Escolha envolvendo risco

Roberto Guena de Oliveira

4 de julho de 2020

USP

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Estrutura da aula

Mercados contingentes

Utilidade esperada

Estrutura da aula

- Mercados contingentes
- Utilidade esperada
- Posturas diante do risco
    - Definições
    - Representações gráficas
    - Prêmio do risco
    - Medida de aversão ao risco

Estrutura da aula

- Mercados contingentes
- Utilidade esperada
- Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- Dominância estocástica
  - Distribuição de probabilidades: recordação

Colocação do problema

Muitos problemas econômicos relevantes, tais como escolha de carreira, decisões de investimento, etc., relacionam-se a escolhas cujos resultados dependem de variáveis futuras com valores não previamente conhecidos. Nesses casos, dizemos que a escolha é feita sob risco.

De que maneira os agentes lidam com esses problemas?

O mercado é um mecanismo eficiente para lidar com situações de risco?

Mercados contingentes

Estado da natureza

Definição
Um estado da natureza ou estado do mundo ou, simplesmente, resultado é uma especificação completa dos valores de todas as variáveis relevantes em uma determinada data.

Exemplo
Suponha um mundo em que tudo dependa de dois lançamentos seguidos de uma moeda. Notemos por C a ocorrência de cara e por R a ocorrência de coroa. Os estados de natureza são:

$$(C, C), (C, R), (R, C), (R, R)$$

Definição
Um evento é um conjunto de estados de natureza. Dizemos que um evento ocorre quando ocorre um de seus elementos.

Exemplo
Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, são, entre outros, eventos: “o primeiro lançamento dar cara” — $\{(C,R),(C,C)\}$ — e “o primeiro lançamento resulta diferente do segundo lançamento” — $\{(C,R),(R,C)\}$.

Redefinindo mercadoria

Mercadoria
Em mercados contingentes, uma mercadoria é um bem a ser entregue desde que ocorra um determinado evento.

Exemplo
Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, e só existe dinheiro, são, entre outras, mercadorias: “R$ 1,00 caso o primeiro lançamento der cara”, “R$ 1,00 caso os dois lançamentos dêm cara” e “R$ 1,00 independentemente dos resultados dos dois lançamentos.”

Mercados contingentes

São mercados em que há negociação de mercadorias definidas em função de diferentes eventos.

Consumo contingente

Um plano de consumo contingente é uma descrição completa das quantidades consumidas de cada bem em cada possível estado de natureza.

Mercados contingentes: exemplo

Considere um mundo no qual há apenas dois estados de natureza:

Estado b Parte do patrimônio de um consumidor é detruída.

Estado g O patrimônio do consumidor é mantido intacto.

- As preferências desse consumidor dependem apenas do valor de seu patrimônio em cada um desses estados.
- Há um mercado de seguros que oferece um seguro contra o estado b cobrando, nos dois estados de natureza, γ reais por R$1,00 segurado.

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

- w_b^0 o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.
- w_g^0 o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.
- w_b o patrimônio no estado b
- w_g o patrimônio no estado g
- K o valor segurado

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

w_b^0 o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.

w_g^0 o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.

w_b o patrimônio no estado b

w_g o patrimônio no estado g

K o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1 - \gamma)$$

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

- w_b^0 o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.
- w_g^0 o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.
- w_b o patrimônio no estado b
- w_g o patrimônio no estado g
- K o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1-\gamma)$$

Resolvendo as duas equações, de modo a eliminar o K, obtemos

$$w_g + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b^0$$

Exemplo — escolha do consumidor

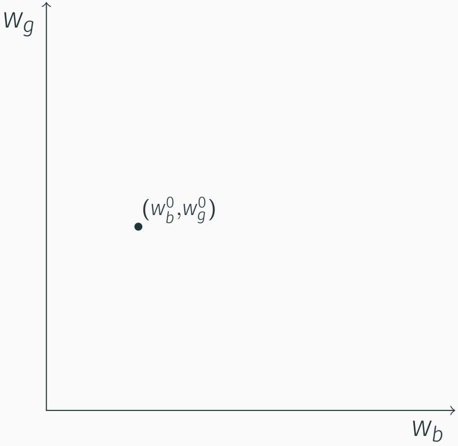
Se as preferências do consumidor forem representadas pela função de utilidade

$$U(w_b, w_g),$$

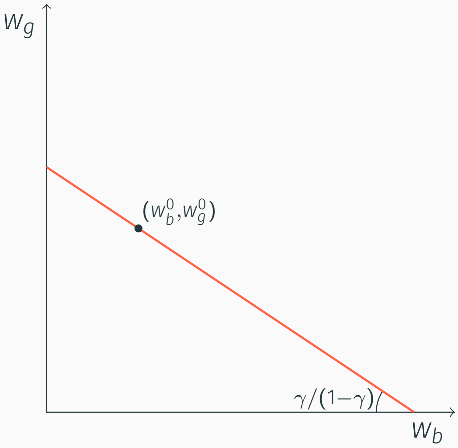
seu problema é escolher w_b e w_g de modo a maximizar essa função, respeitando a restrição orçamentária:

$$w_g + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b^0$$

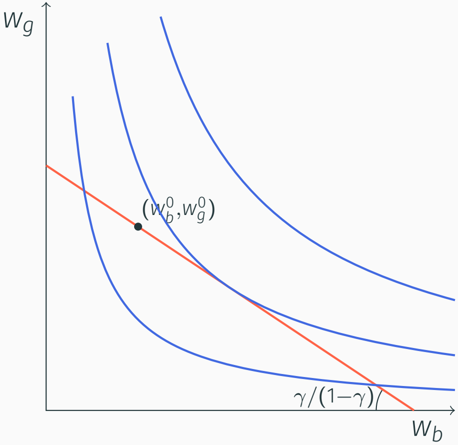
Exemplo – escolha do consumidor



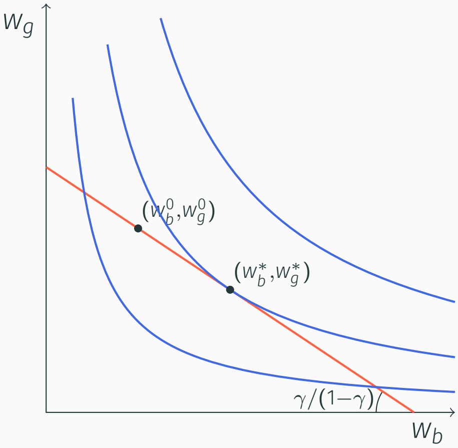
Exemplo – escolha do consumidor



Exemplo – escolha do consumidor



Exemplo – escolha do consumidor



Uma economia na qual existe risco pode ser representada por um modelo de equilíbrio geral no qual existe uma mercadoria para cada bem físico a ser disponibilizado em cada data, localidade e evento. Podemos denominar esse tipo de mercadoria de mercadoria atômica ou mercadoria de Arrow Debreu.

Nessa economia, todos os resultados derivados em nosso modelo de equilíbrio geral se aplicam. Para que isso ocorra, é necessário, entre outras coisas, supor que os mercados da economia são completos, ou seja, que existe um mercado para cada mercadoria atômica.

Utilidade esperada

Estrutura da aula

Definição
Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$.

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

Definição
Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

notação

$$L = (c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

Loterias simples e compostas

Loteria simples: Os prêmios alternativos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ não são loterias;

Loteria composta: Ao menos um dos prêmios é uma loteria.

Forma reduzida de uma loteria: é a loteria simples sem prêmios repetidos que dá as probabilidades com que a loteria, composta ou não, pagará prêmios que não são loterias.

Observações

Se uma loteria simples não apresenta prêmios repetidos ela é a sua própria forma reduzida. Por exemplo, se c_1 e c_2 são dois prêmios que não sejam loterias tais que $c_1 \neq c_2$, então a forma reduzida de $(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$ é a mesma loteria $(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$.

Se uma loteria simples apresenta um ou mais prêmios repetidas vezes, sua forma reduzida apresenta cada prêmio repetido apenas uma vez. Por exemplo, a loteria $(c_1, c_1, c_2; \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ tem forma reduzida $(c_1, c_2; \pi_1 + \pi_2, \pi_3)$.

Reduzindo uma loteria composta a uma loteria simples: Exemplo

Suponha as seguintes loterias nas quais c_1, c_2 não são loterias:

$$L_1 = (c_1, c_2; \pi_1^1, \pi_2^1) \quad L_2 = (c_1, c_2; \pi_1^2, \pi_2^2) \quad \text{e } L_3 = (L_1, L_2; \pi_1^3, \pi_2^3)$$

A forma reduzida da loteria L_3 é

$$(c_1, c_2; \pi_1^3\pi_1^1 + \pi_2^3\pi_1^2, \pi_1^3\pi_2^1 + \pi_2^3\pi_2^2)$$

Preferências sobre loterias: hipóteses

Preferências completas: $L_i \succsim L_j$ e/ ou $L_j \succsim L_i$, para quaisquer possíveis loterias L_i e L_j.

Preferências transitivas: Para quaisquer loterias possíveis L_i, L_j, L_k, se $L_i \succsim L_j$ e $L_j \succsim L_k$, então $L_i \succsim L_k$.

Equivalência de loterias: para duas loterias possíveis quaisquer L_i e L_j com a mesma forma reduzida, $L_i \sim L_j$.

Axioma da independência: Sejam L_i, L_j e L_k três loterias possíveis quaisquer então $L_i \succsim L_j$ se, e somente se,

$$(L_i, L_k; \pi, 1 - \pi) \succsim (L_j, L_k; \pi, 1 - \pi).$$

Hipótese de continuidade: Sejam L_i, L_j e L_k três loterias possíveis quaisquer. Então os conjuntos

$$\left\{\pi \in [0, 1] : (L_i, L_j; \pi, 1 - \pi) \succsim L_k\right\}$$

e

$$\left\{\pi \in [0, 1] : L_k \succsim (L_i, L_j; \pi, 1 - \pi)\right\}$$

são fechados.

Utilidade Esperada

Suponha uma consumidora com preferências completas, transitivas, que atendem ao princípio de equivalência de loterias, ao aximo da independência e à hipótese de continuidade. Von-Neumann e Morgenstern mostram que para essa consumidora existem uma função de utilidade $U(L)$ e uma função $u(c)$ na qual c representa um resultado qualquer entre todos os resultados possíveis nas formas reduzidas das loterias, tais que, para qualquer loteria L, com forma reduzida $(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i u(c_i) = \mathbb{E}u(c).$$

Utilidade Esperada

A função $U(L)$ do slide anterior é chamada *função de utilidade de Von-Newmann e Morgenstern*. A função $u(c)$ é chamada *função de utilidade de Bernouille*. Note que caso L_1 seja uma loteria que pague o prêmio seguro c com 100% de certeza, então a utilidade de L será

$$U(L_1) = U(c;1) = 1 \times u(c),$$

o que significa que $u(c)$ representa a utilidade de receber o pagamento seguro c e que a utilidade de uma loteria L com forma reduzida $(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ será igual ao valor experado das utilidades da consumidora quando ela recebe cada um dos pagamentos c_1 a c_n com respectivas probabilidades π_1 a π_n.

Utilidade esperada e loterias compostas

Considere duas loterias com formas reduzidas

$$L_1 = (c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1; \pi_1^1, \pi_2^1, \ldots, \pi_n^1)$$

e

$$L_2 = (c_1^2, c_2^2, \ldots, c_m^2; \pi_1^2, \pi_2^2, \ldots, \pi_m^2)$$

e a loteria composta

$$L_3 = (L_1, L_2; \pi_1^3, \pi_2^3)$$

$$U(L_1) = \pi_1^1 c_1^1 + \pi_2^1 c_2^1 + \cdots + \pi_n^1 c_n^1$$

e

$$U(L_2) = \pi_1^2 c_1^1 + \pi_2^2 c_2^2 + \cdots + \pi_m^2 c_m^2$$

Utilidade esperada e loterias compostas (continuação)

Pela hipótese de equivalencia de loterias, L_3 é indiferente a

$$(c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1, c_1^2, c_2^2, \ldots, c_m^2; \\ \pi_1^3\pi_1^1, \pi_1^3\pi_2^1, \ldots, \pi_1^3\pi_n^1, \pi_2^3\pi_1^2, \pi_2^3\pi_2^2, \ldots, \pi_2^3\pi_m^2)$$

Logo,

$$U(L_3) = \\ \pi_1^3\pi_1^1 c_1^1 + \pi_1^3\pi_2^1 + \cdots + \pi_1^3\pi_n^1 + \pi_2^3\pi_1^2 c_1^2 + \pi_2^3\pi_2^2 + \cdots + \pi_2^3\pi_m^2 = \\ \pi_1^3(\pi_1^1 c_1^1 + \pi_2^1 + \cdots + \pi_n^1) + \pi_2^3(\pi_1^2 c_1^2 + \pi_2^2 + \cdots + \pi_n^2) \\ = \pi_1^3 U(L_1) + \pi_2^3 U(L_2)$$

Definição
Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Definição
Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada
$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Definição
Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada
$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Concavidade
Note que a concavidade ou convexidade de uma função é preservada por transformações monotônicas afim.

Valor esperado de uma loteria

Caso uma loteria

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

ofereça apenas prêmios monetários, é possível definir o valor esperado dessa loteria por

$$VE = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 + \cdots + \pi_n c_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i c_i$$

Posturas diante do risco

Estrutura da aula

Aversão ao risco
Diz-se que um consumidor é aveso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Aversão ao risco
Diz-se que um consumidor é aveso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Propenção ao risco
Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

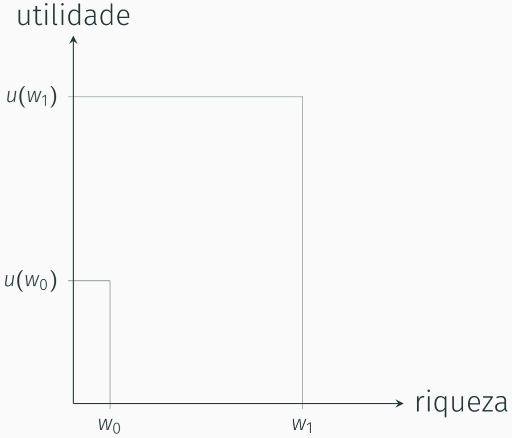
Definições

Aversão ao risco
Diz-se que um consumidor é aveso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

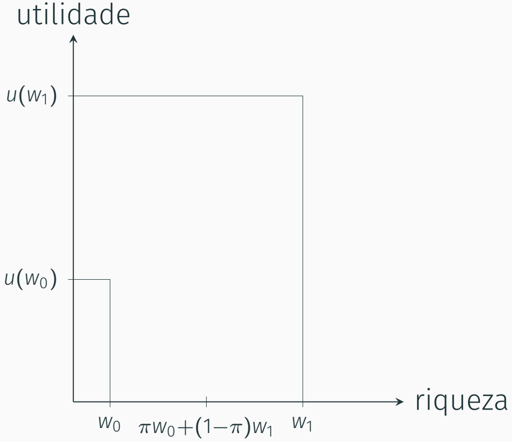
Propenção ao risco
Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

Neutralidade frente ao risco
Diz-se que um consumidor é risco neutro caso ele seja indiferente entre uma loteria com prêmios monetário e o valor esperado dos prêmios dessa loteria.

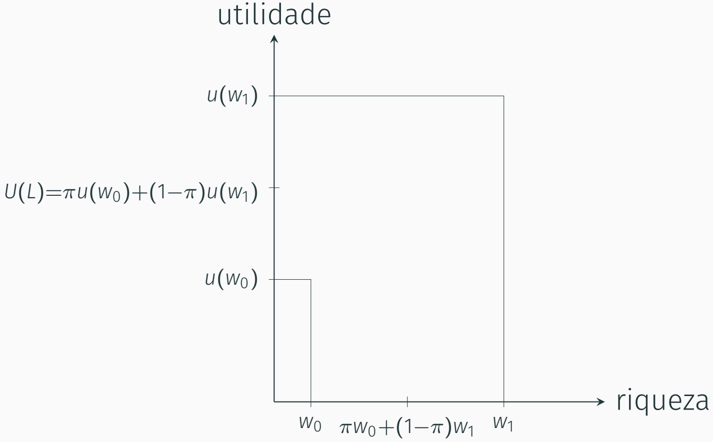
Aversão ao risco: representação gráfica



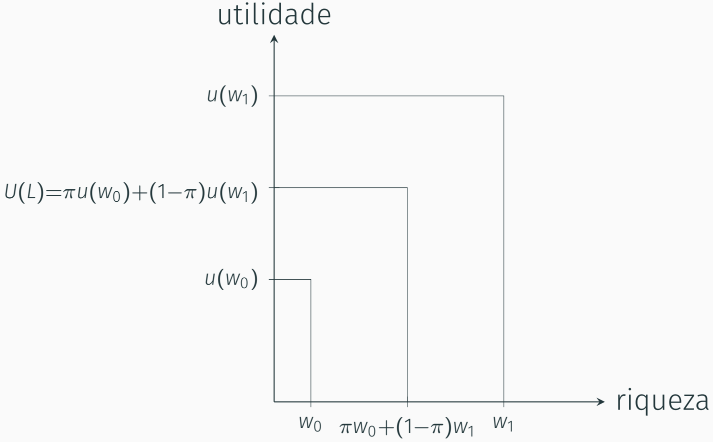
Aversão ao risco: representação gráfica



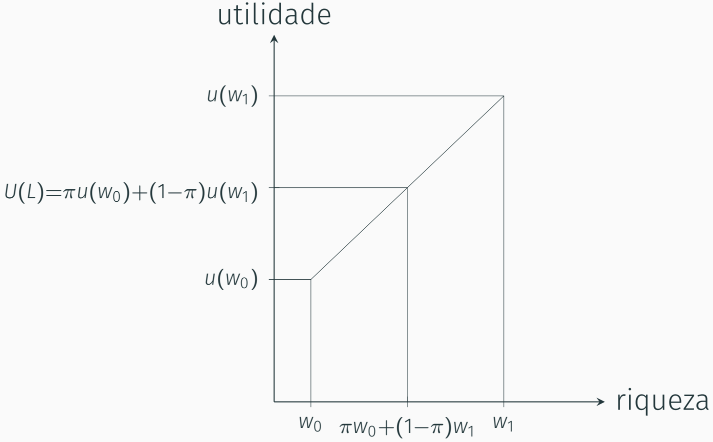
Aversão ao risco: representação gráfica



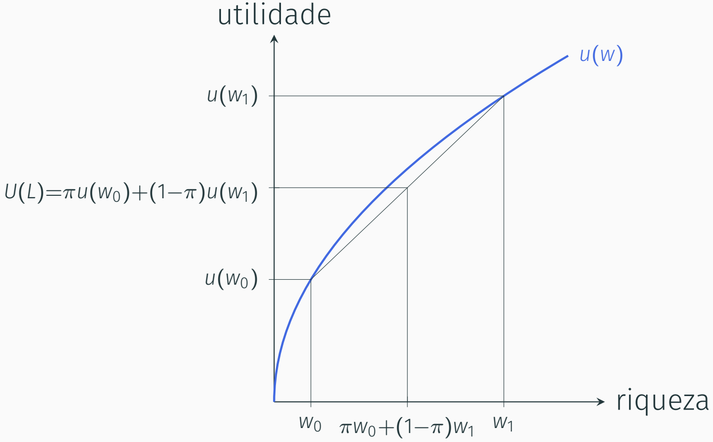
Aversão ao risco: representação gráfica



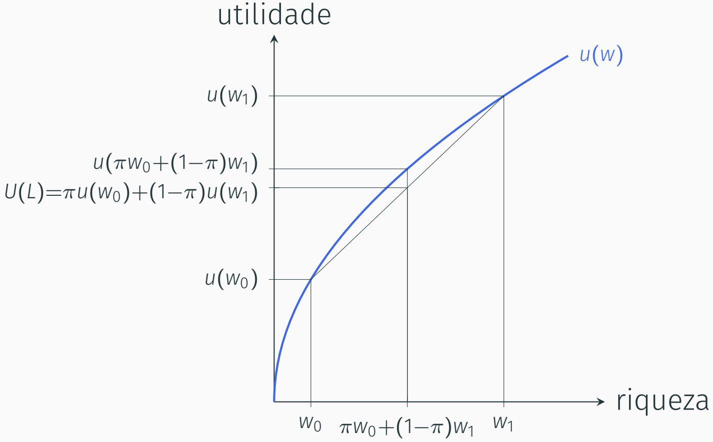
Aversão ao risco: representação gráfica



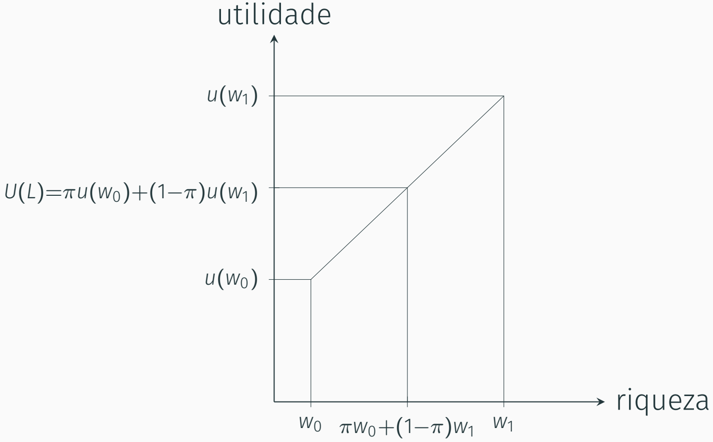
Aversão ao risco: representação gráfica



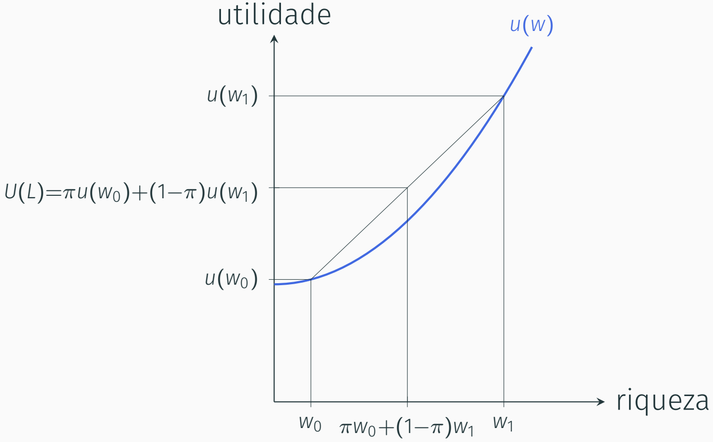
Aversão ao risco: representação gráfica



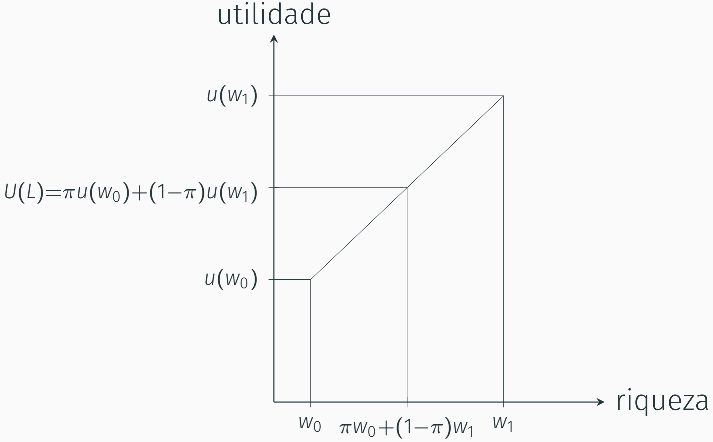
Propensão ao risco: representação gráfica



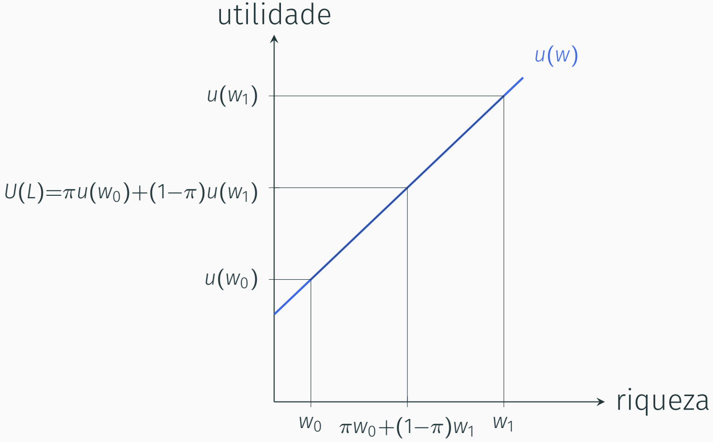
Propensão ao risco: representação gráfica



Neutralidade frente ao risco: representação gráfica



Neutralidade frente ao risco: representação gráfica



Estrutura da aula

Definições

Equivalente Seguro
O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Equivalente Seguro
O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Prêmio do risco
O prêmio do risco de uma loteria monetária é a diferença entre o valor esperado dessa loteria e seu equivalente seguro.

Representação gráfica

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \dfrac{9 + 25}{2} = 17$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \frac{9+25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \frac{3+5}{2} = 4$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \dfrac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \dfrac{3 + 5}{2} = 4$

Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w **pode assumir:** 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

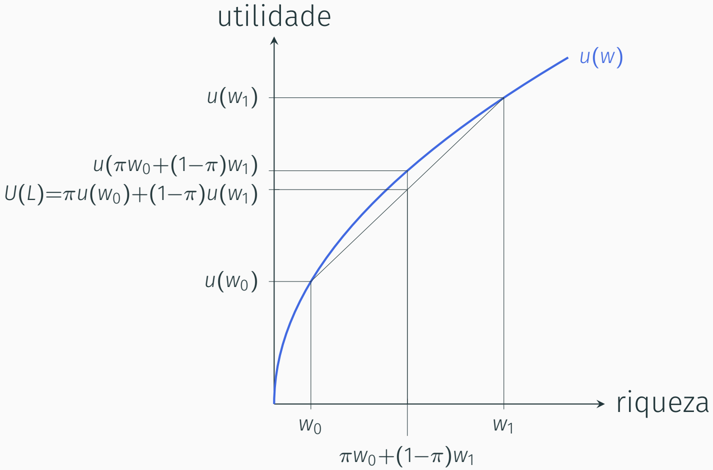
Valor esperado: $VE = \dfrac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \dfrac{3 + 5}{2} = 4$

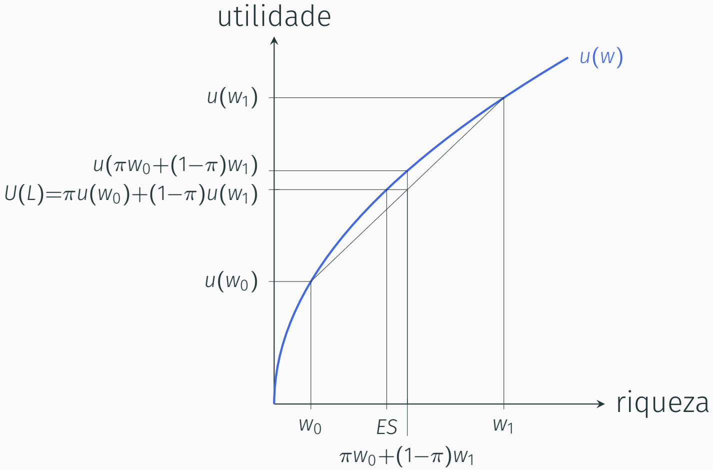
Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Prêmio do risco: $PR = VE - ES = 17 - 16 = 1$

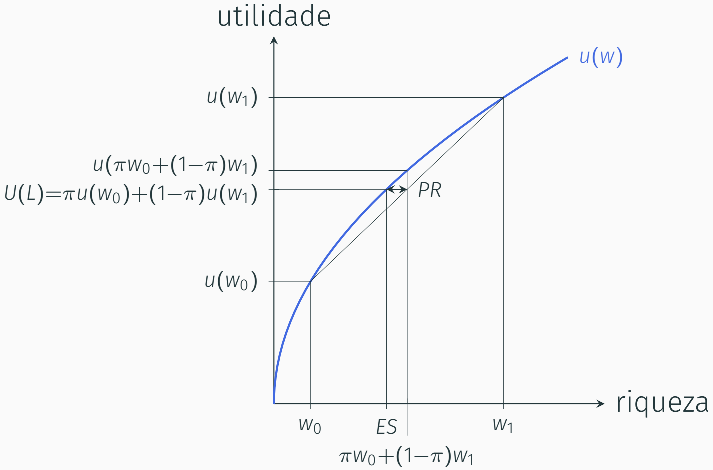
Equvalente seguro e prêmio de risco: representação gráfica



Equvalente seguro e prêmio de risco: representação gráfica



Equvalente seguro e prêmio de risco: representação gráfica



Estrutura da aula

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_A = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação na riqueza}}$$

Taxa de variação da UMg em relação à riqueza.

Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão relativa R_R

$$R_R = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_A = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação na riqueza}}$$

Taxa de variação da UMg em relação à riqueza.

Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

Aversão absoluta R_A

$$R_A = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_A = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação na riqueza}}$$

Taxa de variação da UMg em relação à riqueza.

Aversão relativa R_R

$$R_R = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Interpretação

$$R_R = -\frac{\text{variação \% na UMg}}{\text{variação \% na riqueza}}$$

Elasticidade da UMg em relação à riqueza.

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

$$R_A = \frac{ae^{-aw}}{e^{-aw}}$$

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

$$R_A = \frac{ae^{-aw}}{e^{-aw}} = a$$

Função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante (CARA)

$$u(w) = -e^{-aw}$$

$$R_A = \frac{ae^{-aw}}{e^{-aw}} = a$$

CARA e o prêmio de risco

Seja $\tilde{\epsilon} = \tilde{w} - \mathbb{E}\tilde{w}$, em que $\tilde{w}$ é a riqueza incerta de um investidor e $\mathbb{E}$ é o operador esperança matemática. Se suas preferências forem CARA, o prêmio de risco $p(\tilde{w})$ será

$$p = \frac{\ln \mathbb{E}e^{-a\tilde{\epsilon}}}{a}.$$

Tal prêmio depende apenas da distribuição do desvio em relação ao valor esperado e não desse valor esperado.

Exemplo

A riqueza de um investidor pode assumir os valores R$11 milhões ou R$9 milhões, ambos com probabilidade de 50%. Sua função de utilidade de Bernouille é

$$u(w) = -e^{-\frac{w}{2}}$$

em que w e medido em R$ milhões. Pergunta-se:

1. Qual o coeficiente de aversão absoluta ao risco desse investidor?
2. Qual o prêmio de risco desse investidor considerando a distribuição de probabiliade de sua riqueza?
3. Se essa distribuição de probabilidade se alterar para R$15 milhões e R$13 milhões, ambos valores com probabilidade de 50%, qual será o novo prêmio de risco?

Função de utilidade com aversão relativa ao risco constante (CRRA)

$$u(w) = \begin{cases} \frac{w^{1-a}}{1-a} & \text{se} a \neq 1 \\ \ln w & \text{se} a = 1 \end{cases}$$

Função de utilidade com aversão relativa ao risco constante (CRRA)

$$u(w) = \begin{cases} \frac{w^{1-a}}{1-a} & \text{se} a \neq 1 \\ \ln w & \text{se} a = 1 \end{cases}$$

$$R_R = \begin{cases} -w\frac{-a(1-a)w^{-(a+1)}}{(1-a)w^{-a}} = a & \text{caso } a \neq 1 \\ -w\frac{-\frac{1}{w^2}}{\frac{1}{w}} = 1 & \text{caso } a = 1 \end{cases}$$

Seja, $(\tilde{w})$ a variável aleatória que representa a renda incerta do investidor e sejam

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{w} - \mathbb{E}\tilde{w}}{\mathbb{E}\tilde{w}},$$

e o prêmio de risco relativo $\mathfrak{p}$ definido por

$$u\left[(1-\mathfrak{p})\mathbb{E}\tilde{w}\right] = \mathbb{E}u(\tilde{w}) = \mathbb{E}u\left[(1+\tilde{\varepsilon})\mathbb{E}\tilde{w}\right]$$

Utilidade CRRA e prêmio do risco

Seja, $(\tilde{w})$ a variável aleatória que representa a renda incerta do investidor e sejam

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{w} - \mathbb{E}\tilde{w}}{\mathbb{E}\tilde{w}},$$

e o prêmio de risco relativo $\mathfrak{p}$ definido por

$$u\left[(1-\mathfrak{p})\mathbb{E}\tilde{w}\right] = \mathbb{E}u(\tilde{w}) = \mathbb{E}u\left[(1+\tilde{\varepsilon})\mathbb{E}\tilde{w}\right]$$

Então, para um consumidor com utilidade CRRA,

$$\mathfrak{p} = 1 - \left[\mathbb{E}(1+\tilde{\varepsilon})^{1-a}\right]^{\frac{1}{1-a}}.$$

O prêmio de risco como fração da riqueza esperada (prêmio de risco relativo) depende apenas da distribuição dos desvios da riqueza como frações da riqueza esperada (desvios relativos).

Exemplo

A riqueza esperada de um investidor é R$1 000. A distribuição de probabilidade de sua riqueza é tal que esta pode ser 10% superior ou 10% inferior a esse valor, com iguais probabilidades de 50%.Sua função de utilidade de Bernouille é

$$u(w) = \sqrt{w}.$$

Pergunta-se:

1. Qual o coeficiente de aversão relativa ao risco desse investidor?
2. Qual o prêmio relativo de risco desse investidor considerando a distribuição de probabiliade de sua riqueza?

Exemplo (continuação)

A riqueza esperada de um investidor é R$1 000. A distribuição de probabilidade de sua riqueza é tal que esta pode ser 10% superior ou 10% inferior a esse valor, com iguais probabilidades de 50%.Sua função de utilidade de Bernouille é

$$u(w) = \sqrt{w}.$$

Pergunta-se:

3. Qual seu prêmio de risco em R$?
4. Se a riqueza esperada desse consumidor fosse R$2 000, e a distribuição do desvio relativo fossa a mesma, qual seria seu prêmio relativo de risco? E seu prêmio de risco em R$?

Dominância estocástica

Estrutura da aula

- Mercados contingentes
- Utilidade esperada
- Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- Dominância estocástica
  - Distribuição de probabilidades: recordação

Introdução

O conceito de dominância estocástica ajuda a comparar alguns planos de investimento sem o conhecimento da função de utilidade do investidor. Usamos dois conceitos de dominância estocástica. O conceito de dominância estocástica de primeira ordem fornece um critério que, quando atendido, garante que um determinado plano de investimento será considerado superior ao outro para qualquer investidor com função de utilidade de Bernouille monotônica. O conceito de dominância estocástica de segunda ordem fornece um critério que quando atendido garante que um determinado plano de investimento é superior a outro para qualquer investidor com função de utilidade de Bernouille monotônica e côncava.

Função de distribuição acumulada (CDF)

Seja $\tilde{w}$ uma variável real aleatória. Sua função de distribuição acumulada (CDF), acumulada até um determinado valor w, $F(w)$, é definida por

$$F(w) = P(\tilde{w} < w).$$

Função de distribuição acumulada (CDF)

Seja $\tilde{w}$ uma variável real aleatória. Sua função de distribuição acumulada (CDF), acumulada até um determinado valor w, $F(w)$, é definida por

$$F(w) = P(\tilde{w} < w).$$

Se a função $F(w)$ for diferenciável, definimos a função de densidade de probabilidade (PDF) $f(w)$ como

$$f(w) = \frac{d}{dw}F(w).$$

Função de distribuição acumulada (CDF)

Seja $\tilde{w}$ uma variável real aleatória. Sua função de distribuição acumulada (CDF), acumulada até um determinado valor w, $F(w)$, é definida por

$$F(w) = P(\tilde{w} < w).$$

Se a função $F(w)$ for diferenciável, definimos a função de densidade de probabilidade (PDF) $f(w)$ como

$$f(w) = \frac{d}{dw} F(w).$$

A probabilidade da variável $\tilde{w}$ assumir valor entre w_l e w_u, com $w_l < w_u$ é

$$P(w_l < \tilde{w} < w_u) = F(w_u) - F(w_l) = \int_{w_l}^{w_u} f(w) dw.$$

Exemplo 1: distribuição de probabilidade uniforme

Diz-se que uma variável $\tilde{w}$ tem distribuição de probabilidade uniforme caso, existam w_l e w_u tais que $w_l < w_u$ e que

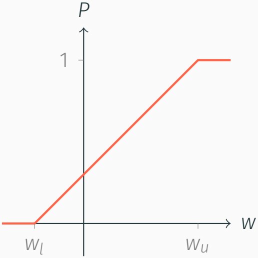
$$F(w) = \begin{cases} 0 & \text{caso } w < w_l \\ \frac{w - w_l}{w_u - w_l} & \text{caso } w_l \leq w \leq w_u \\ 1 & \text{caso } w > w_u \end{cases}.$$

Nesse caso, a função de densidade de probabilidade é

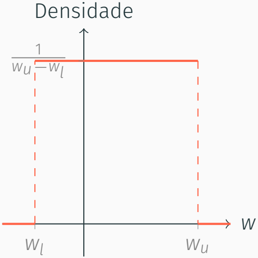
$$f(w) = \begin{cases} \frac{1}{w_u - w_l} & \text{caso } w_l \leq w \leq w_u \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Distribuição de probabilidade uniforme

CDF



PDF



Exemplo 2: distribuição de probabilidade exponencial

Uma variável aleatória $\tilde{w}$ tem distribuição de probabilidade exponencial caso

$$F(\tilde{w}) = \begin{cases} 0 & \text{caso } w < 0 \\ 1 - e^{-\lambda w} & \text{caso } w \geq 0 \end{cases}$$

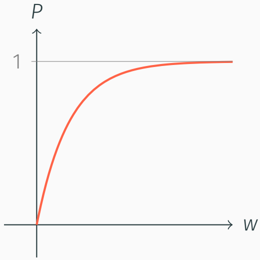
sendo $\lambda > 0$ um parâmetro da distribuição.

Nesse caso, a função de densidade de probabilidade será

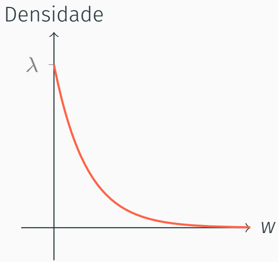
$$f(\tilde{w}) = \begin{cases} 0 & \text{caso } w < 0 \\ \lambda e^{-\lambda w} & \text{caso } w \geq 0 \end{cases}$$

Distribuição de probabilidade exponencial

CDF



PDF



Exemplo 3: distribuição normal

Dizemos qua uma variável aleatória $\tilde{w}$ tem distribução de probabilidade normal caso,

$$F(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx,$$

sendo μ e $\sigma > 0$ parâmetros dessa função.

A função de densidade de probabilidade associada à distribuição normal é

$$f(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Distribuição de probabilidade normal

Gráfico da CDF

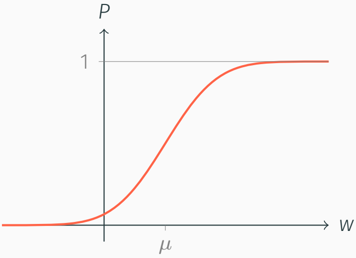
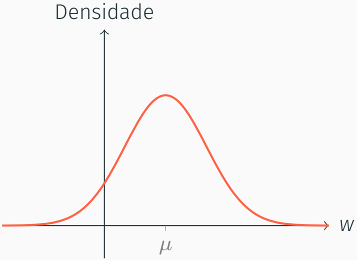


Gráfico da PDF



Exemplo: distribuição discreta

Suponha que $\tilde{w}$ seja igual ao número de vezes que, em 10 lançamentos de uma moeda, ela cai com a face "cara" voltada para cima. $\tilde{w}$ pode assumir qualquer um dos valores $0, 1, \ldots 10$. A probabilidade de cada um desses valores é descrita pela função

$$P(\tilde{w} = w) = \frac{10!}{(10-w)!w!}\frac{1}{2^{10}} = \binom{10}{w}\frac{1}{2^{10}}.$$

na qual $w \in \{1, \ldots, 10\}$. Para qualquer $w \in \mathbb{R}$,

$$F(w) = \sum_{i=0}^{\hat{w}} \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10}}$$

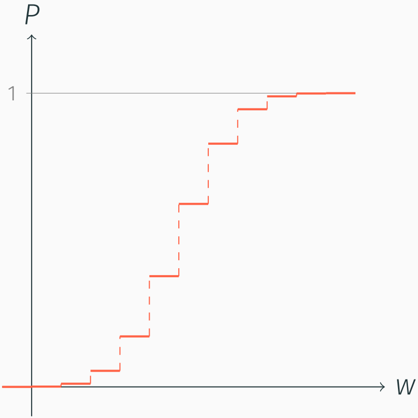
na qual $\hat{w} = max\{v \in \mathbb{Z}_+ : v \leq w\}$.

Exemplo: distribuição discreta (continuação)

Probabilidades

Valor	$P(\tilde{w} = w)$	$P(\tilde{w} \leq w)$
0	0.001	0.001
1	0.010	0.011
2	0.044	0.055
3	0.117	0.172
4	0.205	0.377
5	0.246	0.623
6	0.205	0.828
7	0.117	0.945
8	0.044	0.989
9	0.010	0.999
10	0.001	1

Gráfico da CDF



Dominância estado a estado

Dizemos que uma variável aleatórioa $\tilde{x}$ domina estado a estado outra variável aleatória $\tilde{y}$, caso, em todos os estados de natureza possíveis, o valor realizado de $\tilde{x}$ seja maior ou igual ao valor realizado de $\tilde{y}$ e, em ao menos um estado de natureza, o valor realizado de $\tilde{x}$ seja maior do que o valor realizado de $\tilde{y}$.

Dominância estado a estado

Dizemos que uma variável aleatórioa $\tilde{x}$ domina estado a estado outra variável aleatória $\tilde{y}$, caso, em todos os estados de natureza possíveis, o valor realizado de $\tilde{x}$ seja maior ou igual ao valor realizado de $\tilde{y}$ e, em ao menos um estado de natureza, o valor realizado de $\tilde{x}$ seja maior do que o valor realizado de $\tilde{y}$.

Exemplo:
Considere duas apostas sobre o resultado do lançamento de um dado com os seguintes pagamentos:

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	1	-1	1	-1	1
B	-1	1	-1	1	1	1

A aposta B domina estado a estado a aposta A.

Dominância estocástica: Exemplo

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	-1	-1	1	1	1
B	1	1	1	0	-1	-1

Dominância estocástica: Exemplo

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	-1	-1	1	1	1
B	1	1	1	0	-1	-1

A aposta B não domina estado a estado a aposta A.

Dominância estocástica: Exemplo

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	-1	-1	1	1	1
B	1	1	1	0	-1	-1

A aposta B não domina estado a estado a aposta A.

Todavia, faz sentido crer que qualquer apostador razoável prefire B a A.

Dizemos que B domina estocasticamente A no sentido forte.

Dominância estocástica forte ou de primeira ordem: definição

Dizemos que uma variável aleatória $\tilde{x}$ com distribuição acumulada $F_x(x)$ domina estocasticamente em primeira ordem (FSD) outra variável aleatória $\tilde{y}$ com distribuição acumulada $F_y(y)$ se, e somente se, para todo $w \in \mathbb{R}$,

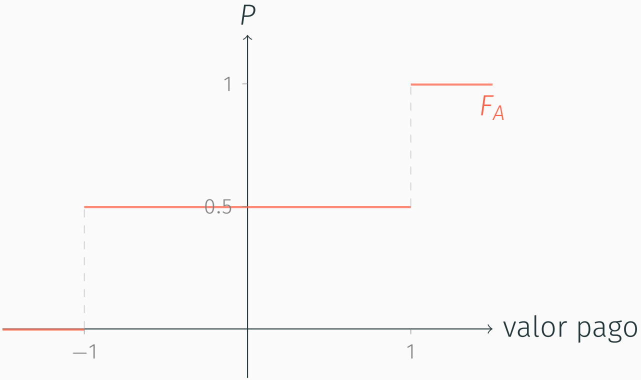
$$F_x(w) \leq F_y(w) \quad \text{ou, equivalentemente} \quad 1 - F_x(w) \geq 1 - F_y(w).$$

Dominância estocástica de primeira ordem: Exemplo 1

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	-1	-1	1	1	1
B	1	1	1	0	-1	-1

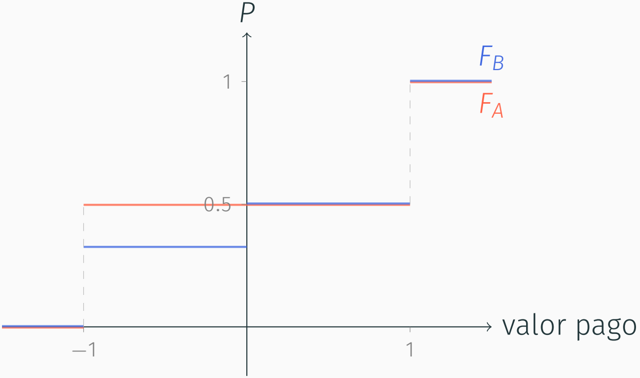
Dominância estocástica de primeira ordem: Exemplo 1

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	-1	-1	1	1	1
B	1	1	1	0	-1	-1

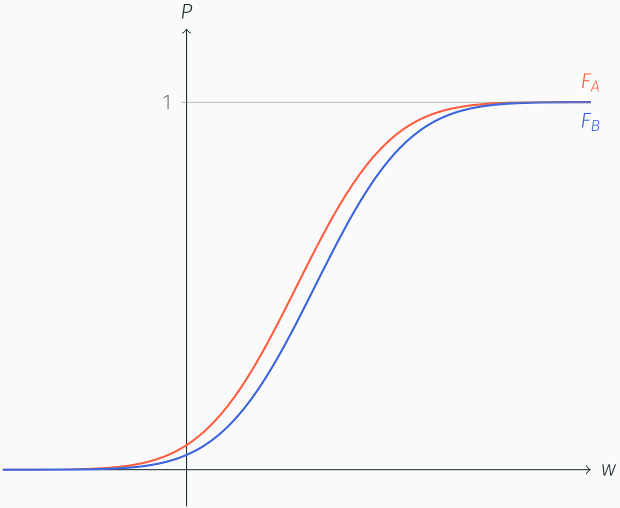


Dominância estocástica de primeira ordem: Exemplo 1

Aposta	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
A	-1	-1	-1	1	1	1
B	1	1	1	0	-1	-1



Dominância estocástica de primeira ordem: Exemplo 2



Dominância estocástica e preferências

Sejam $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ duas variáveis aleatórias com distribuições acumuladas F_x e F_y). Então $F_x \text{FSD} F_y$ e, e somente se, para qualquer função de utilidade monotônica $u(x)$

$$Eu(\tilde{x}) \geq Eu(\tilde{y}).$$

Em outras palavras, se F_x domina estocasticamente em primeira ordem F_y, qualquer investidor com utilidade crescente em relação à riqueza, considerará melhor que sua riqueza seja descrita pela variável $\tilde{x}$ ao invés de ser descrita pela variável $\tilde{y}$. E, se, independentemente do formato da função de utilidade, todo investidor prefere $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$, F_x domina estocasticamente em primeira ordem F_y.

Dominância estocástica de segunda ordem: exemplo

Investimento 1		Investimento 2	
valor	probabilidade	valor	probabilidade
4	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{3}$
9	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{3}$

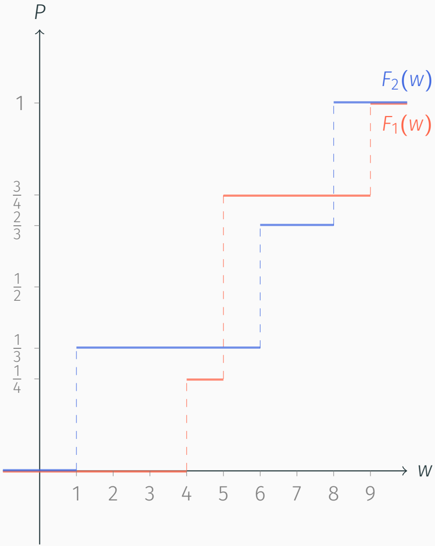
Dominância estocástica de segunda ordem: exemplo

Investimento 1		Investimento 2	
valor	probabilidade	valor	probabilidade
4	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{3}$
9	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{3}$

Probabilidades acumuladas

Investimento 1		Investimento 2	
Valor	$F_2(x)$	valor	$F_2(x)$
$x < 4$	0	$x < 1$	0
$4 \leq x < 5$	$\frac{1}{4}$	$1 \leq x < 6$	$\frac{1}{3}$
$5 \leq x < 9$	$\frac{3}{4}$	$6 \leq x < 8$	$\frac{2}{3}$
$x \geq 9$	1	$x \geq 8$	1

Dominância estocástica de 2ª ordem: exemplo



A distribuição descrita pela curva vermelha domina

Dominância estocástica de 2ª ordem: definição

Dizemos que uma variável aleatória $\tilde{x}$ com distribuição acumulada $F_x(x)$ domina estocasticamente em primeira (SSD) ordem outra variável aleatória $\tilde{y}$ com distribuição acumulada $F_y(y)$ se, e somente se, para todo $w \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{w} F_x(w)dw < \int_{-\infty}^{w} F_y(w)dw.$$

Dominância estocástica de 2ª ordem: definição

Dizemos que uma variável aleatória $\tilde{x}$ com distribuição acumulada $F_x(x)$ domina estocasticamente em primeira (SSD) ordem outra variável aleatória $\tilde{y}$ com distribuição acumulada $F_y(y)$ se, e somente se, para todo $w \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{w} F_x(w)dw < \int_{-\infty}^{w} F_y(w)dw.$$

Condições necessárias
$E(\tilde{x}) \geq E(\tilde{y})$.

$\min(\tilde{x}) \geq \min(\tilde{y})$.

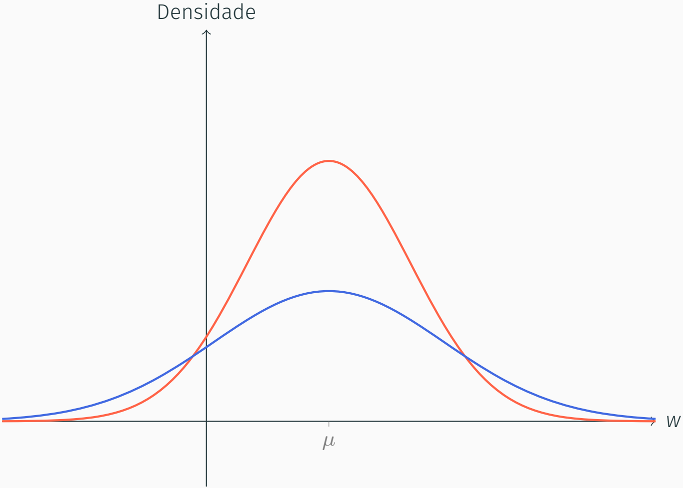
Exemplo: espalhamento com preservação da média

Se $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{z}$, $E\tilde{z} = 0$ e $\text{Cov}(\tilde{x}, \tilde{z}) \geq 0$, dizemos que a distribuição de $\tilde{y}$ é um espelhamento com preservação da média da distribuição de $\tilde{x}$.

Note que, $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{z}$ e $E\tilde{z} = 0$, implicam $E\tilde{y} = E\tilde{x}$ e $\sigma_y \geq \sigma x$

Se a distribuição $\tilde{y}$ é um espalhamento com preservação de média da distribuição de $\tilde{x}$, então, a distribuição de $\tilde{x}$ domina estocasticamente em segunda ordem a distribuição de $\tilde{y}$.

Exemplo: espalhamento com preservação da média



Dominância estocástica de segunda ordem

Se a distribuição de $\tilde{x}$ domine estocasticamente em segunda ordem a distribuição de $\tilde{y}$, então $\tilde{x}$ será preferia por qualquer investidor com aversão ao risco.

Se qualquer investidor com aversão ao risco prefere $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$, então a distribuição de $\tilde{x}$ domina estocasticamente em segunda ordem $\tilde{y}$.

Não dominância exemplo

Investimento 1		Investimento 2	
valor	probabilidade	valor	probabilidade
1	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{3}$
7	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{3}$
12	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{3}$

Não dominância exemplo

Investimento 1		Investimento 2	
valor	probabilidade	valor	probabilidade
1	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{3}$
7	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{3}$
12	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{3}$

Probabilidades acumuladas

Investimento 1		Investimento 2	
Valor	$F_2(x)$	valor	$F_2(x)$
$x < 1$	0	$x < 3$	0
$1 \leq x < 7$	$\frac{1}{4}$	$3 \leq x < 5$	$\frac{1}{3}$
$7 \leq x < 12$	$\frac{3}{4}$	$5 \leq x < 8$	$\frac{2}{3}$
$x \geq 12$	1	$x \geq 8$	1