UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de
Ribeirão Preto – Departamento de Economia

REC02101 – MICROECONOMIA – PRIMEIRA PROVA (2012)

ROBERTO GUENA

(1) Esboçe um mapa de curvas de indiferenças para cada uma das funções de utilidade abaixo. Indique pontos, e ângulos representativos, quando for o caso:
  (a) $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\}$.
  (b) $u(x_1, x_2) = \max\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\}$.

SOLUÇÃO

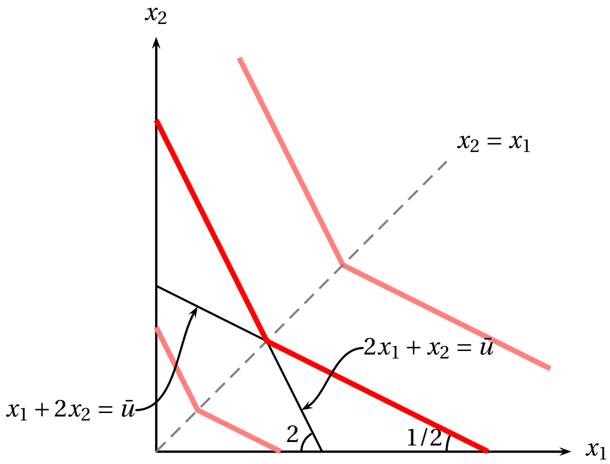
(a) A curva de indiferença é o conjunto dos pontos (x_1, x_2) para os quais a função de utilidade é constante. Assim, para um dado nível de utilidade $\bar{u}$, queremos achar os valores de x_1 e x_2

$$u(x_1, x_2) = \bar{u}, \text{ ou seja, } \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} = \bar{u}$$

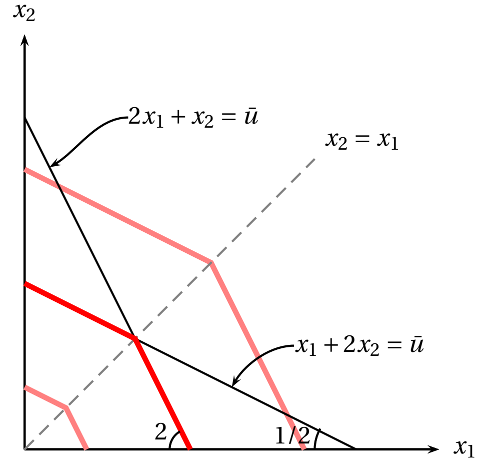
Como

$$\min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \text{caso } x_1 \leq x_2 \\ x_1 + 2x_2 & \text{caso } x_1 \geq x_2 \end{cases},$$

queremos encontrar o conjuntos dos pares (x_1, x_2) tais que $2x_1 + x_2 = \bar{u}$ caso $x_1 \leq x_2$ e, caso $x_1 \geq x_2$, $x_1 + 2x_2 = \bar{u}$.
Na figura abaixo, desenhamos os gráficos das funções $2x_1 + x_2 = \bar{u}$ e $x_1 + 2x_2 = \bar{u}$. A linha tracejada corresponde ao gráfico da função identidade. Abaixo e à direita dessa linha, temos $x_1 > x_2$ e, portanto, nessa região, a função de utilidade assume valor $x_1 + 2x_2$. Acima e à esquerda dessa curva, $x_1 < x_2$ e, portanto, a função de utilidade assume valor $2x_1 + x_2$. Assim, nossa curva de indiferença é descrita por $2x_1 + x_2 = \bar{u}$ acima e à esquerda da linha de identidade e por $2x_1 + x_2 = \bar{u}$ abaixo e à direita dessa reta, conforme os trechos destacados em vermelho. Também desenhamos, em vermelho mais fraco, outras duas curvas de indiferença. Note que todas elas têm inclinação igual a -2 à esquerda da linha de identidade e inclinação igual a $1/2$ à direita dessa linha.



(b) Nesse caso, a nossa curva de indiferença será dada pelos pares (x_1, x_2) tais que $\max\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} = \bar{u}$. Assim queremos encontrar o conjunto de pares ordenados (x_1, x_2) tais que $x_1 \geq x_2$ e $2x_1 + x_2 = \bar{u}$ ou $x_1 \leq x_2$ e $x_1 + 2x_2 = \bar{u}$. Mais uma vez, na figura que se segue, desenhamos uma linha tracejada representando os pontos para os quais $x_2 = x_1$. À direita e abaixo dessa linha, $x_1 > x_2$ e, portanto, a curva de indiferença é descrita pelo gráfico da relação $2x_1 + x_2 = \bar{u}$. À esquerda e acima dessa linha, $x_1 < x_2$ e, portanto, a curva de indiferença é descrita pelo gráfico de $x_1 + 2x_2 = \bar{u}$. A curva de indiferença associada ao nível de utilidade $\bar{u}$ é dada pelas união dos trechos destacados em vermelho desses dois gráficos. A título de ilustração, também desenhamos mais duas curvas de indiferença. Todas elas têm inclinação igual a $-1/2$ no trecho à esquerda da linha de identidade e inclinação igual a -2 no trecho à direita dessa linha.



(2) O senhor R não é exatamente um apreciador de comidas saudáveis. Ele considera que há apenas dois atributos desejáveis em um alimento: a quantidade de gordura e a quantidade de açúcar. Ademais ele considera gordura e açúcar complementos perfeitos, sendo sua função de utilidade expressa em termos desses dois itens dada por $U(G, A) = \min\{G, A\}$ na qual G é a quantidade ingerida de gordura e A a quantidade ingerida de açúcar, sendo ambas as quantidades medidas em gramas:. Na confeitaria que o sr. R frequenta há apenas dois tipos de doces, os dois feitos apenas a partir de açúcar e gordura: o colestelícia que é feito com 1g açúcar para cada 2g de gordura e o diabelicioso que é feito com 2g de açúcar para cada grama de gordura. Encontre uma função de utilidade que represente as preferências do sr. R em função das quantidades consumidas desses dois doces e desenhe uma curva de indiferença típica para essas preferências.

SOLUÇÃO

Seja c a quantidade consumida de colesterícia e d a quantidade consumida de diabelicioso. Como cada grama de colesterícia contém 2 grama de gordura e cada grama de diabelicioso contém 1 grama de gordura, a quantidade total de gordura consumida pelo sr. R é dada por

$$G = c + 2d.$$

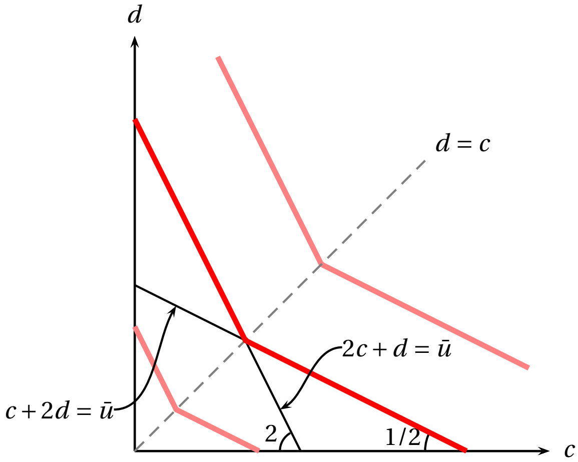
De modo similar, como cada grama de colesterícia contém 1 grama de açúcar e cada grama de diabelicioso contém 2 grama de açúcar, a quantidade total de açúcar consumida pelo sr. R é

$$A = 2c + d.$$

Substituindo essas expressões na função de utilidade, obtemos a utilidade do senhor R em função das quantidades consumidas dos dois doces:

$$u(c, d) = U(2c + d, c + 2d) = \min\{2c + d, c + 2d\}.$$

Note que, chamando c de x_1 e d de x_2, trata-se da mesma função de utilidade do item 1a da questão 1. Assim, o mapar de curvas de indiferença do sr. R é semelhante ao da resposta a esse item. Reproduzimos tal mapa abaixo, com a mudança adequada nos rótulos dos eixos.



(3) A função de utilidade de um consumidor é

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Sua renda é 100. O preço do bem 1 é 3 e o preço do bem 2 é 2. Determine quanto ele deverá consumir de cada bem.

SOLUÇÃO

Desde que haja uma solução interior, esta será um ponto dobre a linha de restrição orçamentária ($p_1 x_2 + p_2 x_2 = m$, ou seja, $3x_1 + 2x_2 = 100$) caracterizada pela igualdade entre o valor absoluto da taxa marginal de substituição e o preço relativo $p_1/p_2 = 3/2$. Para encontrar a TMS, calculamos as utildiades marginais dos dois bens:

$$\text{UMg}_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{x_2(x_1 + x_2) - x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}$$

e

$$\text{UMg}_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{x_1(x_1 + x_2) - x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{x_1^2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

Assim, o módulo da taxa marginal de substituição é

$$|\text{TMS}| = \frac{\text{UMg}_1}{\text{UMg}_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2.$$

E o equilíbrio é caracterizado por

$$\begin{cases} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{3}{2} \\ 3x_1 + 2x_2 = 100. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema para x_1 e x_2, encontramos as quantidades consumidas dos dois bens:

$$x_1 = \frac{100}{3 + \sqrt{6}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{100}{2 + \sqrt{6}}.$$

(4) Uma consumidora tem suas preferências representadas pela seguinte função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

na qual x_1 é a quantidade que ela consome do bem 1 e x_2 é a quantidade que ela consome do bem 2. O preço do bem 2 é $p_2 = 4$. Esboce:

(a) A curva de demanda dessa consumidora pelo bem 1 considerando que sua renda seja $m = 100$. .

(b) A curva de Engel dessa consumidora relativa ao bem 1 considerando $p_1 = 3$.

(c) A curva de Engel dessa consumidora relativa ao bem 1 considerando $p_1 = 5$.

Em sua resposta, marque as coordenadas de todos os pontos relevantes, assim como as inclinações dos segmentos de reta que você desenhar. Respostas sem essas informações serão consideradas erradas.

Solução

Para responder aos itens dessa questão, precisamos primeiramente, encontrar a função de demanda pelo bem 1. Usaremos a notação usual: x_1 e x_2 significam a quantidade consumida do bem 1 e 2, respectivamente, p_1 e p_2 seus respectivos preços e m significa a renda da consumidora. Note, antes de tudo, que as curvas de indiferença da função de utilidade apresentada têm a forma $x_1^2 + x_2^2 = u$, ou seja a forma de uma circunferência com raio $\sqrt{u}$. Isso significa que as preferências são côncavas. Se você não se convenceu, observe que $UMg_1 = 2x_1$, $UMg_2 = 2x_2$, e, portanto, o módulo da taxa marginal de substituição,

$$|TMS| = \frac{x_1}{x_2},$$

é crescente da esquerda para a direita, o que indica que se tratam de preferências côncavas. Sabemos que, quando as preferências são côncavas, o equilíbrio do consumidor é caracterizado por um solução de canto. Assim, ou nossa consumidora escolherá apenas o bem 1, consumindo m/p_1 unidades desse bem, ou ela escolherá apenas o bem 2, consumindo m/p_2 unidades desse bem. Ela escolherá consumir apenas o bem 1 caso

$$U\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) > U\left(0, \frac{m}{p_2}\right),$$

apenas o bem 2 caso

$$U\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) > U\left(0, \frac{m}{p_2}\right),$$

e será indiferente entre especializar-se no consumo do bem 1 ou no consumo do bem 2 (porém sem combinar o consumo dos dois bens) caso

$$U\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) = U\left(0, \frac{m}{p_2}\right).$$

Sabendo que $p_2 = 4$, função de demanda de nossa consumidora é, portanto

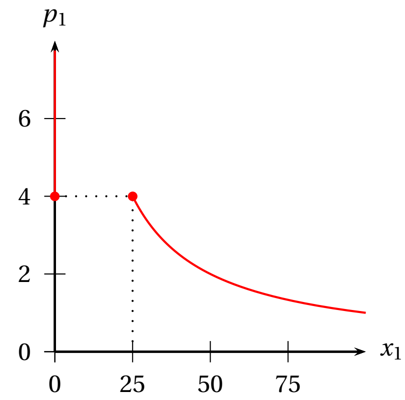
$$\left(x_1(p_1, 4, m), x_2(p_1, 4, m)\right) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) & \text{caso } p_1 < 4 \\ \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) \text{ ou } \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) & \text{caso } p_1 = 4 \\ \left(0, \frac{m}{4}\right) & \text{caso } p_1 > 4. \end{cases}$$

Usaremos essa função de demanda para responder os itens da questão.

(a) Caso a renda da consumidora seja $m = 10$, a função de demanda, passa a ser

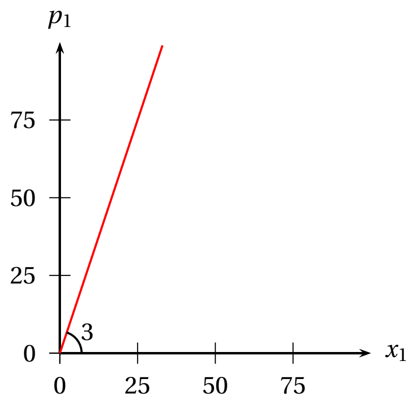
$$\left(x_1(p_1, 4, 100), x_2(p_1, 4, 100)\right) = \begin{cases} \left(\frac{100}{p_1}, 0\right) & \text{caso } p_1 < 4 \\ \left(\frac{100}{p_1}, 0\right) \text{ ou } \left(\frac{100}{p_1}, 0\right) & \text{caso } p_1 = 4 \\ \left(0, \frac{100}{4}\right) & \text{caso } p_1 > 4. \end{cases}$$

Resta-nos apenas fazer o gráfico dessa função para descrever a curva de demanda pelo bem 1:

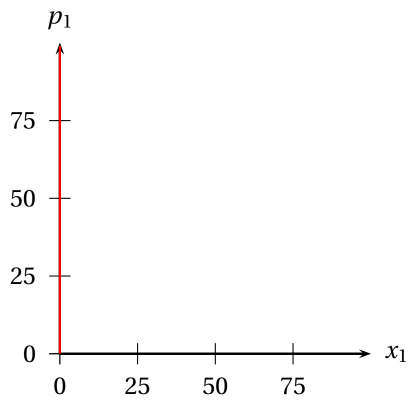


Os pontos vermelhos nas coordenadas $(0,4)$ e $(25,4)$ indicam que, quando o preço é $p_1 = 4$, a consumidora pode escolher tanto zero quanto 4 unidades do bem 1.

(5) Caso o preço do bem 1 seja $p_1 = 3$, teremos $p_1 < 4 = p_2$, o que indica que a consumidora deverá especializar-se no consumo do bem 1 consumindo a quantidade $x_1 = m/p_1 = m/3$. A figura abaixo mostra como deve ser a curva de Engel do bem 1 nesse caso:



(6) Com $p_1 = 5$, $p_1 > p_2 = 4$ o que implica $x_1 = 0$. Nesse caso, a curva de Engel deve coincidir com o eixo vertical, conforme descreve a figura abaixo.



(7) Considere a seguinte função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \left[x_1^\rho + x_2^\rho\right]^{1/\rho}$$

na qual $\rho \leq 1$. Para que valores de ρ os bens 1 e 2 serão substitutos? Para que valores eles serão complementares?

SOLUÇÃO

As utilidades marginais dos bens 1 e 2 são

$$UMg_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1^\rho + x_2^\rho\right]_{1/\rho} = x_1^{\rho-1}\left[x_1^\rho, x_2^\rho\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

e

$$UMg_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2^\rho + x_2^\rho\right]^{1/\rho} = x_2^{\rho-1}\left[x_1^\rho, x_2^\rho\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

As condições de utilidade máxima de primeira ordem requerem que

$$\begin{cases} \frac{UMg_1}{UMg_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

Resolvendo para x_1 e x_2, encontramos as funções de demanda dos dois bens:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_1^{\frac{1}{1-\rho}} p_2^{-\frac{\rho}{1-\rho}}}$$

e

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2 + p_1^{-\frac{\rho}{1-\rho}} p_2^{\frac{1}{1-\rho}}}.$$

Derivando $x_1(p_1, p_2, m)$ em relação a p_2 e $x_2(p_1, p_2, m)$ em relação a p_1, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial p_2} x_1(p_1, p_2, m) = m\frac{\rho}{1-\rho}\frac{p_1^{\frac{1}{1-\rho}} p_2^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}}{\left[p_1 + p_1^{\frac{1}{1-\rho}} p_2^{\frac{\rho}{1-\rho}}\right]^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial p_1} x_2(p_1, p_2, m) = m\frac{\rho}{1-\rho}\frac{p_2^{\frac{1}{1-\rho}} p_1^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}}{\left[p_2 + p_2^{\frac{1}{1-\rho}} p_1^{\frac{\rho}{1-\rho}}\right]^2}$$

Considerando p_1, p_2 e m positivos, o sinal das duas derivadas é o mesmo que o de $\rho/(1-\rho)$. Caso esse sinal seja positivo, ou seja, caso $0 < \rho < 1$, os dois bens serão substitutos. Caso o sinal seja negativo, isto é, caso $\rho < 0$, os dois bens serão complementares. Note que no caso em que $\rho = 1$, a função de utilidade se reduz a $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e, portanto, os dois bens são substitutos perfeitos. Note também que a função de utilidade apresentada não é definida para $\rho = 0$.

Assim, os dois bens serão substitutos caso $0 < \rho \leq 1$ e complementares caso $\rho < 0$.