Teoria do Consumidor:

Excedente do consumidor e equação de Slutsky

Roberto Guena de Oliveira

USP

16 de maio de 2011

Sumário

A função de utilidade indireta

Função dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar individual

Equação de Slutsky

O problema de minimização dos gastos

Sumário

A função de utilidade indireta
- Definição

Função dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar individual

Equação de Slutsky

O problema de minimização dos gastos

Função de utilidade indireta

Definição

Sejam as funções de demanda $x_1(p_1, p_2, m)$ e $x_2(p_1, p_2, m)$ resultantes da solução do problema de maximizar a função de utilidade $U(x_1, x_2)$ dada a restrição orçamentária $p_1x_1 + p_2x_2 = m$. A função de utilidade indireta, notada por $V(p_1, p_2, m)$, retorna, para os valores de p_1, p_2 e n a utilidade obtida ao se resolver esse problema

$$V(p_1, p_2, m) = U(x_1(p_1, p_2, m),)x_2(p_1, p_2, m))$$

Exemplo – preferências Cobb-Douglas

Função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = {x_1}^a {x_2}^{1-a}, \quad 0 < a < 1$$

Funções de demanda

$$x_1(p_1, p_2, m) = a\frac{m}{p_1} \quad \text{e} \quad x_2(p_1, p_2, m) = (1-a)\frac{m}{p_2}$$

Função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \left[a\frac{m}{p_1}\right]^a \left[(1-a)\frac{m}{p_2}\right]^{1-a}$$

$$= a^a(1-a)^{1-a}\frac{m}{{p_1}^a {p_2}^{1-a}}$$

Sumário

A função de utilidade indireta

Função dispêndio e demanda compensada

- Função dispêndio

Medidas de variação de bem estar individual

Equação de Slutsky

O problema de minimização dos gastos

Definições

A função de dispêndio, notada por $e(p_1, p_2, u)$, é uma função que retorna a resposta à seguinte questão: que renda deve ser dada a um consumidor para garantir que, com essa renda, dados os preços p_1 e p_2, ele obtenha, ao maximizar sua utilidade, o nível de utilidade u? Desse modo, $e(p_1, p_2, u)$ é definida por

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = a^a(1-a)^{1-a}\frac{m}{{p_1}^a{p_2}^{1-a}}$$

Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

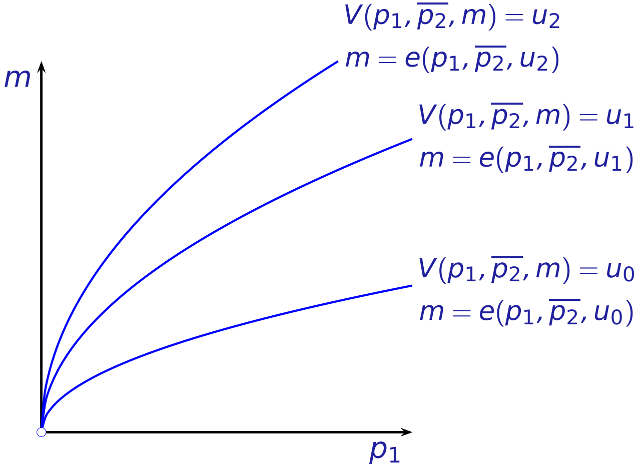
$$\Rightarrow a^a(1-a)^{1-a}\frac{e(p_1, p_2, u)}{{p_1}^a{p_2}^{1-a}} = u$$

$$\Rightarrow e(p_1, p_2, u) = u\frac{{p_1}^a{p_2}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}$$

Observações

- Se considerarmos u uma constante, a função $e(p_1, p_2, u)$ passa a ter apenas dois argumentos e seu gráfico descreverá a superfície de iso-utilidade indireta associada ao nível de utilidade u.
- Se adicionalmente considerarmos p_2 uma constante, a função $e(p_1, p_2, u)$ para a ter apenas um argumento variável e seu gráfico será uma curva de iso-utilidade indireta.

Função dispêndio e curvas de iso-utilidade indireta



Funções de demanda compensada

Definimos as funções de demanda compensada ou hicksiana pelos bens 1 e 2, notadas respectivamente por $h_1(p_1, p_2, u)$ e $h_2(p_1, p_2, u)$ como

$$h_1(p_1, p_2, u) = x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

e

$$h_2(p_1, p_2, u) = x_2(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

Funções demanda e dispêndio

$$x_1(p_1, p_2, m) = a\frac{m}{p_1}$$

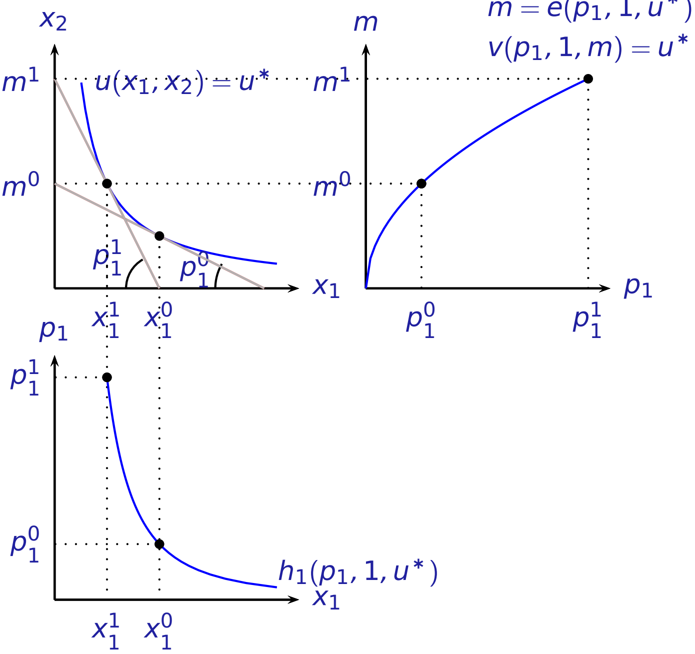
$$e(p_1, p_2, u) = u\frac{{p_1}^a {p_2}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}$$

Função demanda compensada (bem 1)

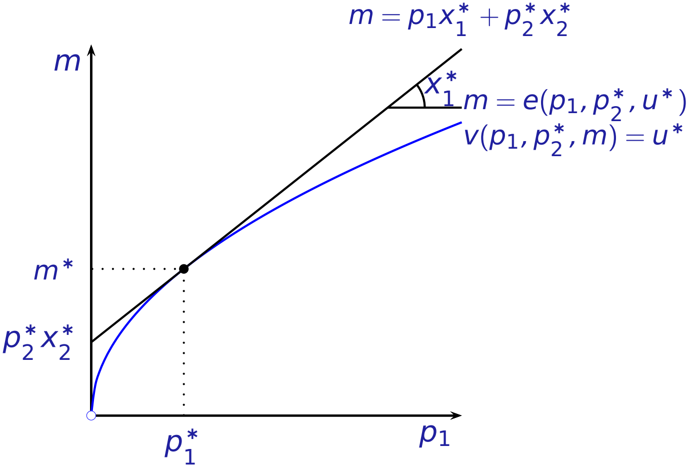
$$h_1(p_1, p_2, u) = x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

$$= a\frac{u\frac{{p_1}^a {p_2}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}}{p_1} = u\left[\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right]^{1-a}$$

Exemplo: derivando curvas com $p_2 = 1$



$e(p_1, p_2, u)$ é côncava em relação a p_1



$$x_1^* = h_1(p_1^*, p_2^*, u^*) \quad x_2^* = h_2(p_1^*, p_2^*, u^*)$$

$$u^* = U(x_1^*, x_2^*) = V(p_1^*, p_2^*, m^*)$$

Lema de Shephard

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, u)$$
$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_2} = h_2(p_1, p_2, u)$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

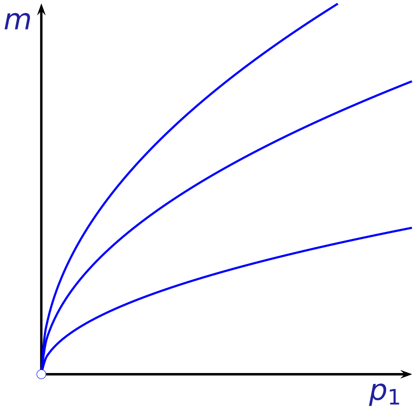
Função dispêndio

$$e(p_1, p_2, u) = u\frac{{p_1}^a {p_2}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}$$

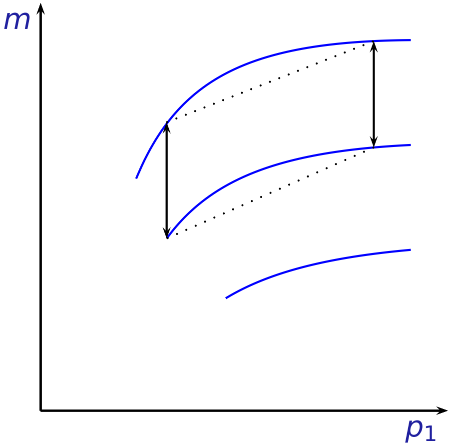
Função demanda compensada:

$$\begin{aligned} h_1(p_1, p_2, u) &= \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_1} u\frac{{p_1}^a {p_2}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}} = au\frac{{p_1}^{a-1} {p_2}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}} \\ &= u\left[\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right]^{1-a} \end{aligned}$$

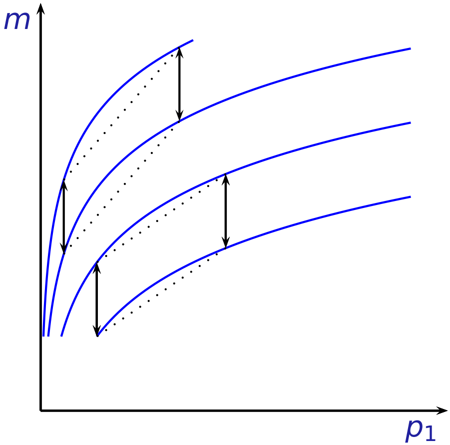
Curvas de iso-utilidade indireta para bens normais



Curvas de iso-utilidade indireta para bens inferiores



Curvas de iso-utilidade indireta para preferências quase-lineares



Lei da demanda compensada

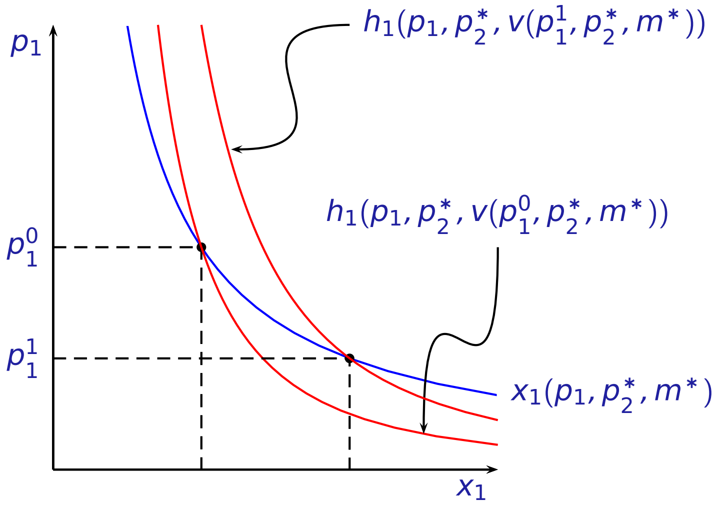
A demanda compensada de um bem é não crescente em relação ao preço desse bem, ou seja

$$p_1^1 > p_1^0 \Rightarrow h_1(p_1^1, p_2, m) \leq h_1(p_1^0, p_2, m)$$

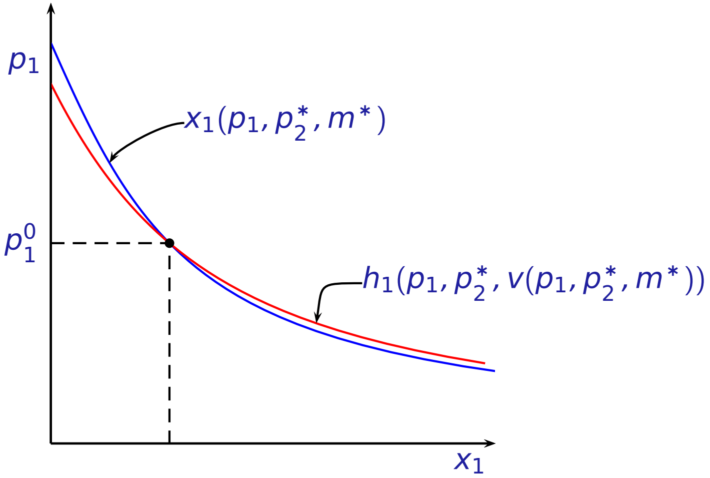
Observação:

A lei da demanda não é válida para a demanda não compensada, uma vez que os bens Giffen são teoricamente possíveis.

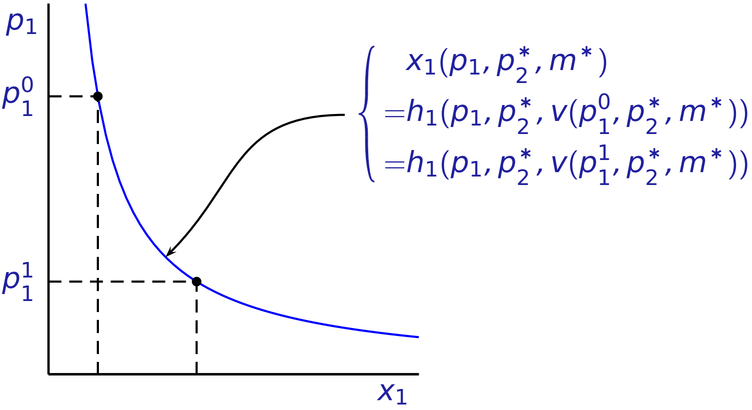
Curvas de demanda marshalliana e de demanda compensada – bem normal



Curvas de demanda marshalliana e de demanda compensada – bem inferior



Curvas de demanda marshalliana e de demanda compensada – preferências quase-lineares



Sumário

A função de utilidade indireta

Função dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar individual

- Variação compensatória
- Variação equivalente
- Comparações
- Excedente do consumidor

Equação de Slutsky

O problema de minimização dos gastos

Variação compensatória

Seja uma mudança nos preços e na renda do consumidor dos valores iniciais (p_1^0, p_2^0, m^0) para os valores finais (p_1^1, p_2^1, m^1). Associada a essa mudança definimos a variação compensatória na renda desse consumidor (VC) como a redução na renda (ou o negativo do aumento na renda) necessária(o) para fazer com que, a partir dos preços e renda finais (p_1^1, p_2^1, m^1), o consumidor volte a obter em equilíbrio, o mesmo nível de utilidade que obtia com os preços e renda originais, (p_1^0, p_2^0, m^0).

Variação compensatória – definições equivalentes

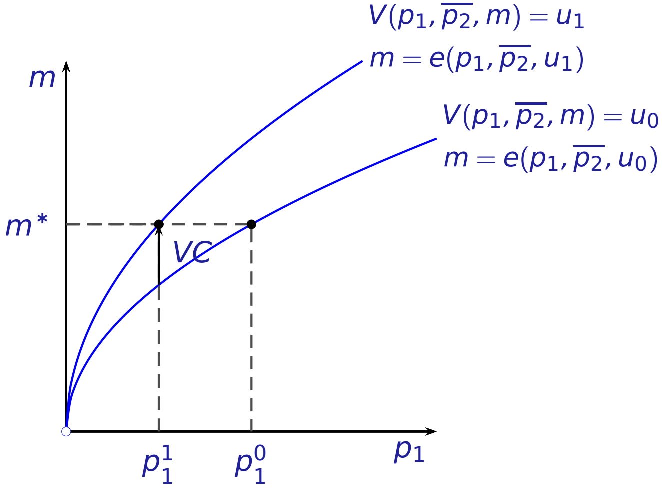
Usando a função de utilidade indireta:

$$V(p_1^1, p_2^1, m^1 - VC) = V(p_1^0, p_2^0, m^0)$$

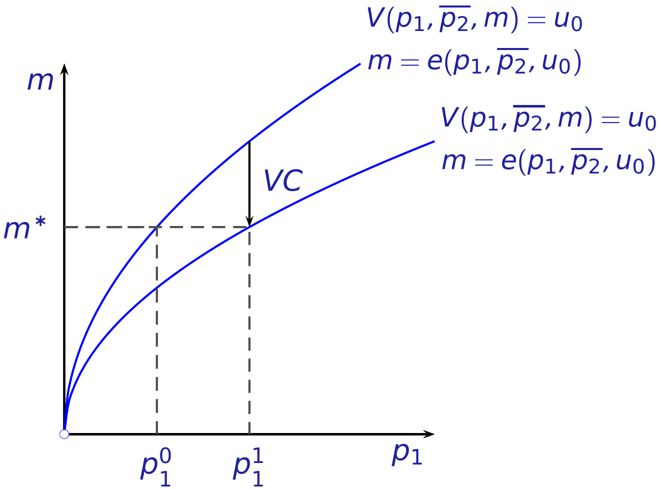
Usando a função dispêndio:

$$VC = m^1 - e(p_1^1, p_2^1, V(p_1^0, p_2^0, m^0))$$

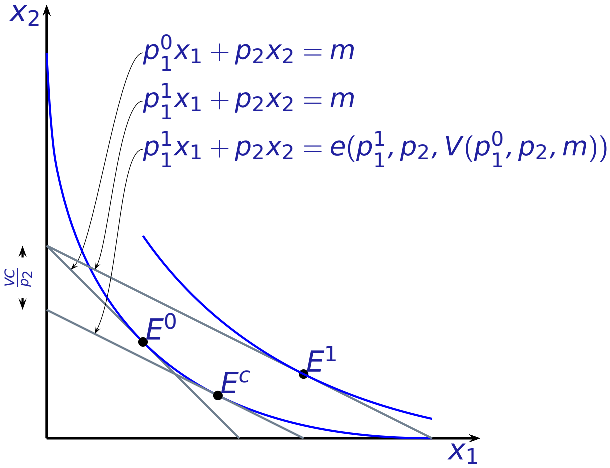
Representação gráfica – redução em p_1



Representação gráfica – aumento em p_1



Redução em p_1 – representação alternativa.



Variação equivalente

Seja uma mudança nos preços e na renda do consumidor dos valores iniciais (p_1^0, p_2^0, m^0) para os valores finais (p_1^1, p_2^1, m^1). Associada a essa mudança definimos a variação equivalente na renda desse consumidor (VE) como o aumento na renda (ou o negativo da redução na renda) necessário(a) para fazer com que, a partir dos preços e renda iniciais (p_1^0, p_2^0, m^0), o consumidor passasse a obter em equilíbrio, o mesmo nível de utilidade que obteria com os preços e renda finais, (p_1^1, p_2^1, m^1).

Variação equivalente – definições equivalentes

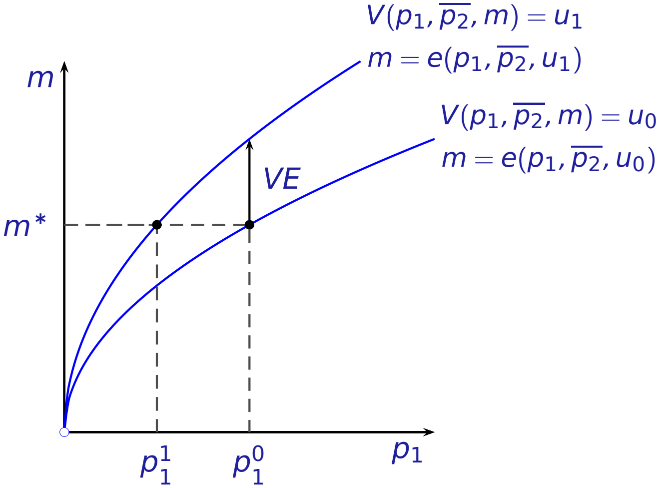
Usando a função de utilidade indireta:

$$V(p_1^0, p_2^0, m^0 + VE) = V(p_1^1, p_2^1, m^1)$$

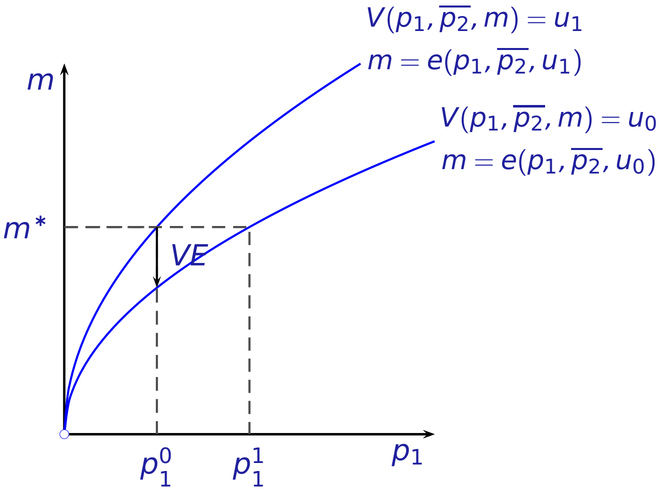
Usando a função dispêndio:

$$VE = e(p_1^0, p_2^0, V(p_1^1, p_2^1, m^1)) - m^0$$

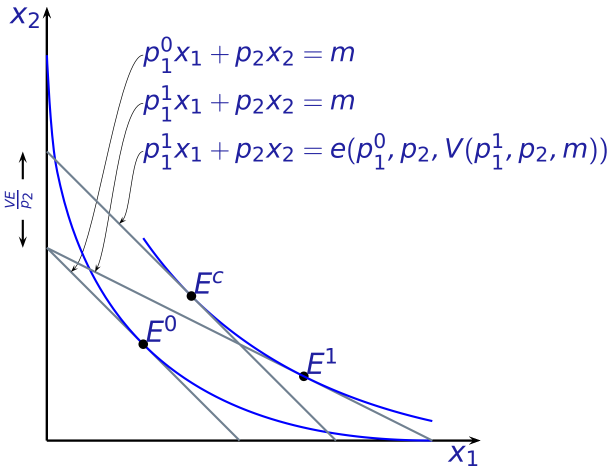
Representação gráfica – redução em p_1



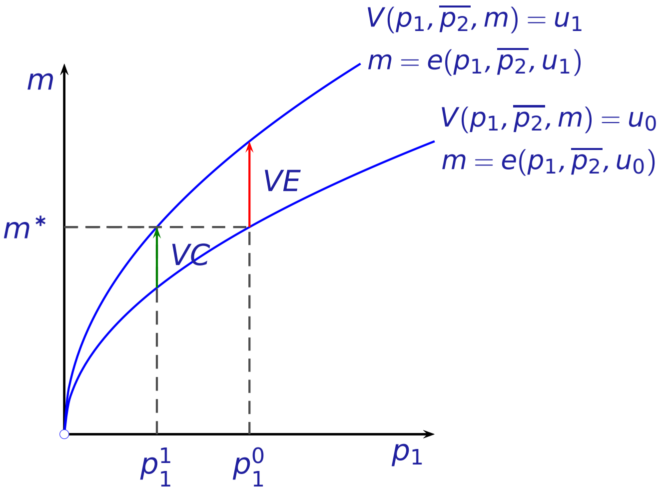
Representação gráfica – aumento em p_1



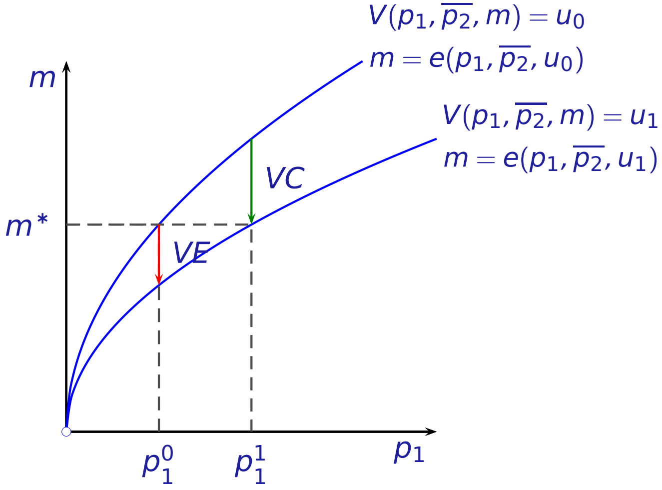
Redução em p_1 – representação alternativa.



VC e VE – redução em p_1



VC e VE – aumento em p_1



Comparando as medidas

Variação apenas no preço de um bem

Bens normais $VC < VE$

Bens inferiores $VC > VE$

Preferências quase-lineares $VC = VE$

Variação compensatória e equivalente e demanda compensada

O caso de uma mudança em p_1

Variação compensatória

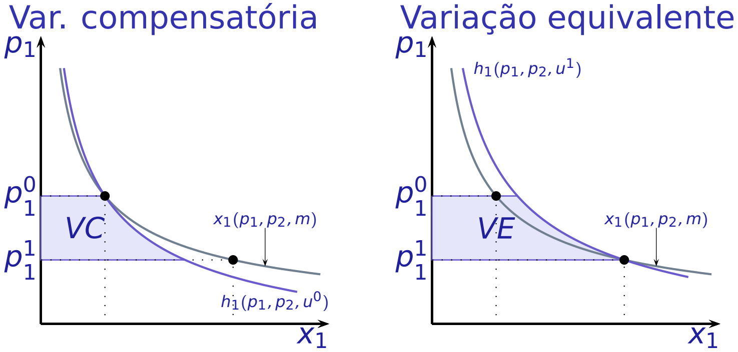
$$VC = e(p_1^0, p_2, u^0) - e(p_1^1, p_2, u^0) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, p_2, u^0) dp_1$$

Variação equivalente

$$VE = e(p_1^0, p_2, u^1) - e(p_1^1, p_2, u^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, p_2, u^1) dp_1$$

Nas quais $u^0 = V(p_1^0, p_2, m)$ e $u^1 = V(p_1^1, p_2, m)$

Variações compensatória e equivalente como áreas



A função de utilidade indireta

Função dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar individual

Variação compensatória

Variação equivalente

Comparações

Excedente do consumidor

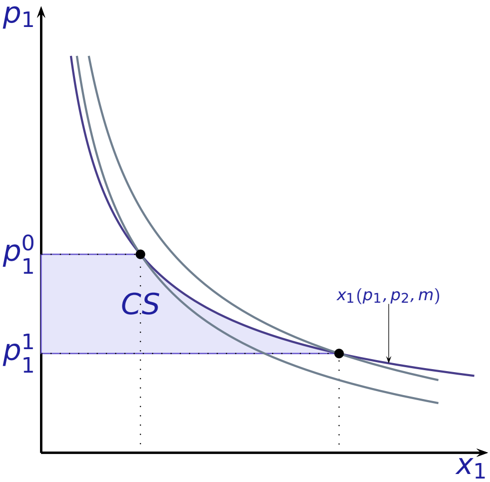
Equação de Slutsky

Min. Gastos

Excedente do consumidor

Em se tratando de um bem com demanda independente da renda (preferências quase-lineares), as duas áreas do slide anterior coincidem e são chamadas variação no excedente do consumidor.

Uma medida aproximada



Sumário

A função de utilidade indireta

Função dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar individual

Equação de Slutsky

- Efeitos substituição e renda
- Efeitos substituição e renda de Slutsky
- A equação de Slutsky
- O caso de compra e venda

O problema de minimização dos gastos

Efeitos substituição e renda

Definição

O efeito substituição associado a uma mudança no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1, com o preço do bem dois e a renda constantes em p_2 e m é dado por

$$\begin{aligned} ES &= h_1(p_1^1, p_2, V(p_1^0, p_2, m)) - x_1(p_1^0, p_2, m) \\ &= h_1(p_1^1, p_2, V(p_1^0, p_2, m)) - h_1(p_1^0, p_2, V(p_1^0, p_2, m)) \end{aligned}$$

Definição

O efeito renda associado a uma mudança no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1, com o preço do bem dois e a renda constantes em p_2 e m é dado por

$$ER = x_1(p_1^1, p_2, m) - h_1(p_1^1, p_2, V(p_1^0, p_2, m))$$

Ilustração gráfica – redução de preço, bem normal

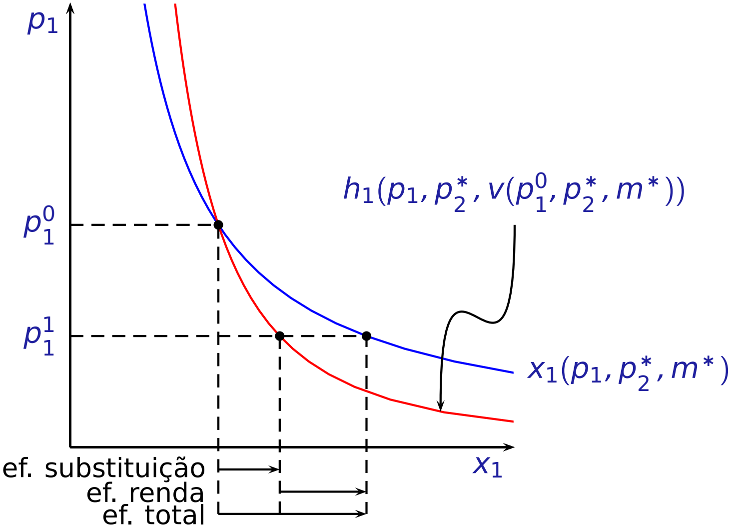
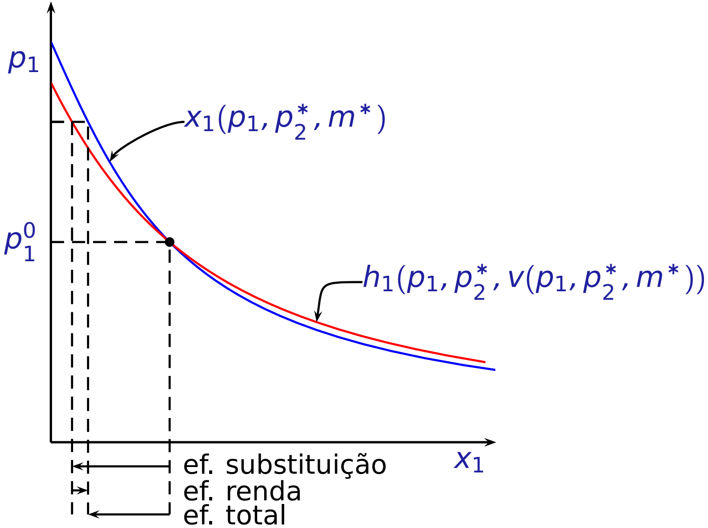
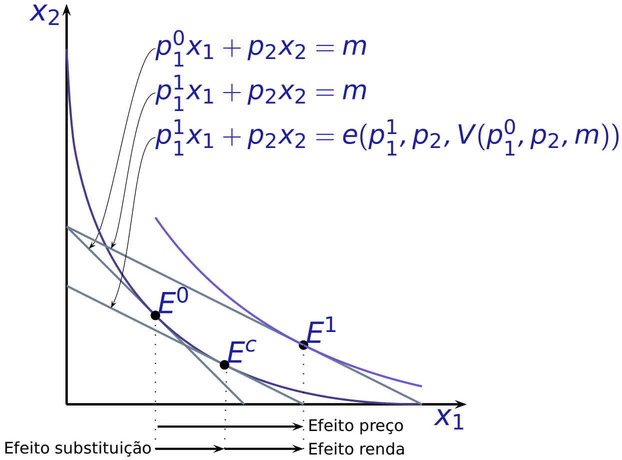


Ilustração gráfica – aumento de preço, bem inferior



Outra ilustração gráfica – bem normal, redução em p_1



Três possibilidades

Bens normais: Efeitos substituição e renda têm a mesma direção.

Bens inferiores ordinários: Efeitos substituição e renda têm sinal contrário e efeito substituição é maior, em módulo, ao efeito renda.

Bens de Giffen: Efeitos substituição e renda têm sinal contrário e efeito renda é maior, em módulo, ao efeito substituição.

Efeitos substituição e renda de Slutsky

Convenções

$\Delta p_1 = p_1^1 - p_1^0 \qquad x_1^0 = x_1(p_1^0, p_2, m)$

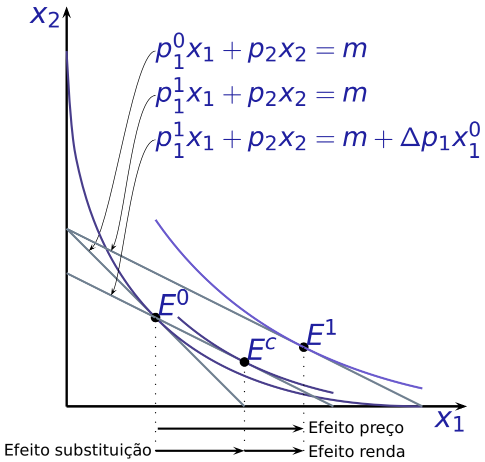
Definições:

Os efeitos substituição e renda de Slutsky (respectivamente ESS e ERS) associados a uma mudança no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1, com o preço do bem dois e a renda constantes em p_2 e m são dados por

$$ESS = x_1(p_1^1, p_2, m + \Delta p_1 x_1^0) - x_1(p_1^0, p_2, m)$$

$$ERS = x_1(p_1^1, p_2, m) - x_1(p_1^1, p_2, m + \Delta p_1 x_1^0)$$

Ilustração gráfica



A equação de Slutsky

Derivação

$$h_1(p_1, p_2, u) \equiv x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial p_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} h_1(p_1, p_2, u) \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1$$

Equação de Slutsky em elasticidades

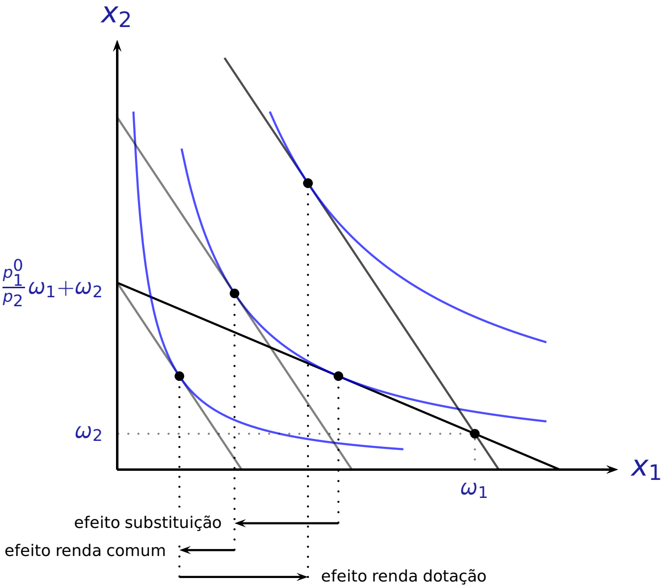
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{h_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{m}{x_1}\frac{p_1 x_1}{m}$$

$$\epsilon_{1,1} = \epsilon_{h_1,p_1} - s_i \epsilon_{1,m}$$

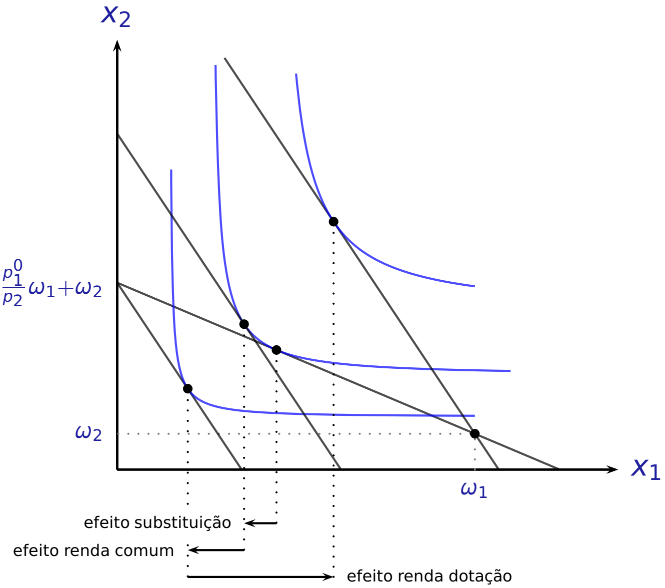
Compra e Venda – exemplo 1

Efeito de um aumento em p_1



Compra e Venda – exemplo 2

Efeito de um aumento em p_1



O caso de compra e venda

A função de demanda do bem 1 é $x_1(p_1, p_2, m(p_1, p_2))$ na qual

$$m(p_1, p_2) \equiv p_1\omega_1 + p_2\omega_2.$$

Assim

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m}\omega_1$$

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m}(\omega - x_1)$$

Caso o bem 1 seja normal e o consumidor seja ofertante líquido desse bem, o efeito renda total (ordinário + dotação) terá sinal contrário ao efeito substituição.

Sumário

A função de utilidade indireta

Função dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar individual

Equação de Slutsky

O problema de minimização dos gastos

- O problema
- Funções dispêndio e demanda compensada

Minimização de gastos

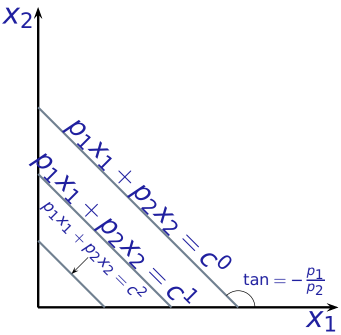
Qual é o valor da cesta de bens mais barata que garanta que um consumidor com preferências representadas por uma função de utilidade $U(x_1, x_2)$ atinja um nível mínimo de utilidade $\bar{u}$? Trata-se de resolver o problema:

$$\min_{x_1, x_2} \quad p_1x_1 + p_2x_2$$

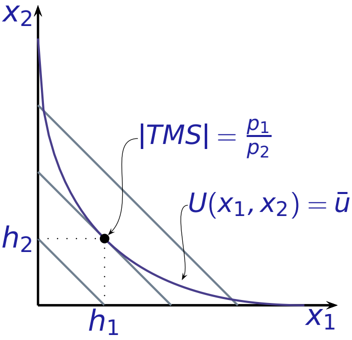
$$\text{sujeito a } U(x_1, x_2) \geq \bar{u}$$

Solução gráfica

Curvas de isocusto



Solução



Solução matemática

O problema

$$\min_{x_1, x_2} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$\text{sujeito a } U(x_1, x_2) \geq \bar{u}$$

O Lagrangiano

$$\mathscr{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(U(x_1, x_2) - \bar{u})$$

Condições de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dfrac{UMg_1}{UMg_2} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ U(x_1, x_2) = \bar{u} \end{cases}$$

Funções de demanda compensada e função dispêndio

Função de demanda compensada

Sejam $h_1(p_1, p_2, u)$ e $h_2(p_1, p_2, u)$ as funções que geram as quantidades ótimas dos bens 1 e 2, respectivamente, para o problema de minimização de gastos. Elas são chamadas funções de demanda compensadas ou funções de demanda hicksianas.

A função dispêndio

A função dispêndio, notada por $e(p_1, p_2, u)$, é a função que determina o gasto ótimo associado ao problema de minimização de gasto. Ela é definida por

$$e(p_1, p_2, u) \equiv p_1 h_1(p_1, p_2, u) + p_2 h_2(p_1, p_2, u)$$