Teoria do Consumidor: Preferências e Utilidade

Roberto Guena de Oliveira

13 de março de 2011

Sumário

Função de Utilidade

Definição:

Uma função $U : X \to \mathbb{R}$ é chamada de função de utilidade caso, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,

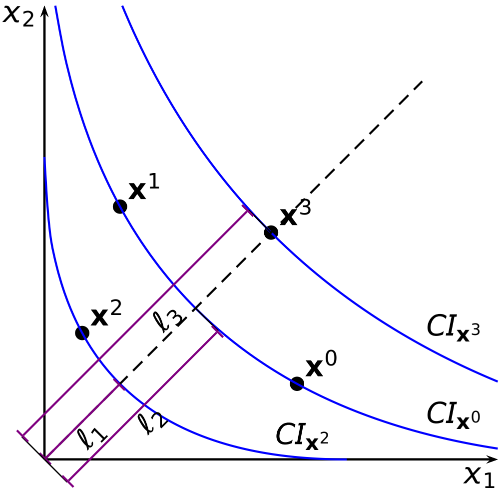
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}).$$

Uma função de utilidade simplesmente atribui números reais a todas as cestas de bens do conjunto de consumo de tal sorte que cestas de bens mais preferidas recebam números mais elevados.

Condição suficiente para a existência de uma função de utilidade

Caso as preferências de um consumidor sejam completas, transitivas e contínuas, então, elas podem ser representadas por uma função de utilidade contínua.

Exemplo: construindo uma função de utilidade



$$U(\mathbf{x}^2) = \ell_1$$

$$U(\mathbf{x}^0) = U(\mathbf{x}^1) = \ell_2$$

$$U(\mathbf{x}^3) = \ell_3$$

Utilidade Ordinal

- Do modo como definimos a função de utilidade, esta tem por função ordenar as cestas de bens, atribuindo números maiores paras as cestas mais desejadas, não importando o valor absoluto desses números.
- Por exemplo, no slide anterior a função de utilidade poderia ser a raiz quadrada da distância entre a origem e a curva de indiferença, pois a ordenação das cestas seria mantida.
- Também poderia ser considerada como função de utilidade o quadrado dessa distância.

Transformações Monotônicas

- Sejam $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade que represente adequadamente as preferências de um consumidor e f, uma função estritamente crescente definida na imagem de $U(\mathbf{x})$, então a função $V(\mathbf{x})$ definida para todo $\mathbf{x} \in X$ como
$$V(\mathbf{x}) = f(U(\mathbf{x}))$$
também é uma boa representação das características ordinais das preferências do mesmo consumidor.
- A função $V(\mathbf{x})$ definida acima é chamada de transformação monotônica da função $U(\mathbf{x})$.
- Duas funções de utilidade quaisquer representam as características ordinais das mesmas preferências se, e somente se, uma é uma transformação monotônica da outra.

Utilidade Cardinal

- Caso, ao contrário do que dissemos até aqui, seja dado um significado ao valor que a função de utilidade associa a cada cesta de bens, dizemos que a função de utilidade é cardinal, ou que os aspectos cardinais da função de utilidade são relevantes.
- Os primeiros economistas *neoclássicos* trabalhavam com a hipótese de utilidade cardinal. Porém, hoje se sabe que toda a teoria microeconômica positiva e grande parte da microeconomia normativa dependem apenas dos aspectos ordinais da função de utilidade.

Utilidade Marginal

Definição

A utilidade marginal do bem i, UMg_i, é definida por

$$UMg_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

Taxa Marginal de Substituição: definição equivalente

Considere a função $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$ ($\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*)$) definida por

$$U(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots, x_j(x_i, \mathbf{x}^*), \ldots, x_n^*) = U(\mathbf{x}^*)$$

A taxa marginal de substituição no ponto $\mathbf{x}^*$, em unidades do bem j por unidade do bem i, é definida por

$$TMS_{ij}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial x_j(x_i^*, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i}.$$

Diferenciando em relação a x_i a definição de $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$ e calculando igualdade em $\mathbf{x}^*$ vem

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j(x_i, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i}\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \rightarrow TMS = -\frac{UMg_i(\mathbf{x}^*)}{UMg_j(\mathbf{x}^*)}$$

Exercício

Encontre a expressão da a taxa marginal de substituição para as seguintes funções de utilidade:

1. $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$
2. $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$
3. $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \sqrt{x_2}$.

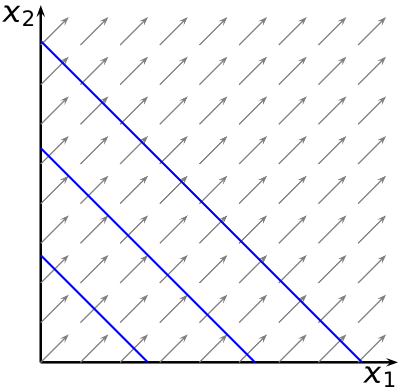
Monotonicidade e função de utilidade

1. Monotonicidade Fraca: Se comparada a $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ contém quantidades maiores de todos os bens, então $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$.
2. Monotonicidade Forte: Se, quando comparada a $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ possui pelo menos as mesmas quantidades de todos os bens e uma quantidade maior de, pelo menos, um bem, então $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$.

Exercício

Expresse as hipóteses de não saciedade local, de convexidade e de convexidade estrita em termos da função de utilidade, supondo que esta exista.

Substitutos Perfeitos



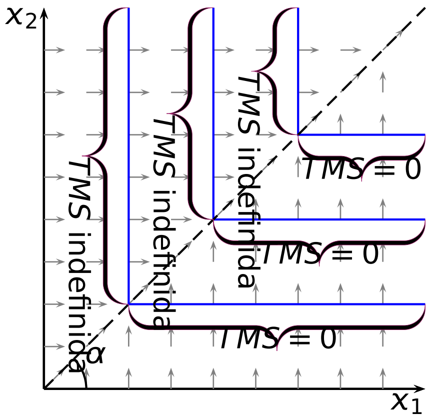
Características:

- TMS constante.
- Com escolha certa de unidades de medida, $TMS = -1$.
- Função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

$$TMS = -1$$

Complementos Perfeitos



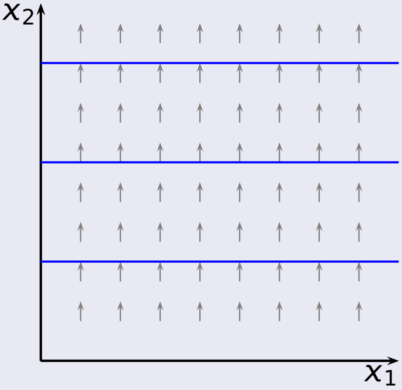
Características:

- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_2.
- Com escolha certa de unidades de medida, $\alpha = 1$.
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, x_2\}$$

Neutros

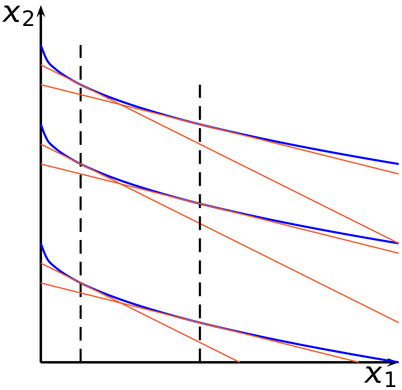
x_1 é um neutro



Função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = x_2$$

Preferências quase lineares



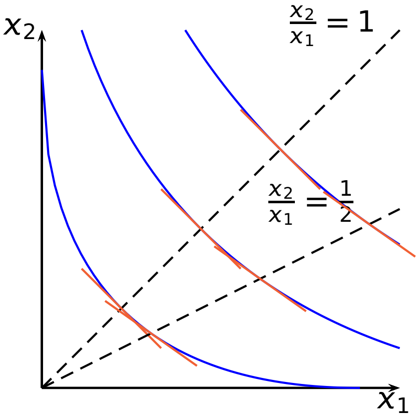
Características

- TMS depende exclusivamente de x_1.
- Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

$$TMS = v'(x_1)$$

Preferências Homotéticas



Características:

- *TMS* depende apenas de x_2/x_1.
- Sempre podem ser representadas por uma função de utilidade homogênea de grau 1 ou por uma transformação monotônica de tal função (funções homotéticas).

Exercícios

1. Mostre que, caso a função de utilidade seja homogênea de grau 1, a taxa marginal de substituição depende exclusivamente das razões entre as quantidades consumidas dos bens.
2. Sejam $U(x_1, x_2)$ uma função de utilidade, $f(u)$ uma função monotonicamente crescente definida na imagem de U e $V(x_1, x_2) = f(U(x_1, x_2))$. Mostre que a taxa marginal de substituição obtida a partir de V é a mesma qua obtida a partir de U, isto é, mostre que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, x_2)}{\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2)}{\frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2)}$$

Exemplo: preferências Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

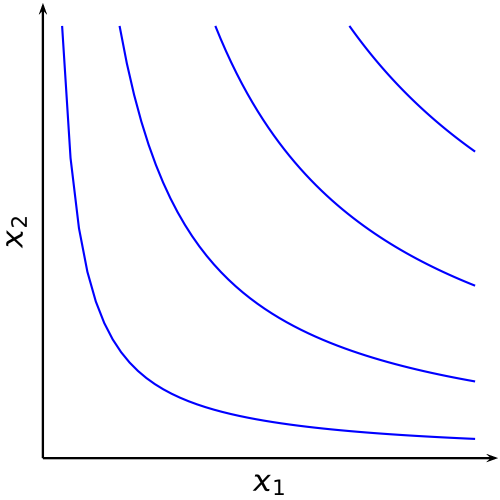
$$TMS = \alpha \frac{x_2}{x_1}$$

Variações

$$U(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta},\ A, \alpha, \beta > 0$$

$$U(x_1, x_2) = \alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2;\ 0 < \alpha < 1$$

Curvas de indiferença para preferências Cobb-Douglas $\alpha = 1$



Exemplo: função de utilidade CES

$$U(x_1, x_2) = \left[\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha) x_2^{\rho}\right]^{1/\rho},\ 0 < \alpha < 1$$

$$TMS = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1-\rho}$$

Outra formulação

$$U(x_1, x_2) = \left[\alpha x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\alpha) x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right]^{\sigma/(\sigma-1)}$$

Exercício

Mostre que, quando ρ tende a zero, a função de utilidade CES tende a uma função de utilidade Cobb-Douglas com a forma

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} + x_2^{1-\alpha}$$

Curva de indiferença para uma função de utilidade CES para diferentes valores de ρ