Equilíbrio Geral

Roberto Guena de Oliveira

1 de dezembro de 2009

Parte I

Modelo de Troca

Sumário

Hipóteses e notações

- Há apenas dois consumidores: o consumidor A e o consumidor B.
- Há apenas dois bens: o bem 1 e o bem 2.
- As quantidades inicialmente existentes dos bens 1 e 2 na economia, também chamadas dotações iniciais da economia desses bens, serão consideradas fixas e notadas por ω_1 e ω_2, respectivamente.
- As dotações iniciais são totalmente distribuídas entre os dois consumidores. Notaremos por ω_i^J a parte da dotação inicial do bem i ($i = 1, 2$) possuída pelo consumidor J ($J = A, B$). Assim, temos

$$\omega_1 = \omega_1^A + \omega_1^B \quad \text{e} \quad \omega_2 = \omega_2^A + \omega_2^B$$

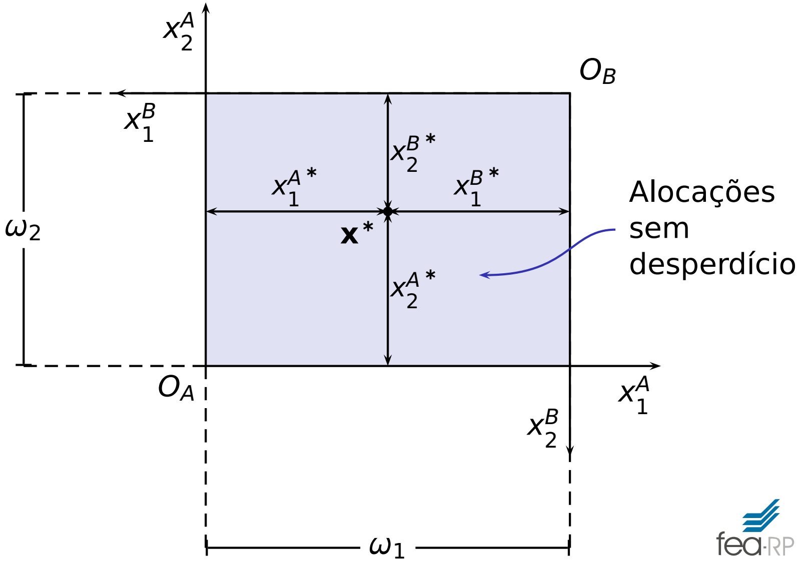
Definições

- Uma alocação econômica do consumo $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ é uma especificação do consumo de cada bem por parte de cada consumidor na qual x_i^J ($i = 1, 2$ e $J = A, B$) representa o consumo do bem i por parte do consumidor J.
- Uma alocação econômica do consumo é dita *factível* no modelo de troca caso tenhamos

$$x_1^A + x_1^B \leq \omega_1 \quad \text{e} \quad x_2^A + x_2^B \leq \omega_2$$

- Uma alocação factível para a qual as condições acima se verificam com igualdade, é chamada alocação sem desperdício.

A caixa de Edgeworth



Sumário

Critério de Pareto

Definição

Diz-se que uma alocação de consumo factível $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^2)$ é Pareto superior a outra alocação de consumo factível $(y_1^A, y_2^A, y_1^B, y_2^2)$ caso (notando por $\succsim_A$ e $\succsim_B$ as relações de preferência dos consumidores A e B, respectivamente) tenhamos

$$(x_1^A, x_2^A) \succsim_A (y_1^A, y_2^A) \quad \text{e} \quad (x_1^B, x_2^B) \succsim_B (y_1^B, y_2^B)$$

com

$$(x_1^A, x_2^A) \succ_A (y_1^A, y_2^A) \quad \text{e/ ou} \quad (x_1^B, x_2^B) \succ_B (y_1^B, y_2^B)$$

Eficiência de Pareto

Definição

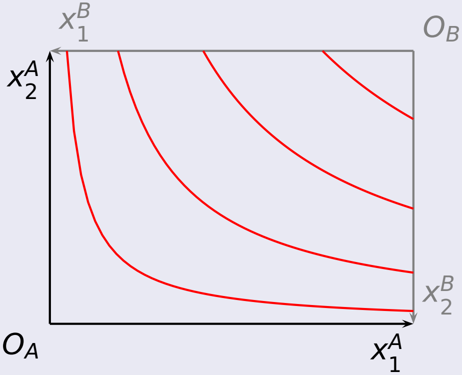
Uma alocação de consumo factível é dita Pareto eficiente caso não haja qualquer outra alocação de consumo factível que lhe seja Pareto superior.

Definição

O conjunto de todas as alocações eficientes de uma economia é chamado conjunto de Pareto ou curva de contrato.

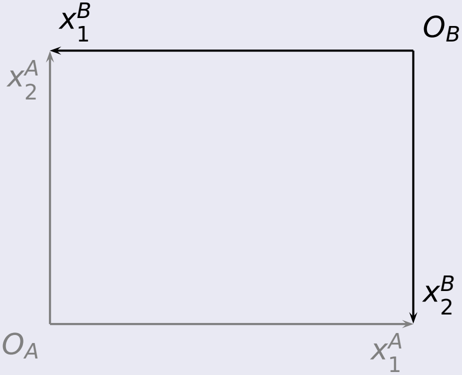
Preferências na caixa de Edgeworth

Consumidor A



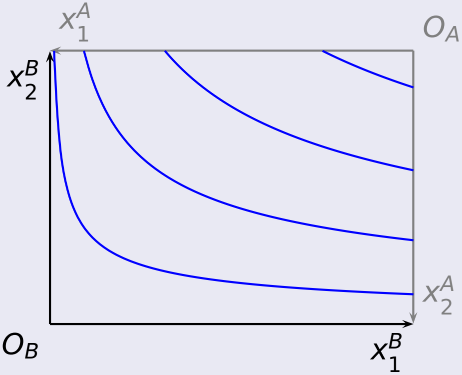
Preferências na caixa de Edgeworth

Consumidor B



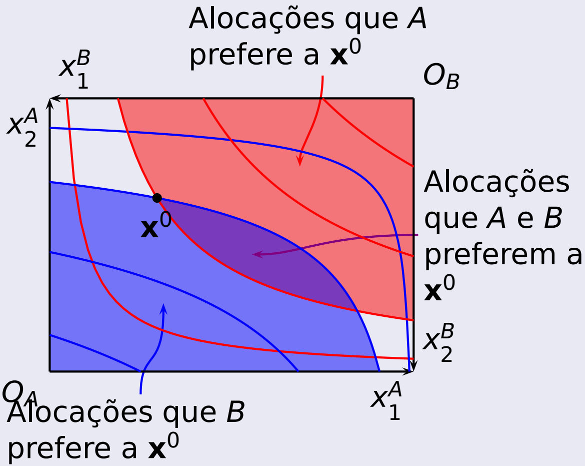
Preferências na caixa de Edgeworth

Consumidor B



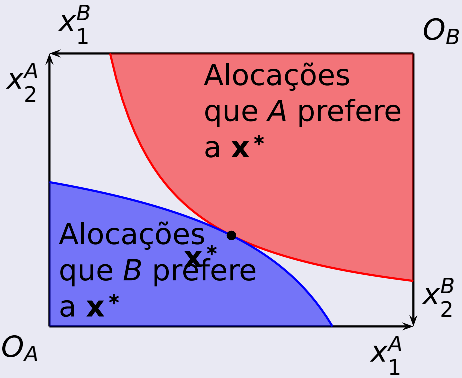
Análise de eficiência

Uma alocação ineficiente



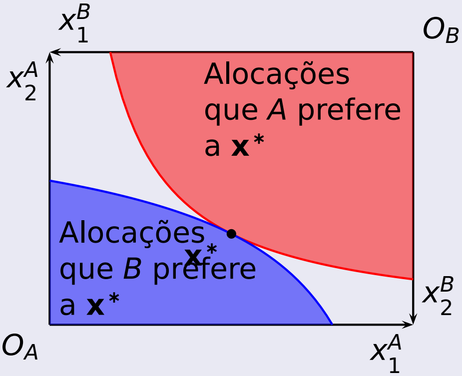
Análise de eficiência

Uma alocação eficiente



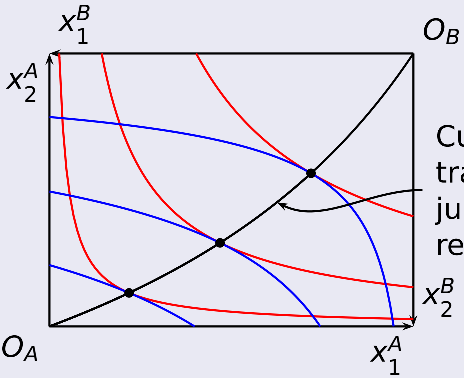
Análise de eficiência

Uma alocação eficiente



Análise de eficiência

O conjunto de Pareto



Curva de contrato ou conjunto de Pareto

Sumário

Demanda bruta

As demandas brutas pelos bens 1 e 2 por parte dos consumidores A e B são, respectivamente

$$x_1^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) \quad , \quad x_2^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A)$$
$$x_1^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) \quad \text{e} \quad x_2^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B)$$

Demandas líquidas

As demandas líquidas ou os excessos de demanda pelos bens 1 e 2 por parte dos consumidores A e B são, respectivamente

$$
\begin{aligned}
e_1^A(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A) &= x_1^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) - \omega_1^A \\
e_2^A(p_1, p_2, \omega_1^A, \omega_2^A) &= x_2^A(p_1, p_2, p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A) - \omega_2^A \\
e_1^B(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B) &= x_1^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) - \omega_1^B \\
e_2^B(p_1, p_2, \omega_1^B, \omega_2^B) &= x_2^B(p_1, p_2, p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B) - \omega_2^B
\end{aligned}
$$

Observação

Para simplificar a notação, omitiremos as dotações iniciais dos argumentos das funções de demanda e de excesso de demanda, visto que suporemos que essas dotações permanecerão inalteradas.

Excessos de demanda agregados

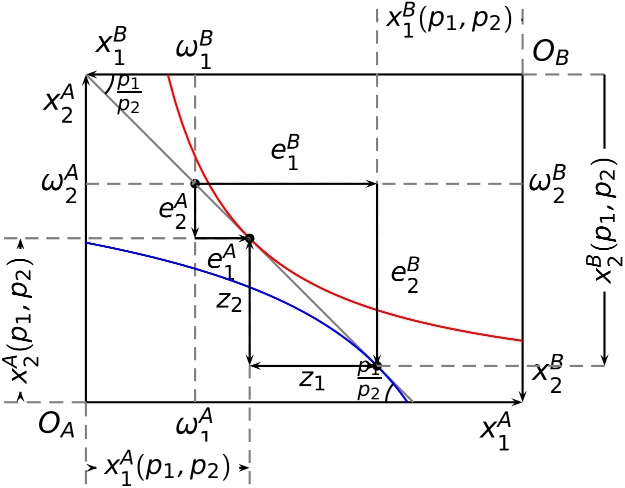
Os excessos de demanda agregados pelos bens 1 e 2 são dados pelas funções

$$\begin{aligned} z_1(p_1, p_2) &= e_1^A(p_1, p_2) + e_1^B(p_1, p_2) \\ &= x_1^A(p_1, p_2) + x_1^B(p_1, p_2) - \omega_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2(p_1, p_2) &= e_2^A(p_1, p_2) + e_2^B(p_1, p_2) \\ &= x_2^A(p_1, p_2) + x_2^B(p_1, p_2) - \omega_2 \end{aligned}$$

Demandas na caixa de Edgeworth



Lei de Walras

Enunciado

Caso os consumidores apresentem preferências monotônicas, então, para quaisquer $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, teremos

$$p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0$$

Lei de Walras

Prova

Da hipótese de monotonicidade das preferências sabemos que

$$p_1x_1^A(p_1,p_2)+p_2x_2^A(p_1,p_2)=p_1\omega_1^A+p_2\omega_2^A \quad \text{e}$$
$$p_1x_1^B(p_1,p_2)+p_2x_2^B(p_1,p_2)=p_1\omega_1^B+p_2\omega_2^B$$

O que equivale a

$$p_1e_1^A(p_1,p_2)+p_2e_2^A(p_1,p_2)=0 \quad \text{e}$$
$$p_1e_1^B(p_1,p_2)+p_2e_2^B(p_1,p_2)=0$$

Somando as duas igualdades, obtemos

$$p_1(e_1^A(p_1,p_2)+e_1^B(p_1,p_2)) + p_2(e_2^A(p_1,p_2)+e_2^B(p_1,p_2))=0$$
$$\Rightarrow p_1z_1(p_1,p_2)+p_2z_2(p_1,p_2)=0$$

Equilíbrio

Definição

Diz-se que uma economia de trocas encontra-se em equilíbrio geral quando, para cada bem dessa economia, a demanda bruta total é igual à dotação inicial. Ou, equivalentemente, no caso de uma economia com 2 consumidores e 2 bens,

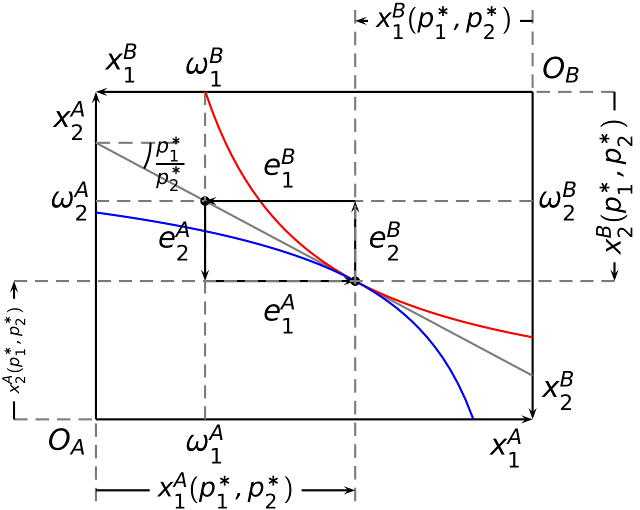
$$\text{condição 1:} \begin{cases} x_1^A(p_1, p_2) + x_1^B(p_1, p_2) = \omega_1^A + \omega_1^B \\ x_2^A(p_1, p_2) + x_2^B(p_1, p_2) = \omega_2^A + \omega_2^B \end{cases}$$

$$\text{condição 2:} \begin{cases} e_1^A(p_1, p_2) + e_1^B(p_1, p_2) = 0 \\ e_2^A(p_1, p_2) + e_2^B(p_1, p_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{condição 3:} \begin{cases} z_1(p_1, p_2) = 0 \\ z_2(p_1, p_2) = 0 \end{cases}$$

Os preços p_1 e p_2 que garantem as condições acima são chamados preços de equilíbrio.

Equilíbrio na caixa de Edgeworth



Observação

- Como as funções de demanda são homogêneas de grau zero em relação aos preços temos que, caso as condições de equilíbrio sejam obtidas aos preços p_1^* e p_2^*, elas também serão obtidas aos preços αp_1^* e αp_2^* para qualquer $\alpha > 0$.
- Em particular, pode ser interessante tomar $\alpha = \frac{1}{p_2^*}$, de modo a expressar os preços em termos do preço relativo do bem 1 em relação ao bem 2.
- Da lei de Walras segue que o sistema de equações formados pelas condições de equilíbrio possue um grau de indeterminação, pois uma das equações é uma combinação linear das outras. Desse modo, se $n-1$ mercados estão em equilíbrio, o $n-$ésimo mercado também estará.

Exemplo:

Considere um modelo de equilíbrio geral de trocas puras com dois indivíduos: A e B, e dois bens: x e y. São dotações iniciais de A: $x = 10$ e $y = 2,5$; e dotações iniciais de B: $x = 10$ e $y = 20$. As funções utilidade de A e B são: $U_A(x,y) = 2x^{0,2}y^{0,3}$ e $U_B(x,y) = 3x^{0,5}y^{4,5}$, respectivamente. Se fixarmos o preço do bem x em 1 unidade monetária, qual será o preço do bem y no equilíbrio competitivo?

Solução:

As funções de demanda pelo bem x são[1]

$$x_A(1,p) = \frac{2}{5}(10 + 2.5p) \quad \text{e} \quad x_B(1,p) = \frac{1}{10}(10 + 20p)$$

A condição de equilíbrio no mercado do bem x é.

$$x_A(1,p) + x_B(1,p) = 20$$
$$\Rightarrow \frac{2}{5}(10 + 2.5p) + \frac{1}{10}(10 + 20p) = 20$$

Resolvendo para p obtemos

$$p = 5$$

[1] Lembre-se da fórmula para a função de demanda para uma utilidade Cobb-Douglas

Solução (b):

Pela identidade de Walras, sabemos que, se o mercado do bem x está em equilíbrio quando o preço relativo do bem y é 2, o mercado do bem y também deve estar em equilíbrio. Apenas para checar, verifiquemos a condição de equilíbrio nesse mercado:

$$\underbrace{\frac{3}{5}\frac{10+2,5p}{p}}_{y_A(1,p)}+\underbrace{\frac{9}{10}\frac{10+20p}{p}}_{y_B(1,p)}=20$$

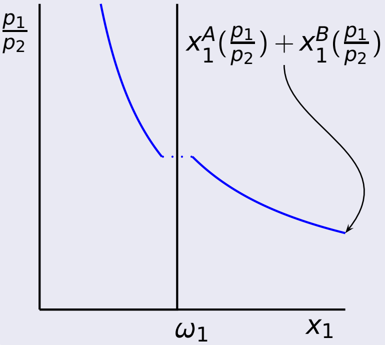
Resolvendo essa equação para p, obtemos

$$p=5$$

Existência do equilíbrio

A importância de demandas contínuas

Um caso de ausência de equilíbrio



Hipóteses que garantem continuidade da demanda

- As preferências são convexas
- Os consumidores são infinitamente pequenos e diferenciados.

Os teoremas do bem-estar social

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Todo o equilíbrio geral competitivo é eficiente no sentido de Pareto.

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Desde que as preferências sejam convexas, toda alocação eficiente é uma alocação de equilíbrio para uma redistribuição adequada das dotações iniciais.

Sumário

Monopólio ordinário

Regras do jogo

Suponha que a dotação de consumo da economia seja definida através do seguinte jogo

1. O consumidor A propõem um preço relativo $p = p_1/p_2$.
2. O consumidor B define suas demandas respeitando sua dotação inicial e o preço relativo anunciado.
3. O consumidor A realiza trocas de modo a satisfazer as demandas definidas por B.

A reação de B

A função de reação de B é simplesmente o par de suas funções de demanda $(x_1^B(p), x_2^B(p))$

Monopólio ordinário

Preço do monopolista

A deve escolher p de modo a maximizar

$$U^A(x_1^A, x_2^A)$$

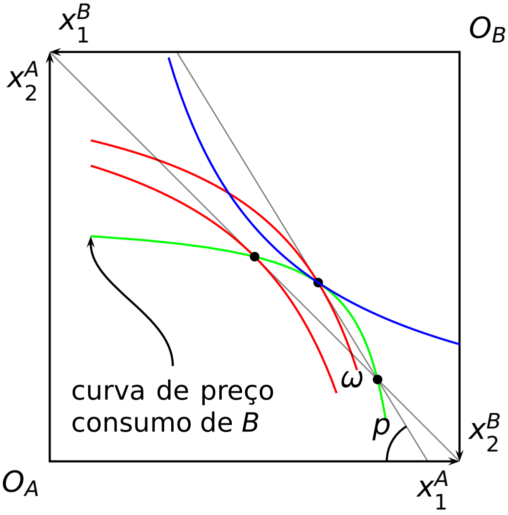
sabendo que

$$x_1^A = \omega_1 - x_1^B(p) \quad \text{e} \quad x_2^A = \omega_2 - x_2^B(p)$$

Substituindo essa restrição na função objetivo e igualando a primeira derivada a zero, encontramos a seguinte condição de ótimo:

$$\underbrace{\boxed{\frac{UMg_1^A}{UMg_2^A}}}_{|TMS_A|} = -\underbrace{\boxed{\frac{\frac{dx_2^B(p)}{dp}}{\frac{dx_1^B(p)}{dp}}}}_{\text{inclinação da curva de preço consumo}}$$

Monopolista ordinário
Solução gráfica



Monopolista ordinário

Exemplo

- $\omega_1^A = 8$, $\omega_2^A = 2$, $\omega_1^B = 2$,$\omega_2^B = 8$
- $U^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A x_2^A$, $U^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B x_2^B$

Qual o preço de monopólio?

Resposta:

$$\frac{p_1}{p_2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Discriminação perfeita na caixa de Edgeworth

Suponha agora que as regras para a definição da alocação de consumo sejam

1. O consumidor A propõem uma alocação factível.
2. O consumidor B aceita ou rejeita essa alocação.
3. Se B rejeita a alocação proposta por A, a alocação final de consumo será igual à distribuição das dotações iniciais.
4. Se B aceita, a alocação final de consumo será a alocação proposta por A.

Discriminação perfeita

Solução

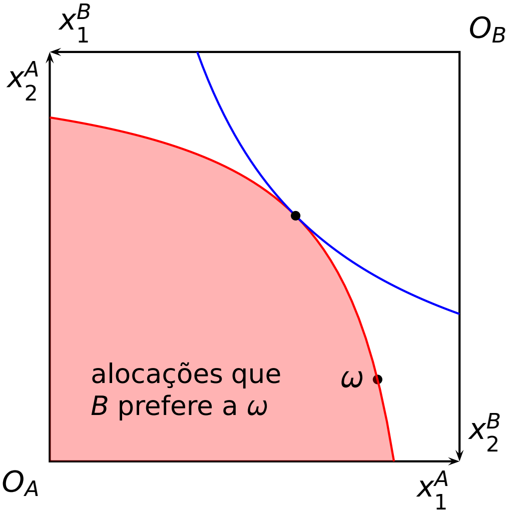
1. B deve aceitar uma alocação $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ desde que

$$U^B(x_1^B, x_2^B) \geq U^B(\omega_1^B, \omega_2^B) \tag{1}$$

2. Com conseqüência, A deve propor uma alocação $(\omega_1 - x_1^B, \omega_2 - x_2^B, x_1^B, x_2^B)$ que maximize sua função de utilidade $U(\omega_1 - x_1^B)$ dada a restrição 1.
3. A condição de máximo de primeira orgem requer que

$$\frac{UMg_1^A}{UMg_2^A} = \frac{UMg_1^B}{UMg_2^B}$$

Discriminação perfeita
Solução gráfica



Discriminação perfeita
Exemplo

- $\omega_1^A = 8$, $\omega_2^A = 2$, $\omega_1^B = 2$,$\omega_2^B = 8$
- $U^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A x_2^A$, $U^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B x_2^B$

Qual a alocação de equilíbrio quando A é discriminador perfeito?

Resposta:

$$x_1^A = 6, x_2^A = 6, x_1^B = 4, x_2^B = 4$$

Parte II

Modelo com produção

Sumário

Primeiro modelo

Robinson Crusoé perdido em uma ilha

- Um consumidor
- Dois bens: lazer e coco.
- Função de produção de cocos: $c = f(h)$, h é o número de horas trabalhadas.
- Função de produção de lazer: $\ell = H - h$, H é o número de horas disponíveis.
- Função de utilidade: $U(c, \ell)$

Escolha ótima

O problema

Escolher ℓ e c de modo a maximizar

$$U(\ell, c)$$

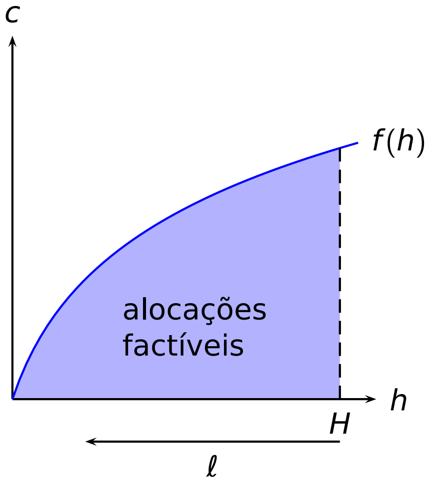
dadas as restrições

$$\ell + h = H \qquad \text{e} \qquad c \leq f(h)$$

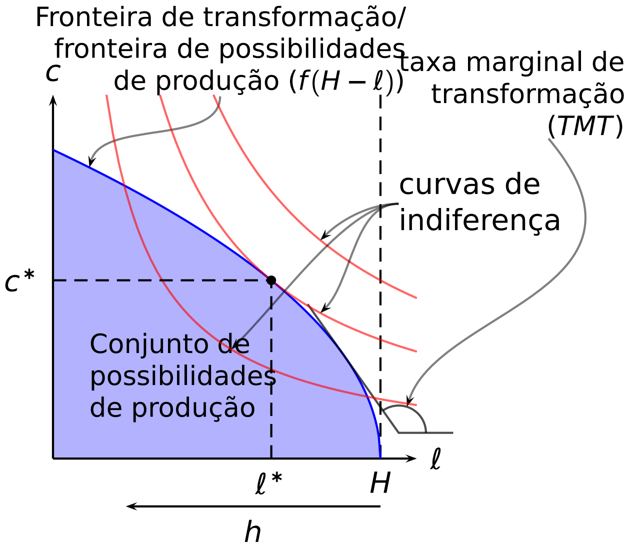
Condição de 1ª ordem

$$\frac{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial \ell}}{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial c}} = f'(h) \Rightarrow |TMS| = PMg(h)$$

Solução gráfica – I



Solução gráfica – II



Mercado

A dupla personalidade de Robinson Crusoé

- Um consumidor tomador de preços.
- Uma firma maximizadora de lucros e tomadora de preços que compra trabalho do consumidor e repassa seu lucro ao seu único proprietário, o consumidor.
- w é o preço do trabalho em cocos

Comportamento da firma

A firma deve escolher um nível de produção/ contratação de trabalho (h) que maximize o seu lucro:

$$\pi = f(h) - wh$$

A condição um ponto de lucro máximo com $h > 0$ será caracterizado por

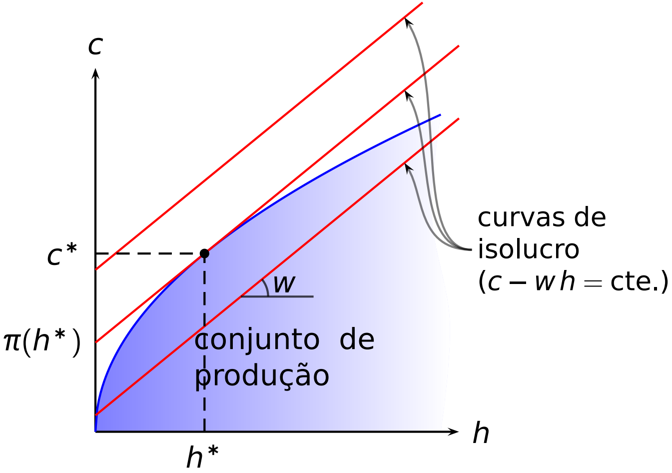
Condição de 1ª ordem: $f'(h) = w$ ou seja $PMg(h) = w$.

Condição de 2ª ordem: $f''(h) < 0$, ou seja o produto marginal é decrescente.

lucro da firma: $\pi = f(h^*) - wh^*$, sendo h^* o valor de h^* que satisfaz as condições acima.

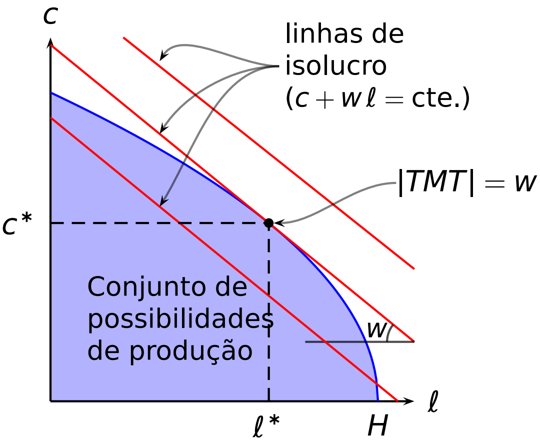
Equilíbrio da firma

Solução gráfica – I



Equilíbrio da firma

Solução gráfica – II



Demanda do consumidor

O problema do consumidor é maximizar $U(c,\ell)$ Dadas as restrições

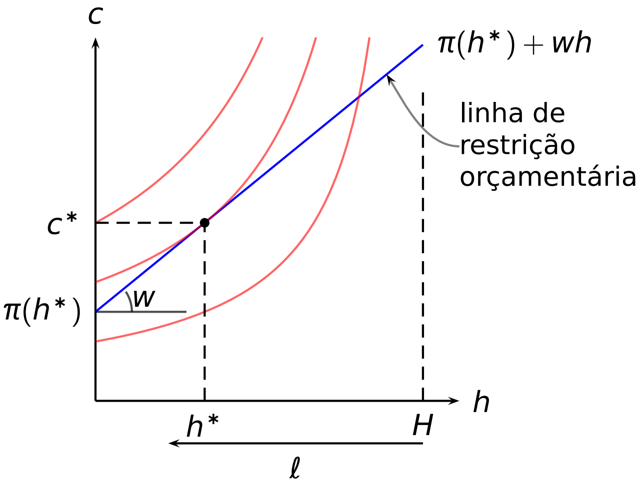
$$c = wh + \pi(h^*) \quad \text{e} \quad \ell = H - h$$

Caso as preferências sejam monotônicas e a solução implique $h, \ell > 0$, então, ela deve satisfazer

$$\frac{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial \ell}}{\frac{\partial U(c,\ell)}{\partial c}} = w$$

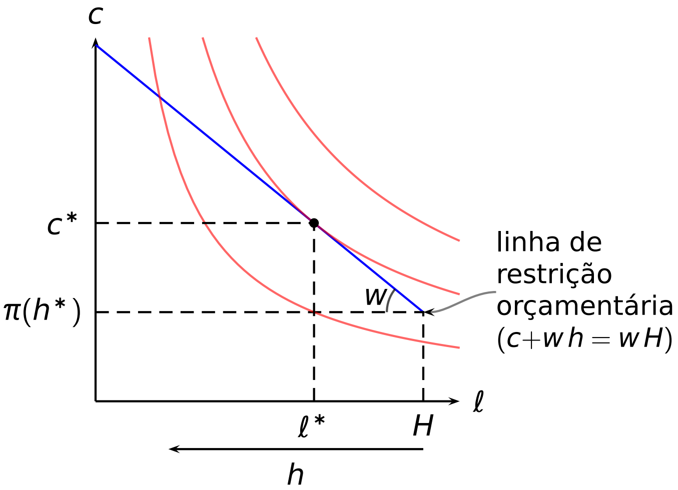
Equilíbrio do consumidor

Solução gráfica – I



Equilíbrio do consumidor

Solução gráfica – II

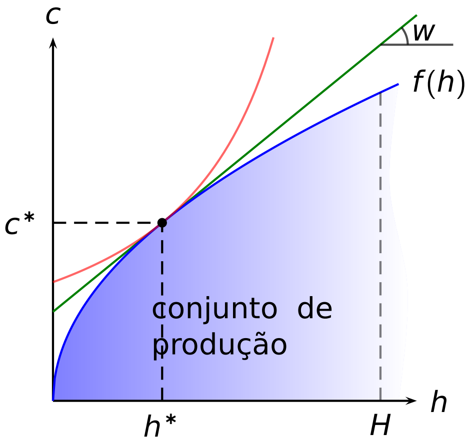


Equilíbrio

$$\begin{cases} wh + \pi(h^*) = f(h^*) & \text{(equil. merc. produto)} \\ \dfrac{\partial U(c,\ell)/\partial \ell}{\partial U(c,\ell)/\partial c} = w = f'(h) & \text{(equil. merc. trabalho)} \end{cases}$$

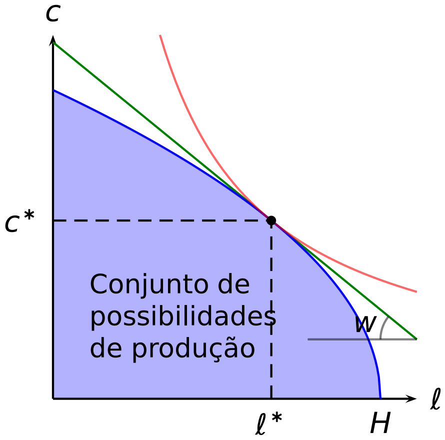
Equilíbrio

Solução gráfica – I

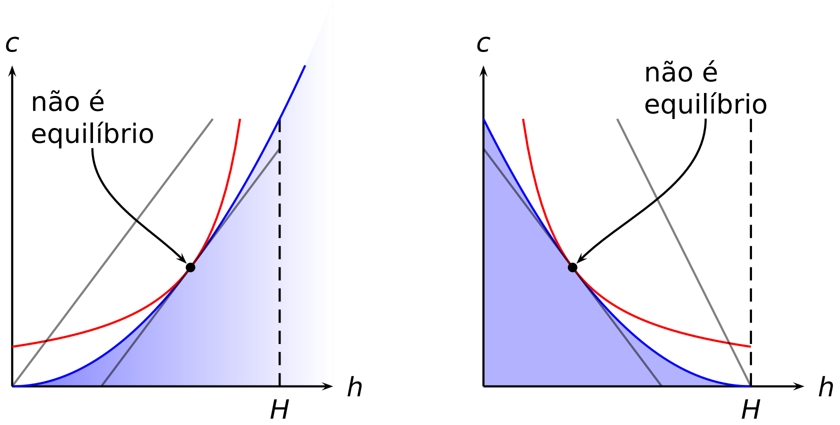


Equilíbrio

Solução gráfica – II



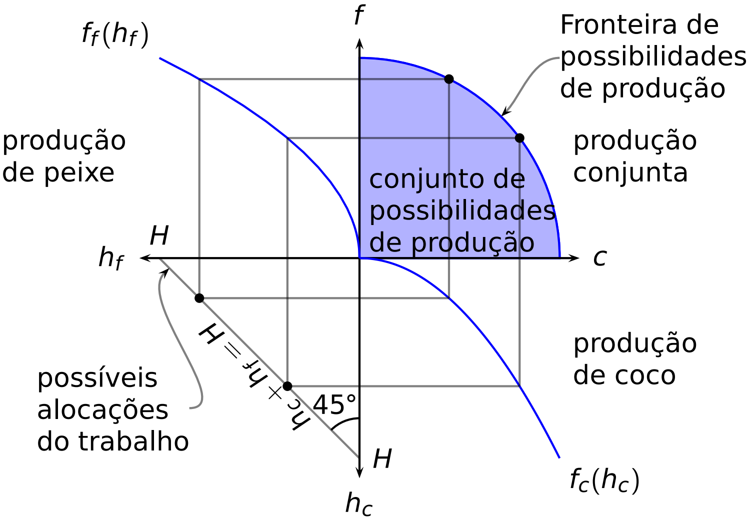
Não convexidades e ausência de equilíbrio



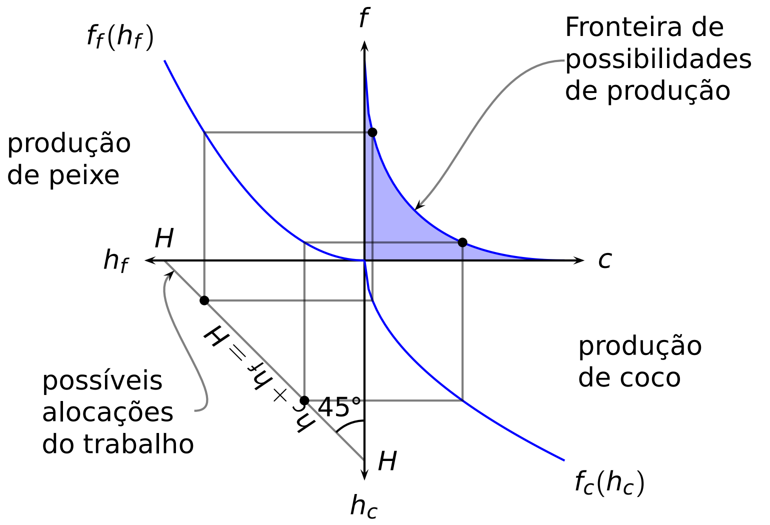
Segundo modelo

- Um consumidor, Robinson Crusoé.
- Dois bens: peixes (f) e coco (c). (O lazer é um neutro)
- h_f e h_c são horas dedicadas à produção de peixe e coco, respectivamente. $h_f + h_c = H$.
- $f_f(h_f)$ e $f_c(h_c)$ são as funções de produção de peixe e coco, respectivamente.
- Função de utilidade $U(c, f)$

Construção da fronteira de possibilidades de produção (FPP)



Economias de escala e a FPP



Produtividades marginais e a taxa marginal de transformação (TMT)

Em qualquer ponto sobre a fronteira de possibilidades de produção temos

$$\begin{cases} f = f_f(h_f) \\ c = f_c(h_c) \\ h_f + h_c = H \end{cases}$$

Diferenciando em relação a c obtemos

$$\begin{cases} \frac{d\,f}{d\,c} = f_f'(h_f)\frac{d\,h_f}{d\,c} \\ 1 = f_c'(h_c)\frac{d\,h_c}{d\,c} \\ \frac{d\,h_f}{d\,c} + \frac{d\,h_f}{d\,c} = 0 \end{cases}$$

Combinando as três equações e observando que a TMT é igual à derivada $^{d\,f}/_{d\,c}$ calculada sobre a FPP, obtemos

$$TMT = -\frac{f_f'(h_f)}{f_c'(h_c)}$$

Eficiência

O problema

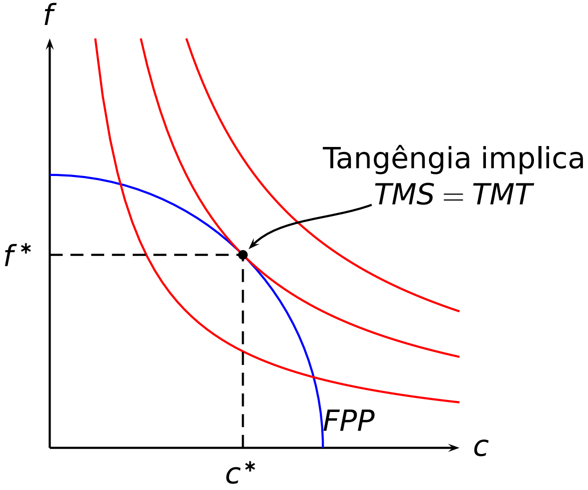
Escolher h_f e h_c de modo a maximizar $U(c, f)$ tendo como restrições $c \leq f_c(h_c)$, $f \leq f_f(h_f)$ e $h_c + h_f \leq H$

Condições de primeira ordem

$$|TMS| \longrightarrow \boxed{\frac{\partial U(c,f)/\partial c}{\partial U(c,f)/\partial c}} = \boxed{\frac{f_c'(h_c)}{f_f'(h_f)}} \longleftarrow |TMT|$$

$$h_c + h_f = H$$

Eficiência – sol. gráfica



Comportamento da empresa

A função de lucro

$$\pi = p_c f_c(h_c) + p_f f_f(h_f) - w(h_c + h_f)$$

Condição de 1ª ordem de lucro máximo

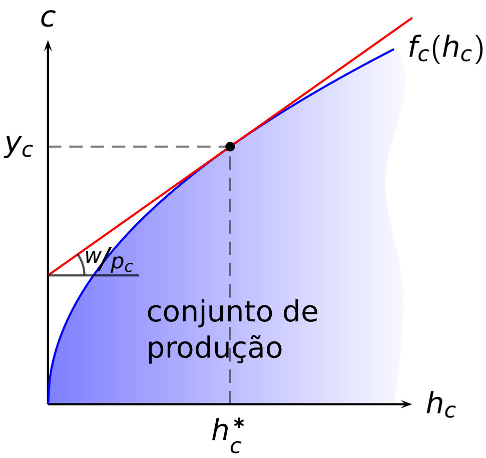
$$p_c f'_c(h_c) = w = p_f f'_f(h_f) \Rightarrow \frac{p_c}{p_f} = -\frac{f'_f(h_f)}{f'_c(h_c)} (= |TMT|)$$

Notação

Empregaremos $y_c(p_c, p_f, w)$ e $y_f(p_c, p_f, w)$ para designar as funções de oferta de coco e peixe, respectivamente.

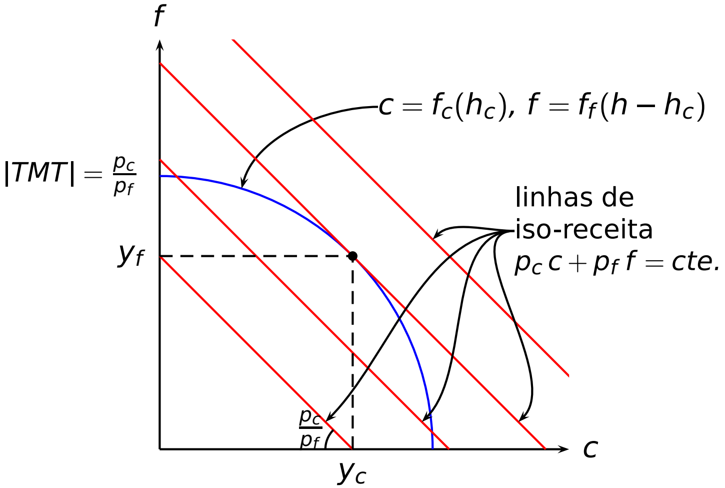
Interpretação gráfica

Oferta de coco e demanda de trabalho para produção de cocos



Interpretação gráfica

Maximização de receita



Comportamento do consumidor

Problema do consumidor

Maximizar $U(c, f)$ dada a restrição $p_c c + p_f f \leq \pi + wH$.
Observação: Note que, como $\pi = p_c y_c + p_f y_f - wH$, a restrição acima pode ser reescrita como $p_c c + p_f f \leq p_c y_c + p_f y_f$

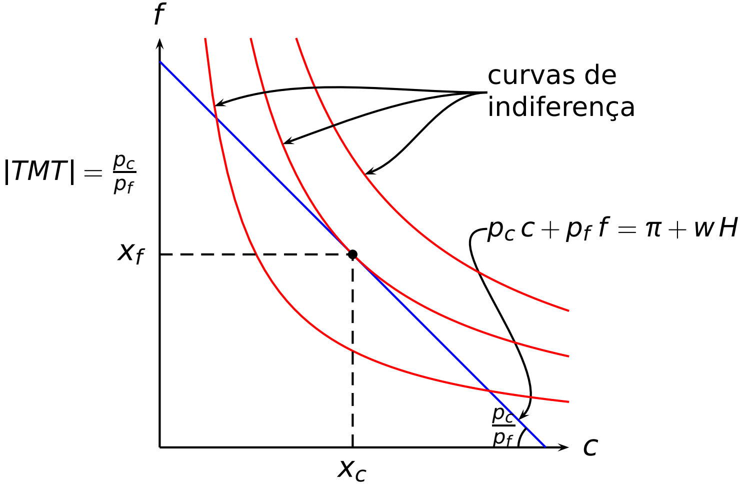
Condição de máximo de 1ª ordem

$$(|TMS| =) \frac{\partial U(c,f)/\partial c}{\partial U(c,f)/\partial f} = \frac{p_c}{p_f}$$

Notação

Empregaremos $x_c(p_c, p_f, wH + \pi)$ e $x_f(p_c, p_f, wH + \pi)$ para designar as funções de demanda de coco e peixe, respectivamente.

Interpretação gráfica



Equilíbrio

Mercado de trabalho

$$p_c f_c'(h_c) = w = p_f f_f'(h_f)$$

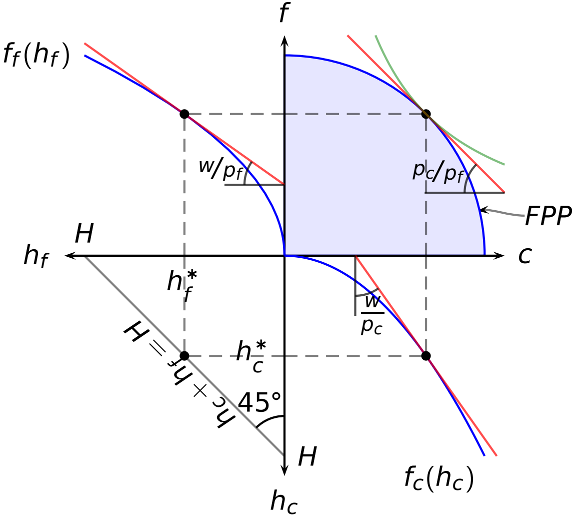
$$h_c + h_f = H$$

Mercado de bens

$$x_c(p_c, p_f, wH + \pi) = f_c(h_c)$$

$$x_f(p_c, p_f, wH + \pi) = f_f(h_f)$$

Equilíbrio Representação Gráfica



Um modelo com dois fatores de produção

- Um consumidor, Robinson Crusoé.
- Dois bens: peixe (f) e coco (c).
- Dois fatores de produção: trabalho (h) e capital (k) disponíveis em quantidades H e K, respectivamente.
- Funções de produção: coco: $f_c(h_c, k_c)$; peixe: $f_f(h_f, k_f)$, $h_c + h_f \leq H$ e $k_c + k_f \leq K$
- Função de utilidade $U(c, f)$

Alocações dos fatores de produção

Definição

Uma alocação dos fatores de produção (h_c, k_c, h_f, k_f) é uma descrição das quantidades de cada fator de produção empregadas em cada processo de produção.

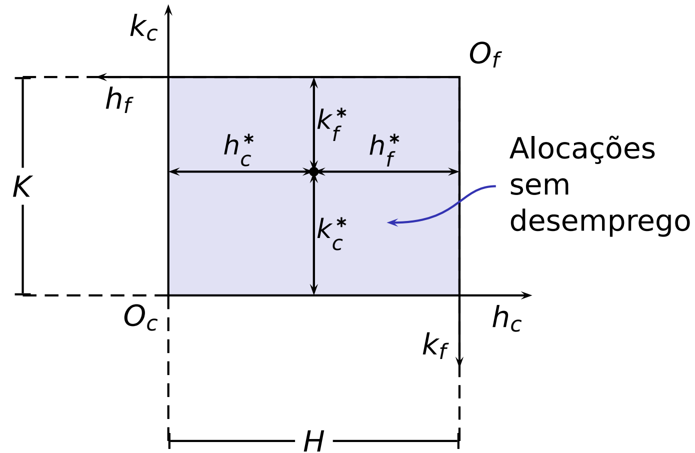
Alocações factíveis dos fatores de produção

Uma alocação (h_c, k_c, h_f, k_f) dos fatores de produção é factível caso $h_c + h_f \leq H$ e $k_c + k_f \leq K$.

Alocações factíveis e sem desemprego

Uma alocação factível dos fatores de produção (h_c, k_c, h_f, k_f) é dita sem desemprego caso $h_c + h_f = H$ e $k_c + k_f = K$.

A caixa de Edgeworth na produção



Eficiência na produção

Definição

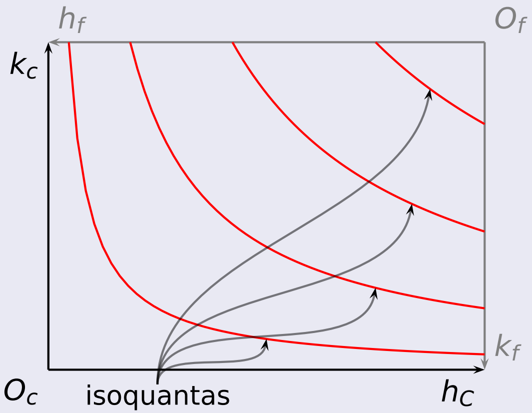
Uma alocação de fatores sem desemprego é dita tecnicamente eficiente caso não haja alocação alternativa alguma que propicie uma produção maior de um dos bens sem com isso reduzir a produção de, pelo menos, um outro bem.

Definição

A curva de contrato na produção é o conjunto de todas as alocações de fatores tecnicamente eficientes.

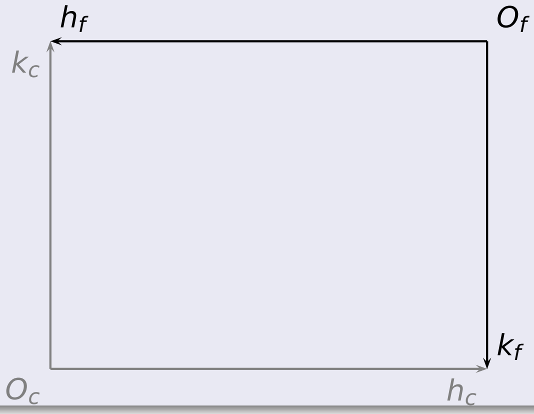
Produção na caixa de Edgeworth

Coco



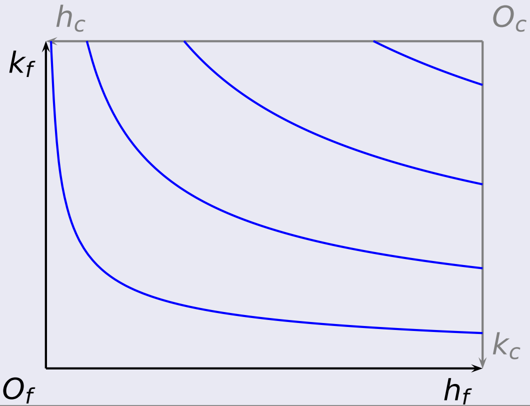
Produção na caixa de Edgeworth

Peixe

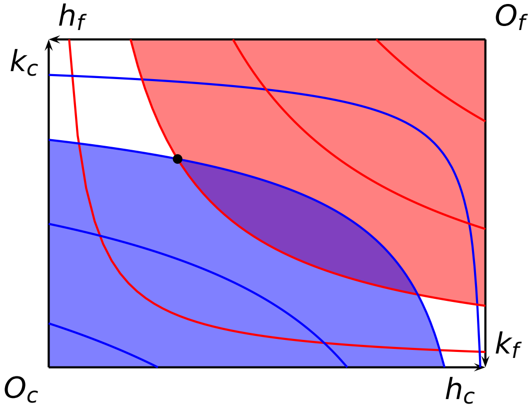


Produção na caixa de Edgeworth

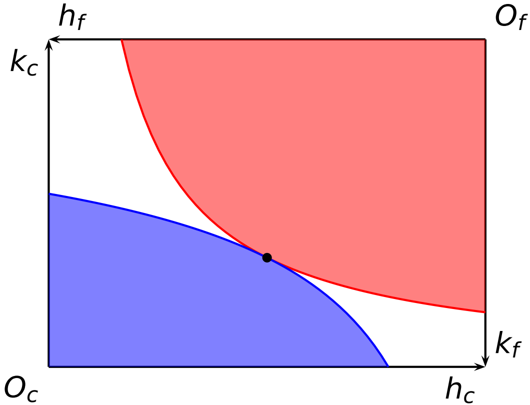
Peixe



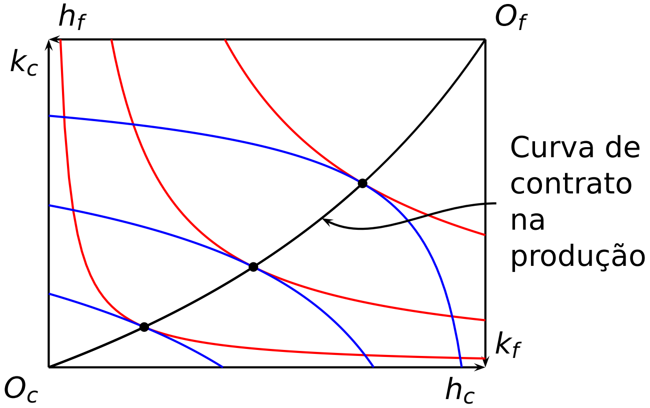
Uma alocação tecnicamente ineficiente



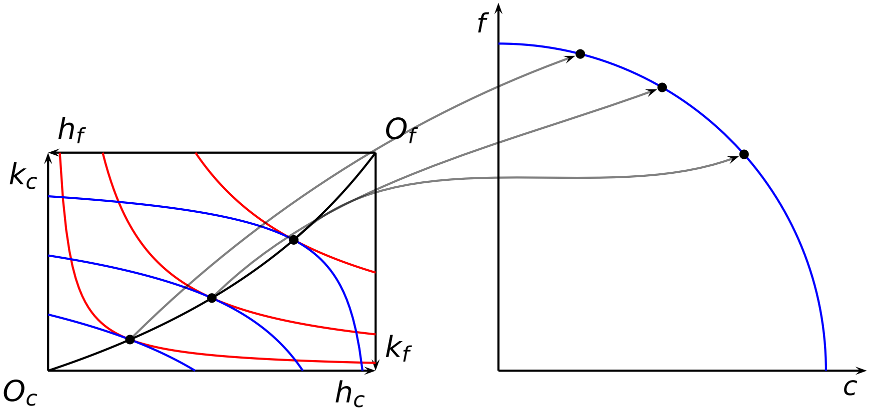
Uma alocação tecnicamente eficiente



Curva de contrato na produção



A fronteira de possibilidades de produção



Funções de produção e a *TMT*

Condição prod. eficiente

$$\max_{h_f,k_f} f_f(h_f,k_f)$$

$$\text{t. q. } h_f+h_c=H;\ k_f+k_c=K;\ f_c(h_c,k_c)\leq c$$

Condições de ótimo

$$\mathscr{L}=f_f(h_f,k_f)-\lambda(c-f_c(H-h_f,K-k_f))$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{h_f}=\frac{\partial\mathscr{L}}{k_f}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\lambda}=0$$

Funções de produção e a *TMT*

$$\lambda = \frac{df^*}{dc} = TMT$$

$$\frac{\partial f_f}{\partial h_f} = \lambda \frac{\partial f_c}{\partial h_c} \Rightarrow \lambda = \frac{\partial f_f / \partial h_f}{\partial f_c / \partial h_c}$$

$$\frac{\partial f_f}{\partial k_f} = \lambda \frac{\partial f_c}{\partial k_c} \Rightarrow \lambda = \frac{\partial f_f / \partial k_f}{\partial f_c / \partial k_c}$$

O problema da eficiência

O problema

Maximizar $U(c,f)$ dadas as restrições $c \leq f_c(h_c,k_c)$, $f \leq f_f(h_f,k_f)$, $k_c + k_f \leq K$ e $h_c + h_f \leq H$

Condições de 1ª ordem

$$\frac{\partial U(c,f)/\partial c}{\partial U(c,f)/\partial f} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial k_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial k_c} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial h_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial h_c} \Rightarrow TMS = TMT$$

$$k_c + k_f = K \quad \text{e} \quad h_c + h_f = H$$

Note que essa solução também implica

$$\frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial h_f}{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial k_f} = \frac{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial h_c}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial k_c} \Rightarrow TMST_f = TMST_c$$

Maximização de lucro

O problema da firma

Maximizar $p_c f_c(h_c, k_c) + p_f f_f(h_f, k_f) - r(k_c + k_f) - w(h_c + h_f)$, sendo r o preço do capital e w o proço do trabalho.

Condição de máximo de 1ª ordem

$$\frac{p_c}{p_f} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial k_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial k_c} = \frac{\partial f_f(h_f,k_f)/\partial h_f}{\partial f_c(h_c,k_c)/\partial h_c} = |TMT|$$

Note que essa condição implica

$$\frac{\partial f_f(k_f,h_f)/\partial k_f}{\partial f_f(k_f,h_f)/\partial h_f} = \frac{\partial f_k(k_f,h_f)/\partial k_f}{\partial f_k(k_f,h_f)/\partial h_f} \Rightarrow TMST_f = TMST_c$$

Equilíbrio de mercado

Mercado de fatores

$$k_c + k_f = K \qquad h_c + h_f = H$$

Mercado de bens

Consumidor: $|TMS| = {}^{p_1}\!/_{p_2}$

Firma: $|TMT| = {}^{p_1}\!/_{p_2}$