UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto
Departamento de Economia

REC 1214 — MICROECONOMIA II — EXERCÍCIOS SOBRE MONOPÓLIO

PROF. DR. ROBERTO GUENA DE OLIVEIRA

(1) O seguinte jogo é oferecido a uma consumidora: um número inteiro positivo será sorteado ao acaso. Caso esse número seja par, ela deverá pagar um montante k. Caso esse número seja ímpar, ela receberá um valor $2k$. A função de utilidade de von Neuman-Morgenstern dessa consumidora é $u(w) = \sqrt{w}$ na qual w é sua riqueza medida em milhares de reais. Sabendo que a riqueza inicial dessa consumidora é de R$20.000,00 ($w = 20$). Pergunta-se:
 (a) Se ela puder escolher o valor k, que valor escolheria?
 (b) Qual seria o aumento em sua riqueza que geraria o ganho de utilidade equivalente ao ganho obtido com o jogo com $k = 10$?
 (c) Suponha que o jogo seja alterado de tal forma que a consumidora tenha que pagar k com probabilidade $1-\pi$ e receba $2k$ com probabilidade π. Nessas circunstâncias, considerando $k = 10$, qual é o valor de π a partir do qual a consumidora aceita participar do jogo?

(2) Ao sair de casa pela manhã, um indivíduo tem que decidir se leva consigo um guarda-chuva. Se chover e ele não estiver com o guarda-chuva, sua utilidade cai três unidades. Se chover e ele estiver com o guarda-chuva, sua utilidade cai apenas uma unidade. Se não chover, o esforço de carregar o guarda-chuva reduz sua utilidade de $\frac{1}{2}$ unidade. Qual é a probabilidade de chover mínima necessária para fazer com que ele decida levar o guarda-chuva consigo?

(3) Um fazendeiro tem a opção de cultivar trigo e batatas. Se fizer sol, cada hectare gerará um lucro de 200 se plantado com trigo e de 100 se plantado com batata. Se chover cada hectare de trigo gerará um lucro de 120 e cada hectare de batata gerará um lucro de 200. A utilidade do fazendeiro é dada por $U(Y) = \ln Y$, sendo Y o lucro obtido. As probabilidades de fazer sol e de chover são iguais. Que proporção de sua terra o fazendeiro deverá destinar ao plantio de cada produto?

(4) Um apostador tem inicialmente uma riqueza igual a R$140,00. Alguém sugere a ele o seguinte jogo: ele deve retirar ao acaso uma carta de um baralho que possui 13 cartas de cada naipe (copas, ouros, paus e espadas). Caso a carta escolhida seja de espadas, ele recebe um prêmio no valor de $\frac{3}{2}K$. Caso contrário, ele deve pagar um valor igual a K. Sabendo que a função de utilidade com propriedade de utilidade esperada desse apostador é $v(Y) = Y^2$ na qual Y é sua riqueza, determine o valor de K que o deixará deixará indiferente entre aceitar ou não o jogo proposto. Se K for menor do que esse valor, ele deverá aceitar ou rejeitar o jogo?

(5) A função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern de uma consumidora é $U(w) = \ln w$ na qual w é o valor a ser assumido por sua riqueza. Ela possui uma riqueza segura da qual pode aplicar em um ativo que sofrerá uma valorização de 50% com probabilidade de 75% ou uma desvalorização de 90% com probabilidade de 25%. Determine a fração de sua riqueza inicial que ela deverá investir em tal ativo.

(6) João pretende comprar um carro usado. Sua função de utilidade com propriedade utilidade esperada depende do tamanho de sua riqueza e de um índice de qualidade que ele atribui ao carro que comprar e é dada por $u(w,v) = \ln(w+v)$, sendo que, w é a riqueza de João e v é o índice de qualidade do carro que comprou e, $v = 0$ caso João não compre o carro. A riqueza de João é de R$ 20.000,00. João acredita que o carro que pretende comprar pode ter um índice de qualidade $v_1 =$ R$ 10.000 com 50% de probabilidade ou um índice de qualidade $v_2 =$ R$ 1.000 com 50% de probabilidade. Qual o preço máximo que João aceita pagar por esse carro.

(7) Antônio tem um problema semelhante ao de João. Porém, para Antônio, o carro que ele vai comprar pode ter qualquer nível de qualidade entre zero o o valor de sua riqueza atual de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades. Para simplificar nossa vida, convencionemos que a riqueza de Antônio seja igual a 1, isto é, meçamos os valores em múltiplos dessa riqueza. Assim, a riqueza atual de Antônio é $\varpi = 1$ e a qualidade v do automóvel pode assumir qualquer valor entre zero e 1 e a função de densidades de probabilidade é

$$\phi(v) = \begin{cases} 1 & \text{caso } 0 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Se a função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern de Antônio é $u(w,v) = -\frac{1}{w+v}$, na qual w é a riqueza de Antônio, determine o preço máximo que ele está disposto a pagar pelo automóvel de qualidade desconhecida.

(8) Considere a seguinte função de utilidade com a propriedade utilidade esperada:

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

(a) Mostre que essa função representa as preferências de um consumidor com aversão relativa ao risco constante.
(b) Mostre que $\lim_{\alpha \to 1} u(w) = \ln w$.

SOLUÇÕES

(1)

(a) Uma vez que a probabilidade de que um número par seja sorteado é de 50%, o mesmo ocorrendo com a probabilidade de que um número ímpar seja sorteado, a função de utilidade esperada de nossa consumidora será dada por

$$U^e = \frac{\sqrt{20-k}}{2} + \frac{\sqrt{20+2k}}{2}.$$

Caso ela possa, deve escolher k de modo a maximizar essa utilidade esperada. A condição de 1^a ordem para que isso aconteça é

$$\frac{d\,U^e}{dk} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{20+2k}} - \frac{1}{4\sqrt{20-k}} = 0$$

Resolvendo essa equação encontramos $k = 10$.
Verifiquemos o sinal da segunda derivada da função de utilidade esperada para ver se essa função atinge efetivamente um máximo em $k = 5$.

$$\frac{d^2U^e}{dk^2} = -\frac{(20+2k)^{-3/2}}{2} - \frac{(20-k)^{-3/2}}{8}$$

Essa segunda derivada assume valor negativo para todos os valores de k para os quais a função de utilidade esperada é definida ($k \leq 20$), e, em particular, para $k = 10$. Assim, essa função atinge valor máximo em $k = 10$.
Portanto, ela escolheria $k = \text{R\$}10.000,00$.

(b) A utilidade esperada de nossa consumidora quando $k = 10$ é

$$\frac{\sqrt{20 + 2 \times 10}}{2} + \frac{\sqrt{20 - 10}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

O aumento de riqueza Δw que geraria o mesmo ganho que o jogo é aquele que faz com que

$$\sqrt{20 + \Delta w} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

Resolvendo essa equação obtemos

$$20 + \Delta w = \frac{90}{4} \Rightarrow \Delta w = 2,5$$

Logo, o aumento de riqueza que geraria um ganho de utilidade equivalente ao ganho obtido com o jogo com $k = \text{R\$}10.000,00$ é R\$2.500,00.

(c) Nessas novas circunstâncias, a utilidade esperada da consumidora quando ela aceita participar do jogo passa a ser

$$U^e = \pi\sqrt{20 + 2 \times 10} + (1 - \pi)\sqrt{20 - 10} = \pi\sqrt{10} + \sqrt{10}$$

O valor mínimo de π para o qual ela aceita participar do jogo é aquele que iguala essa utilidade esperada à utilidade que ela obteria caso não participasse do jogo:

$$\pi\sqrt{10} + \sqrt{10} = \sqrt{20}$$

Isto é,

$$\pi = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414214$$

(2) A perda esperada na utilidade desse indivíduo quando ele leva o guarda-chuva consigo é

$$\pi 1 + (1 - \pi)\frac{1}{2} = \frac{\pi + 1}{2}$$

Caso ele não leve o guarda-chuva, essa perda será de

$$3\pi.$$

A condição para que ele leve o guarda-chuva é que ele tenha maior perda esperada em sua utilidade ao não levar o guarda-chuva do que ao levar o guarda-chuva, ou seja,

$$3\pi \geq \frac{\pi + 1}{2} \Rightarrow \pi \geq \frac{1}{5}.$$

Logo, ele deverá levar o guarda-chuva caso a probabilidade de chuva seja superior a 20%.

(3) Seja A a área total da fazenda e t a fração dessa área dedicada ao cultivo de trigo de tal sorte que At seja a área total dedicada ao cultivo de trigo e $(1 - t)A$, a área dedicada ao cultivo de batatas. Desse modo, caso faça sol, o lucro do fazendeiro será

$$L_s = 200At + 10(1 - t)A = 100At + 100A = 20A(5t + 5).$$

Caso chova, esse lucro será de

$$L_c = 120At + 200(1 - t)A = 200A - 80At = 20A(10 - 4t)$$

Dado que as probabilidades de chuva e sol são iguais, a utilidade esperada do fazendeiro será

$$U^e = \frac{U(L_s)}{2} + \frac{U(L_c)}{2} = \frac{\ln[20A(5t+5)]}{2} + \frac{\ln[20A(10-4t)]}{2}$$
$$= \ln(20A) + \frac{\ln[(5t+5)(10-4t)]}{2}$$

Visto que o logaritmo é uma função monotônica crescente, essa utilidade esperada será máxima quando $(5t+5)(10-4t)$ for máximo. Isso ocorre quando

$$5(10t-4) - 4(5t+5) = 0$$

Resolvendo para t obtemos $t = 3/4$. Esta é a proporção de suas terras que o agricultor deverá destinar ao cultivo de trigo.

(4) Basta igualar a utilidade esperada do apostador caso ele aceite o jogo com sua utilidade caso não aceite o jogo. Visto que a probabilidade da carta escolhida ser de espadas é de $1/4$ essa igualdade é dada por:

$$\frac{(140+\frac{3}{2}k)^2}{4} + \frac{3(140-k)^2}{4} = 140^2$$

Do lado esquerdo temos a utilidade esperada do apostador ao aceitar o jogo e, do lado direito, a utilidade desse apostador caso ele não aceite o jogo. Expandindo essa expressão, ficamos com

$$\frac{140^2}{4} + \frac{3}{4}140k + \frac{9}{16}k^2 + \frac{3}{4}140^2 - \frac{3}{2}140k + \frac{3}{4}k^2 = 140^2$$

Subtraindo 140^2 dos dois lados e fatorando o resultado, obtemos

$$\frac{21}{4}k\left(\frac{k}{4} - 20\right) = 0$$

sendo que o lado esquerdo dessa igualdade corresponde à diferença entre a utilidade esperada do apostador ao aceitar o jogo e sua utilidade quando não aceita o jogo. Há dois valores de k para os quais ele é indiferente entre aceitar ou não o jogo: $k = 0$, o que faria com que o jogo não afetasse sua riqueza, e o valor que igual o termo entre parênteses a zero, $k = 80$. Podemos também ver que, para qualquer valor positivo de k com $k < 80$ a diferença entre a utilidade esperada com o jogo e a utilidade sem o jogo é negativa. Esta só passa a ser positiva quanto $k > 80$. Assim, o jogador ficará indiferente entre aceitar ou não o jogo caso $k = 0$ ou $k = 80$. Para $0 < k < 80$, ele preferirá não aceitar o jogo. O jogo será a opção preferida caso $k > 80$.

(5) Seja x a fração de sua riqueza que a consumidora investiu no ativo com risco. Nesse caso, sua utilidade esperada passa a ser:

$$U^E = \frac{3}{4}\ln\left[\frac{3}{2}wx + (1-x)w\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{10}wx + (1-x)w\right] =$$
$$\ln w + \frac{3}{4}\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(1 - \frac{9}{10}x\right).$$

Ela deve escolher x de modo a maximizar essa utilidade esperada. A condição de primeira ordem é $dU^E/dx = 0$, isto é

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}x} &= 0\\ \frac{1}{2+x} - \frac{3}{10-9x} &= 0\\ 10-9x &= 6+3x\\ 12x &= 4\\ x &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

A condição de máximo de segunda ordem está assegurada pois

$$\frac{d^2U^E}{dx^2} = -\frac{3}{4}\frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{4}\frac{9}{(10-9x)^2} < 0.$$

Desse modo, ela deverá investir $1/3$ de sua riqueza no ativo com risco.

(6) O preço máximo que ele está disposto a pagar pelo automóvel é aquele que iguala sua utilidade esperada no caso em que ele adquire o automóvel à utilidade que ele obterá caso não compre o automóvel:

$$\frac{1}{2}\ln(20.000 + 10.000 - p) + \frac{1}{2}\ln(20.000 + 1.000 - p) = \ln(20.000).$$

Resolvendo para p,

$$\begin{aligned}(30.000-p)(21.000-p) &= (20.000)^2\\ 630 - 51\frac{p}{1.000} + \left(\frac{p}{1.000}\right)^2 &= 400\\ \left(\frac{p}{1.000}\right)^2 - 51\frac{p}{1.000} &+ 230\\ \frac{p}{1.000} &= \frac{51 \pm \sqrt{2601-920}}{2}\\ p = 5.000 \quad \text{ou} \quad p &= 46.000.\end{aligned}$$

Como $p = 46.000$ não resolve a equação inicial, pois deixaria o argumento do logaritmo negativo, concluímos que o preço máximo que ele está disposto a pagar pelo automóvel é $p = 5.000$.

(7) Caso Antônio compre carro, sua utilidade esperada será dada por

$$U^E = -\int_0^1 u(1-p+v)\phi(v)dv = \int_0^1 \frac{1}{1+v-p}dv = -\ln(2-p) + ln(1-p).$$

Igualando essa utilidade esperada à utilidade que ele obteria caso não comprasse o automóvel, obtemos o preço máximo que ele aceita pagar:

$$-\ln(2-p) + \ln(1-p) = -1 \Rightarrow \frac{2-p}{1-p} = e \Rightarrow p = \frac{e-2}{e-1} \approx 0,42.$$

(8) (a) $u'(w) = w^{-\alpha}$, $u''(w) = -\alpha w^{-\alpha-1}$. Desse modo, o coeficiente de aversão relativo ao risco será

$$-w\frac{u''(w)}{u'(w)} = w\frac{\alpha w^{-\alpha-1}}{w^{-\alpha}} = \alpha.$$

Portanto, a aversão relativa ao risco é constante.

(b) Empregamos a regra de L'Hospital na segunda passagem abaixo:

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{w^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\lim_{1-\alpha\to 0}\frac{w^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\lim_{1-\alpha\to 0}\frac{e^{1-\alpha}\ln w}{1}=\ln w.$$