Teoria do Consumidor: Escolha Envolvendo Risco

Roberto Guena de Oliveira

USP

19 de maio de 2015

Estrutura da aula

1. Motivação
2. Consumo contingente
3. Utilidade Esperada
   - Loterias
   - Utilidde Esperada
4. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
5. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
6. Diversificação

Exemplos

1. Um bilhete de loteria representa alguns milhões a mais ou alguns reais a menos.
2. Quando você sai de casa com um guarda-chuva você leva consigo apenas um peso a mais para carregar (caso não chova) ou proteção contra a chuva (caso chova).
3. Quando você aluga uma casa na praia, você compra um fim-de-semana sob o sol ou um fim-de-semana jogando baralho.
4. Quando você faz seguro de seu caso você compra reembolso de despesas com acidentes (caso eles ocorram) ou dinheiro jogado fora (caso nada aconteça).

Estado da natureza

Definição

Um estado da natureza ou estado do mundo ou, simplesmente, resultado é uma especificação completa dos valores de todas as variáveis relevantes no horizonte de tempo relevante.

Exemplo

Suponha um mundo em que tudo dependa de dois lançamentos seguidos de uma moeda. Notemos por C a ocorrência de cara e por R a ocorrência de coroa. Os estados de natureza são:

$$(C, C), (C, R), (R, C), (R, R)$$

Eventos

Definição

Um evento é um conjunto de estados de natureza. Dizemos que um evento ocorre quando ocorre um de seus elementos.

Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, são, entre outros, eventos: “o primeiro lançamento dar cara” – $\{(C, R), (CC)\}$– e “o primeiro lançamento resulta diferente do segundo lançamento” – $\{(C, R), (R, C)\}$.

Consumo contingente

Um plano de consumo contingente é uma descrição completa das quantidades consumidas de cada bem em cada possível estado de natureza.

Redefinindo mercadoria

Mercadoria

Em mercados contingentes, uma mercadoria é um bem a ser entregue desde que ocorra um determinado evento.

Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, e só existe dinheiro, são, entre outras, mercadorias: “R$ 1,00 caso o primeiro lançamento der cara”, “R$ 1,00 caso os dois lançamentos dêm cara” e “R$ 1,00 independentemente dos resultados dos dois lançamentos.”

Mercados contingentes

São mercados em que há negociação de mercadorias definidas em função de diferentes eventos.

Mercados contingentes: exemplo

Considere um mundo no qual há apenas dois estados de natureza:

Estado b Parte do patrimônio de um consumidor é detruída.

Estado g O patrimônio do consumidor é mantido intacto.

- As preferências desse consumidor dependem apenas do valor de seu patrimônio em cada um desses estados.
- Há um mercado de seguros que oferece um seguro contra o estado b cobrando, nos dois estados de natureza, γ reais por R$1,00 segurado.

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

w_b^0	o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.
w_g^0	o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.
w_b	o patrimônio no estado b
w_g	o patrimônio no estado g
K	o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1-\gamma)$$

Resolvendo as duas equações, de modo a eliminar o K, obtemos

$$w_g + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b^0$$

Exemplo – escolha do consumidor

Se as preferências do consumidor forem representadas pela função de utilidade

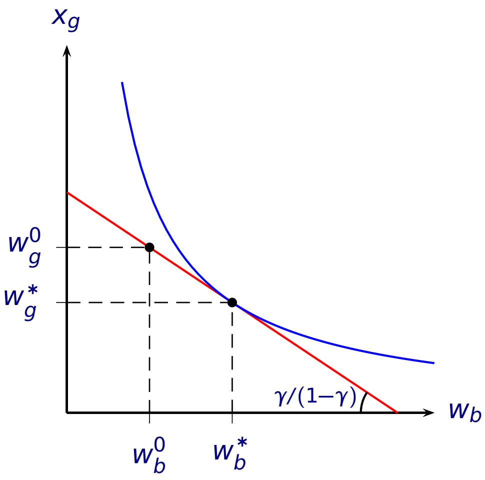
$$U(w_b, w_g),$$

seu problema é escolher w_b e w_g de modo a maximizar essa função, respeitando a restrição orçamentária:

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1-\gamma)$$

Exemplo – escolha do consumidor

Ilustração gráfica



Loterias

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

notação

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

Valor esperado de uma loteria

Caso uma loteria

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

ofereça apenas prêmios monetários, é possível definir o valor esperado dessa loteria por

$$VE = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 + \ldots + \pi_n c_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i c_i$$

Exemplo

Uma pessoa investiu toda sua riqueza w em ações de uma empresa que podem, em um ano, valorizar-se 20% com probabilidade $3/4$ ou desvalorizar-se 10% com probabilidade $1/4$. A riqueza dessa pessoa daqui a um ano pode ser representada pela loteria

$$(1.2w, 0.9w; 0.75, 0.25).$$

O valor esperado dessa loteira, ou seja o valor esperado de sua riqueza para daqui a um ano, é

$$0.75 \times 1.2w + 0.25 \times 0.9w = 1.125w.$$

Utilidade Esperada

John Von Neumann e Oskar Morgenstern [1] mostraram que, dadas algumas hipóteses razoáveis sobre as preferências do consumidor entre loterias, tais preferências podem ser representadas por uma função de utilidade $U(\cdot)$ com a seguinte propriedade:

$$U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2).$$

na qual $u(c_1)$ e $u(c_2)$ são as utilidade de se ganhar os prêmios c_1 e c_2, respectivamente, com 100% de certeza. Qualquer função de utilidade com essa propriedade é chamada de função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern ou de função de utilidade com propriedade utilidade esperada.

[1] *Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Un. Press, 1943*.

Transformações afim

Definição

Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Concavidade

Note que a concavidade ou convexidade de uma função é preservada por transformações monotônicas afim.

Exemplo:

Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade von Neumann-Morgenstern tem a forma funcional $u(x) = K - a/x$, em que a e K são constantes positivas e $x > a/K$. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade p e a reduz à terça parte com probabilidade $1 - p$. Qual deve ser o valor mínimo de p para que o indivíduo aceite participar da loteria? Multiplique a probabilidade encontrada por 100. **R:75**

Estrutura da aula

1. Motivação
2. Consumo contingente
3. Utilidade Esperada
   - Loterias
   - Utilidde Esperada
4. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
5. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
6. Diversificação

Estrutura da aula

1. Motivação
2. Consumo contingente
3. Utilidade Esperada
   - Loterias
   - Utilidde Esperada
4. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
5. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
6. Diversificação

Definições

Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é aveso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Propenção ao risco

Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

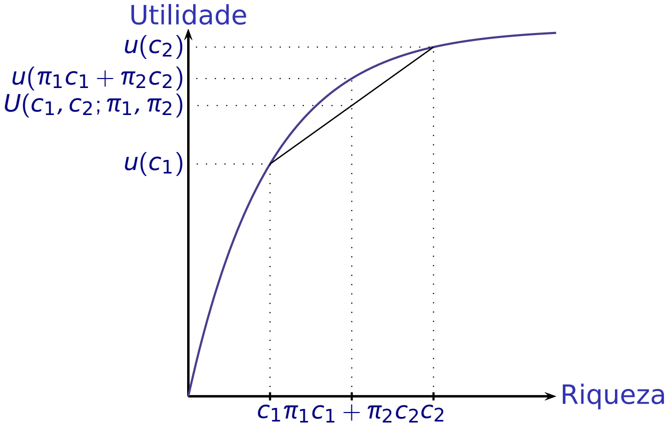
Neutralidade frente ao risco

Diz-se que um consumidor é risco neutro caso ele seja indiferente entre uma loteria com prêmios monetário e o valor esperado dos prêmios dessa loteria.

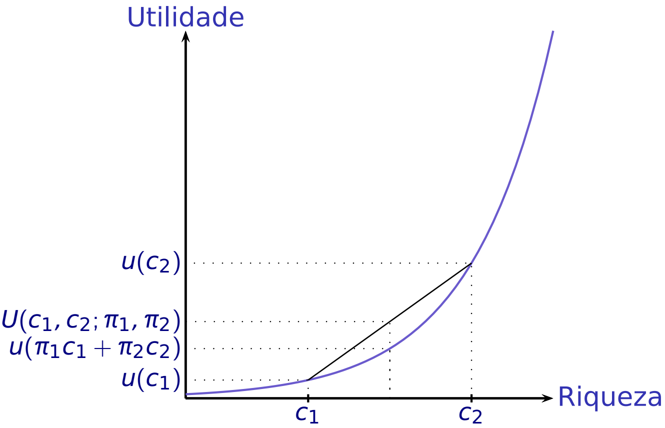
Estrutura da aula

1. Motivação
2. Consumo contingente
3. Utilidade Esperada
   - Loterias
   - Utilidde Esperada
4. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
5. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
6. Diversificação

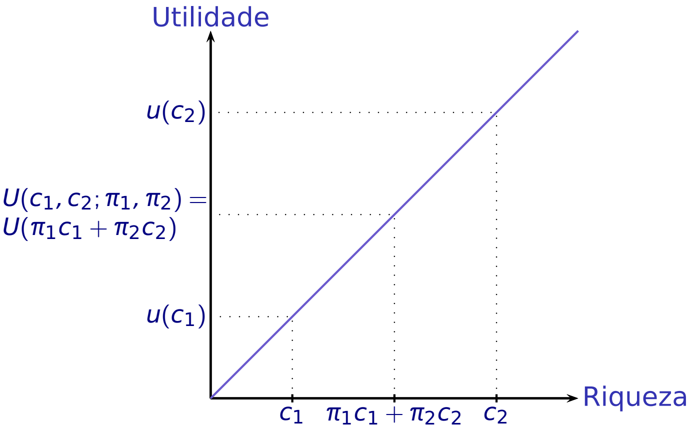
Aversão ao risco: representação gráfica



Propensão ao risco: representação gráfica



Neutralidde frente ao risco: representação gráfica



Estrutura da aula

1 Motivação

2 Consumo contingente

3 Utilidade Esperada
- Loterias
- Utilidde Esperada

4 Posturas diante do risco
- Definições
- Representações gráficas
- Prêmio do risco
- Medida de aversão ao risco

5 Maximização de utilidade esperada
- Exemplos
- Comportamento de indivíduos avessos ao risco

6 Diversificação

Definições

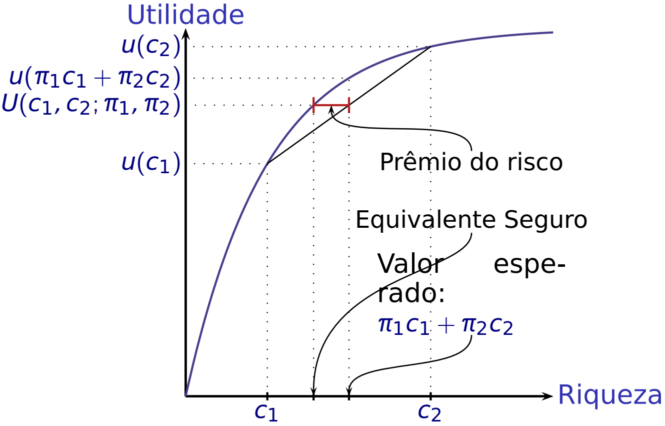
Equivalente Seguro

O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Prêmio do risco

O prêmio do risco de uma loteria monetária é a diferença entre o valor esperado dessa loteria e seu equivalente seguro.

Representação gráfica



Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \dfrac{9+25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Prêmio do risco: $PR = VE - ES = 17 - 16 = 1$

Estrutura da aula

1 Motivação

2 Consumo contingente

3 Utilidade Esperada
- Loterias
- Utilidde Esperada

4 Posturas diante do risco
- Definições
- Representações gráficas
- Prêmio do risco
- Medida de aversão ao risco

5 Maximização de utilidade esperada
- Exemplos
- Comportamento de indivíduos avessos ao risco

6 Diversificação

Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão relativa

$$-w\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão absoluta ao risco constante:

$$u(w) = -e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$$

Aversão relativa ao risco constante

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{para } \alpha \neq 1$$

$$u(w) = \ln w \quad \text{para } \alpha = 1$$

Estrutura da aula

1. Motivação
2. Consumo contingente
3. Utilidade Esperada
   - Loterias
   - Utilidde Esperada
4. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
5. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
6. Diversificação

Exemplo

Um fazendeiro tem a opção de cultivar trigo e batatas. Se fizer sol, cada hectare gerará um lucro de 200 se plantado com trigo e de 100 se plantado com batata. Se chover cada hectare de trigo gerará um lucro de 120 e cada hectare de batata gerará um lucro de 200. A utilidade do fazendeiro é dada por $U(Y) = \ln Y$, sendo Y o lucro obtido. As probabilidades de fazer sol e de chover são iguais. Que proporção de sua terra o fazendeiro deverá destinar ao plantio de cada produto?

Resposta: 75% de trigo e 25% de batata.

Estrutura da aula

1. Motivação
2. Consumo contingente
3. Utilidade Esperada
   - Loterias
   - Utilidde Esperada
4. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
5. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
6. Diversificação

Justiça atuarial

Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

Exemplos

1. Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R$10,00, se for coroa, você pagará R$10,00.
2. Um seguro com preço de R$1.000,00 contra o roubo de um automóvel que vale R$10.000,00 cuja probabilidade é de 10%.

Quanto segurar

Suponha que um consumidor avesso ao risco tenha uma riqueza w que poderá ser reduzida de um valor L, por exemplo, em virtude do roubo de seu automóvel, com probabilidade π. Se uma seguradora oferecer segurar qualquer parcela dessa perda a uma taxa atuarialmente justa, ou seja, cobrando $\gamma = \pi$ reais por real segurado, quanto esse consumidor deverá segurar?

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1-\pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese, $\gamma = \pi$,

$$w_e = w - \pi L$$

Portanto, a riqueza esperada não é afetada pelo valor segurado K, caso o seguro seja atuarialmente justo.

Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor L, todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para L envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.
- Como o consumidor é avesso ao risco e como o valor esperado da riqueza não é afetado, quando $\gamma = \pi$, pela escolha de K. Ele deve preferir $K = L$ a qualquer outra alternativa.

Quando investir em um ativo de risco?

Um consumidor com aversão a risco pode dividir sua riqueza w em dois ativos: um livre de risco com taxa rentabilidade r_f e um ativo com risco com taxa de rentabilidade dependente da ocorrência de dois eventos complementares de acordo com a tabela abaixo:

Evento	taxa de rentabilidade	probabilidade
E_0	r_0	π
E_1	r_1	$1-\pi$

Sob que condições vale a pena investir parte de sua riqueza no ativo com risco?

Solução (a)

Seja x o valor investido no ativo com risco. Então, caso ocorra o evento i, $i = 0, 1$, sua riqueza será igual a

$$(w - x)(1 + r_f) + x(1 + r_i) = w(1 + r_f) + x(r_i - r_f).$$

Assim, a utilidade esperada de nosso consumidor será

$$UE = \pi u[w(1 + r_f) + x(r_0 - r_f)] + (1 - \pi)u[w(1 + r_f) + x(r_1 - r_f)]$$

Na qual u é a função de utilidade de Von-Newman Morgenstern. Se UE for crescente em relação a x em $x = 0$, o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco. Supondo que UE seja diferenciável, ela será crescente quando $x = 0$ e somente se, nesse ponto $\frac{d}{dx}UE > 0$.

Solução (b)

Derivando UE em relação a x obtemos

$$\frac{d}{dx}UE = \pi(r_1 - r_f)u'[w(1+r_f) + x(r_1 - r_f)] \\ + (1-\pi)(r_0 - r_f)u'[w(1+r_f) + x(r_0 - r_f)].$$

Quando $x = 0$, isso se reduz a

$$\pi(r_0 - r_f)u'[w(1+r_f)] + (1-\pi)(r_1 - r_f)u'[w(1+r_f)] \\ = [\pi r_0 + (1-\pi)r_1 - r_f]u'[w(1+r_f)].$$

Assumindo que a utilidade seja crescente em relação a riqueza, concluímos que $\frac{d}{dx}UE > 0$ quando $x = 0$ se, e apenas se,

$$\underbrace{\pi r_0 + (1-\pi)r_1}_{\substack{\text{rentabilidade} \\ \text{esperada do} \\ \text{ativo com risco}}} > r_f.$$

Diversificação e risco: um exemplo

- 12 ovos devem ser transportadas em cestos.
- Probabilidade de um cesto cair – 50%.
- Comparação das probabilidades caso os ovos sejam transportados em 1 ou 2 cestos:

nº cestos	Ovos salvos		
	12	6	0
1	50%	0	50%
2	25%	50%	25%

- A divisão dos ovos em dois cestos reduziu à metado o risco de perda total dos ovos.

Um exemplo mais extenso

nº de cestas: 1 , 2 , 5 , 10 , 100 , 1000