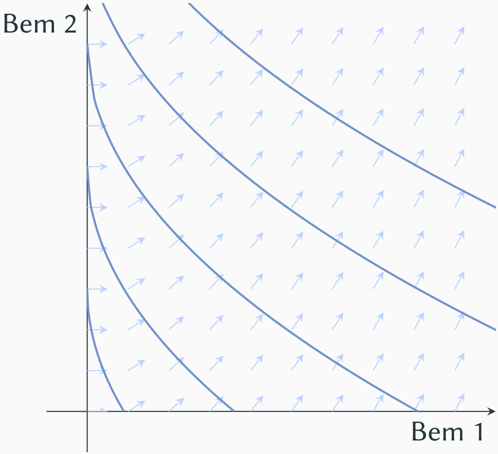
Preferências quase lineares em relação ao bem 1: curvas de indiferença



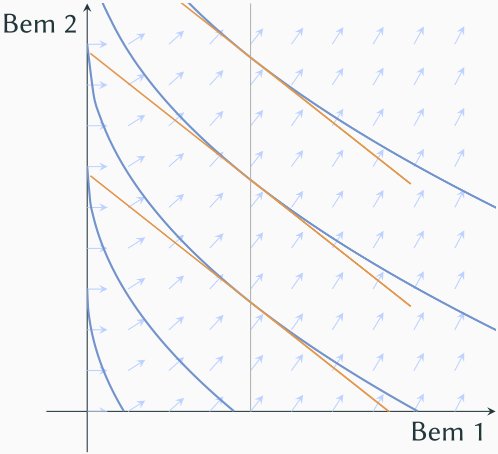
Preferências quase lineares em relação ao bem 1: curvas de indiferença



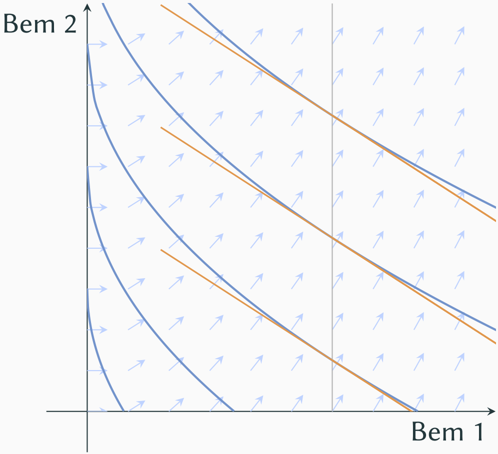
Preferências quase lineares em relação ao bem 2: curvas de indiferença



Preferências quase lineares em relação ao bem 2: curvas de indiferença



Preferências quase lineares em relação ao bem 2: curvas de indiferença



Exemplos

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

Exemplos

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Exemplos

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad UMg_2 = 1$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad UMg_2 = 1 \quad TMS = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad UMg_2 = 1 \quad TMS = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_1$

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

Exemplos

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad UMg_2 = 1 \quad TMS = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_1$

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

$$UMg_1 = 1$$

Exemplos

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad UMg_2 = 1 \quad TMS = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_1$

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

$$UMg_1 = 1 \quad UMg_2 = \frac{1}{\mathbf{x}_2}$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_2$

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2.$$

$$UMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad UMg_2 = 1 \quad TMS = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

Preferências quase lineares em $\mathbf{x}_1$

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

$$UMg_1 = 1 \quad UMg_2 = \frac{1}{\mathbf{x}_2} \quad TMS = -\mathbf{x}_2$$

Preferências homotéticas

Preferências homotéticas

Uma consumidora apresenta preferências homotéticas caso estas sejam contínuas, monotônicas e, para quaisquer duas cestas de bens $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ e qualquer constante real $\lambda > 0$,

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ implica } \lambda\mathbf{x} \succsim \lambda\mathbf{y}.$$

Preferências homotéticas e função de utilidade

As preferências de uma consumidora são homotéticas se, e somente se, elas puderem ser representadas por uma função de utilidade homogênea, ou seja, uma função $U(\mathbf{x})$ tal que, para qualquer valor real $\lambda > 0$,

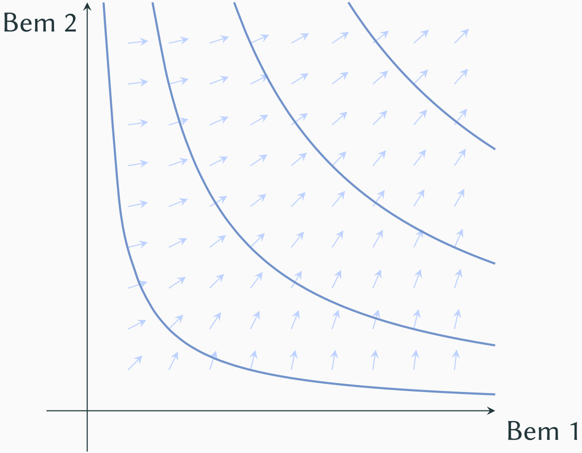
$$U(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k U(\mathbf{x})$$

em que k é uma constante real positiva conhecida como grau de homogeneidade da função. Em particular, toda função homotética pode ser representada por uma função homogênea de grau 1.

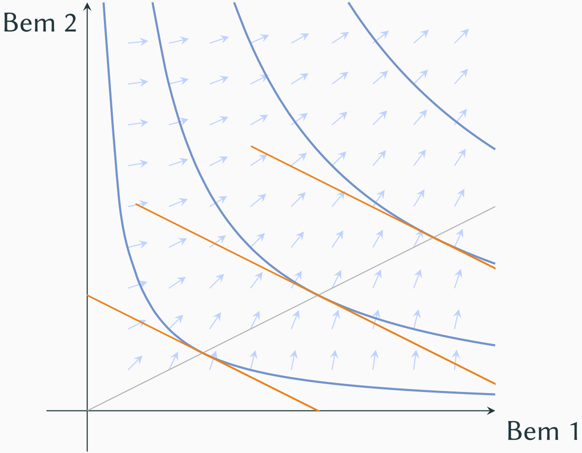
Preferências homotéticas e *TMS*

Se as preferências forem homotéticas, as taxas marginais de substituição dependem apenas dos consumos relativos dos bens, isto é, se o consumo de todos os bens cresce ou diminue na mesma proporção, as *TMS*'s não se alteram.

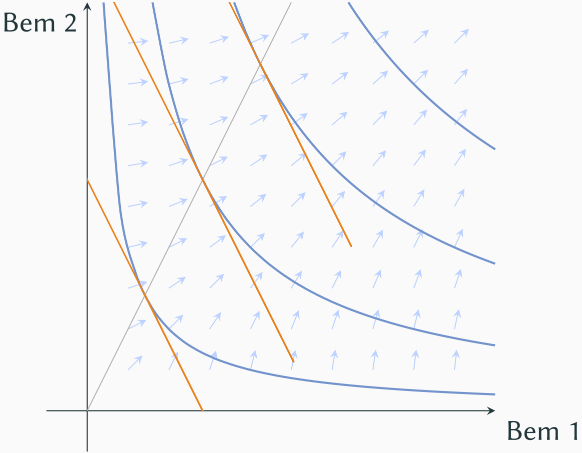
Preferências homotéticas — exemplo gráfico



Preferências homotéticas — exemplo gráfico



Preferências homotéticas — exemplo gráfico



Preferências homotéticas

Preferências Cobb Douglas

Preferências Cobb Douglas — 2 bens

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, \ a, b > 0$$

Preferências Cobb Douglas — 2 bens

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b,\ a, b > 0$$

$$UMg_1 = a x_1^{a-1} x_2^b$$

Preferências Cobb Douglas — 2 bens

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, \; a, b > 0$$

$$UMg_1 = a x_1^{a-1} x_2^b \quad UMg_2 = b x_1^a x_2^{b-1}$$

Preferências Cobb Douglas — 2 bens

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b,\ a, b > 0$$

$$UMg_1 = a x_1^{a-1} x_2^b \quad UMg_2 = b x_1^a x_2^{b-1} \quad TMS = -\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}.$$

Preferências Cobb Douglas — 2 bens

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, \; a, b > 0$$

$$UMg_1 = a x_1^{a-1} x_2^b \quad UMg_2 = b x_1^a x_2^{b-1} \quad TMS = -\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}.$$

Representações alternativas:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \text{ em que } \alpha = \frac{a}{a+b}.$$

Preferências Cobb Douglas — 2 bens

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, \; a, b > 0$$

$$UMg_1 = a x_1^{a-1} x_2^b \quad UMg_2 = b x_1^a x_2^{b-1} \quad TMS = -\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}.$$

Representações alternativas:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \text{ em que } \alpha = \frac{a}{a+b}.$$

$$U(x_1, x_2) = a \ln x_1 + b \ln x_2.$$

Preferências Cobb Douglas — L bens

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{L} x_i^{a_i}$$

com $a_i > 0$.

Preferências Cobb Douglas — L bens

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{L} x_i^{a_i}$$

com $a_i > 0$.

$$UMg_i = a_i \frac{\prod_{j=1}^{L} x_j^{a_j}}{x_i}$$

Preferências Cobb Douglas — L bens

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{L} x_i^{a_i}$$

com $a_i > 0$.

$$UMg_i = a_i \frac{\prod_{j=1}^{L} x_j^{a_j}}{x_i}$$

$$TMS_{i,k} = -\frac{a}{b}\frac{x_k}{x_i}.$$

Preferências homotéticas

Preferências CES

Preferências CES — dois bens

$$U(x_1, x_2) = [ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e a são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $0 < a < 1$.

Preferências CES — dois bens

$$U(x_1, x_2) = [ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e a são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $0 < a < 1$.

$$UMg_1 = \frac{a}{x_1^{1-\rho}}\left[ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

Preferências CES — dois bens

$$U(x_1, x_2) = [ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e a são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $0 < a < 1$.

$$UMg_1 = \frac{a}{x_1^{1-\rho}} [ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$UMg_2 = \frac{1-a}{x_2^{1-\rho}} [ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

Preferências CES — dois bens

$$U(x_1, x_2) = [ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e a são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $0 < a < 1$.

$$UMg_1 = \frac{a}{x_1^{1-\rho}}\,[ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$UMg_2 = \frac{1-a}{x_2^{1-\rho}}\,[ax_1^\rho + (1-a)x_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$TMS = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

Preferências CES — L bens

$$U(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^{L} a_i x_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e $a_1, \ldots, a_L$ são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $a_1, \ldots, a_L > 0$.

Preferências CES — L bens

$$U(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^{L} a_i x_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e $a_1, \ldots, a_L$ são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $a_1, \ldots, a_L > 0$.

$$UMg_j = \frac{a_j}{x_j^{1-\rho}} \left[\sum_{i=1}^{L} a_i x_i^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

Preferências CES — L bens

$$U(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^{L} a_i x_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

em que ρ e $a_1, \ldots, a_L$ são constantes reais tais que $\rho \neq 0$ e $a_1, \ldots, a_L > 0$.

$$UMg_j = \frac{a_j}{x_j^{1-\rho}} \left[\sum_{i=1}^{L} a_i x_i^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$TMS_{i,k} = -\frac{a_i}{a_k}\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{1-\rho}$$

Preferências CES e Cobb-Douglas

$$\lim_{\rho \to 0} \left[a x_1^{\rho} + (1-a) x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} = x_1^{a} x_2^{1-a}$$

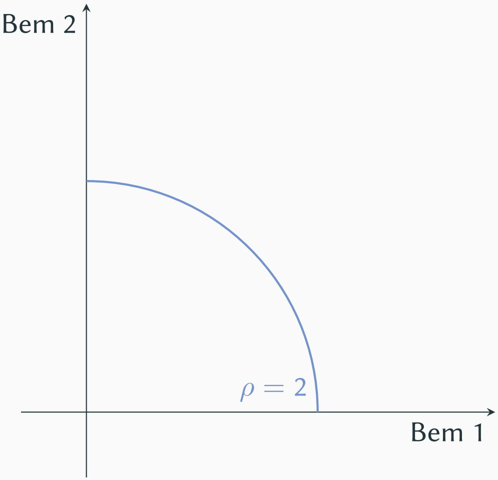
Preferências CES e Cobb-Douglas

$$\lim_{\rho \to 0} [a x_1^\rho + (1-a) x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}} = x_1^a x_2^{1-a}$$

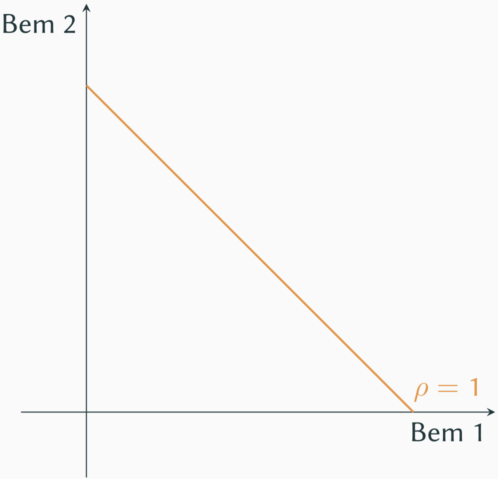
Por essa razão, as preferências CES são muitas vezes definidas de modo a contemplar como caso especial as preferências Cobb-Douglas:

$$U(x_1, x_2) = \begin{cases} [a x_1^\rho + (1-a) x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}} & \text{caso } \rho \neq 0 \\ x_1^a x_2^{1-a} & \text{caso } \rho = 0 \end{cases}.$$

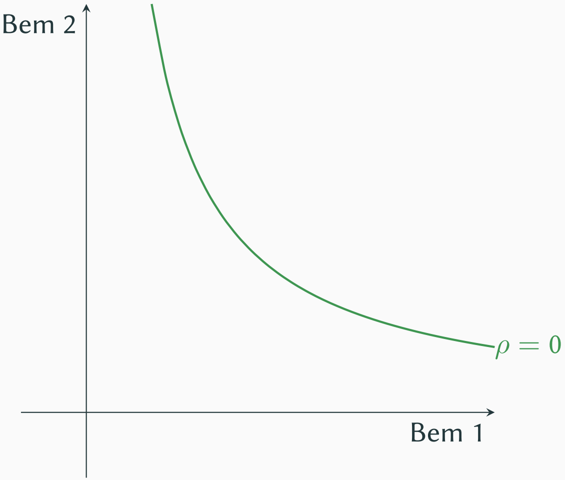
Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ



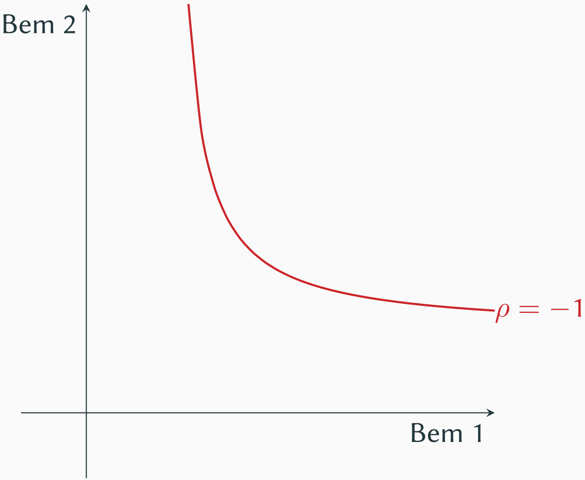
Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ



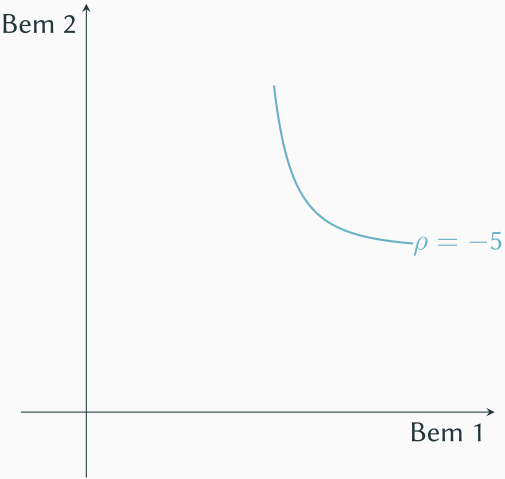
Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ



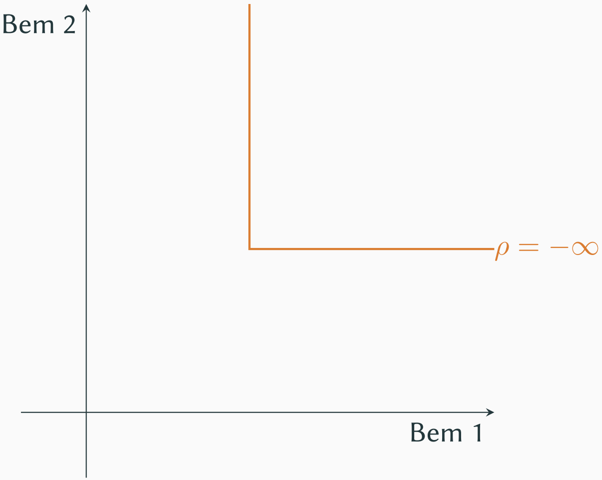
Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ



Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ



Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ



Preferências CES — curvas de indiferença para diversos valores de ρ