Teoria do Consumidor: Preferências e Utilidade

Roberto Guena de Oliveira

22 de fevereiro de 2011

Parte I

Preferências

Sumário

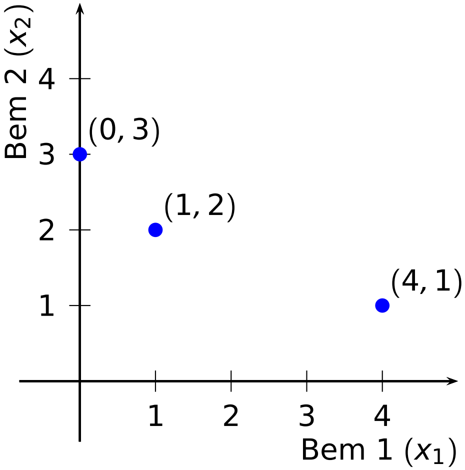
Cesta de bens

- Um consumidor é um agente que deve escolher quanto consumir de cada bem.
- Suporemos um número finito L de bens. Um conjunto ordenado de números representando as quantidades consumidas de cada bem é chamado cesta de bens ou cesta de consumo.
- Mais especificamente, uma cesta de bens é um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ no qual x_1 é a quantidade consumida do bem 1, x_2 é a quantidade consumida do bem 2, e assim por diante.
- Para possibilitar a apresentação gráfica de uma cesta de bens, trabalharemos aqui com a hipótese de que há apenas dois bens – um dos bens pode ser pensado como *reais gastos com todos os outros bens*.

Cestas de bens: possíveis interpretações

- Quantidades representam fluxos de consumo. Ex. litros de leite/ mês.
- Quantidades representam consumo datado. Ex. copos de leite em 08 de agosto de 2014.
- Quantidade representam consumo datado e localizado grograficamente. Ex. compos de leite no Rio de Janeiro em 08 de agosto de 2014.
- Quantidade representam consumo datado e contingente. Ex. serviços médicos no ano de 2012 caso o consumidor tenha algum problema de saúde.

Cestas de bens: representação gráfica



Vetores: operações e funções

Adição

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y + 1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n + y_n)$

multiplicação por escalar

$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

Produto interno

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

Combinação convexa entre **x** e **y**

$\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$

Distância euclidiana

$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

O conjunto de consumo

- Nem toda cesta de bens concebível é fisicamente possível de ser consumida. Exemplo: não é possível consumir mais do que 24 horas por dia de aulas de microeconomia.
- O conjunto de todas as cestas de bens fisicamente possíveis de serem consumidas é chamado conjunto de consumo e usualmente é notado por X.
- Assumiremos que o conjunto de consumo é o conjunto das cestas de bens que não contêm quantidades menores do que zero de qualquer bem.
- No caso de dois bens, esse conjunto corresponde ao quadrante positivo do diagrama carteziano do slide anterior.

Notação

Para duas cestas de consumo quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in X$, empregaremos a seguinte notação:

- Conceito primitivo: $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ significa "$\mathbf{x}$ é ao menos tão bom quanto $\mathbf{y}$", ou "$\mathbf{y}$ não é preferido a $\mathbf{x}$".
- $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ é lido "$\mathbf{x}$ é indiferente a $\mathbf{y}$" e equivale a $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$.
- $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ é lido "$\mathbf{x}$ é preferido a $\mathbf{y}$" e equivale a $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e não $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$.

Preferências Racionais

Definição

Diz-se que um consumidor apresenta preferências racionais caso:

1. As preferências sejam completas, isto é, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ e/ou } \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}.$$
2. As preferências sejam transitivas, ou seja, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$
$$\text{se } \mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}, \text{ então } \mathbf{x} \succsim \mathbf{z}.$$

Notas sobre racionalidade das preferências:

1. Caso as preferências de um consumidor sejam racionais então as relações $\succsim$ e $\sim$ serão reflexivas, ou seja, para qualquer $\mathbf{x} \in X$,
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{x} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}.$$
2. A racionalidade das preferências também implica a transitividade das relações $\sim$ e $\succ$, isto é, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \sim \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{z} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$$
3. Ao longo de todo o curso suporemos que os consumidores apresentam preferências racionais.

Curvas de Indiferença

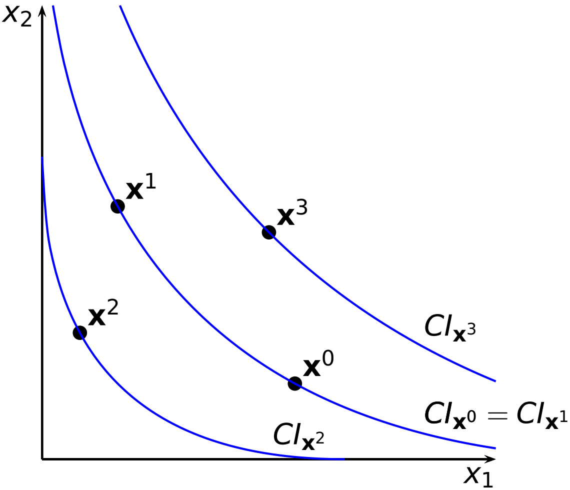
Definição

Uma curva de indiferença, CI_{x^0} associada a qualquer cesta de bens $\mathbf{x}^0 \in X$ conjunto de todas as cestas de bens pertencentes ao conjunto de consumo indiferentes a $\mathbf{x}^0$.

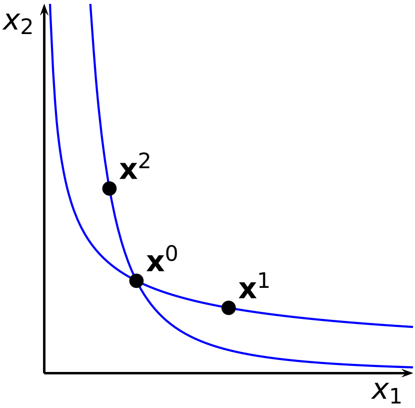
Notas:

- Evidentemente, para duas cestas quaisquer indiferentes entre definem a mesma curva de indiferença.
- A representação gráfica das curvas de indiferença pode ser uma forma reveladora de representação das preferências.

Representação gráfica



Duas curvas de indiferença não se cruzam



$$\text{ou } \mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2; \text{ou}; \mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^2 \sim \mathbf{x}^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$$

Taxa Marginal de Substituição: intuição

Sejam Δx_i e Δx_j tais que

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \sim (x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n)$$

Nesse caso,

$$\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$$

indica,

Se $\Delta x_i < 0$ em média, quantas unidades do bem j foram nesserárias para compensar a perda de consumo de cada unidade do bem i.

Se $\Delta x_i > 0$ em média, quantas unidades perdidas do bem j são compensadas por uma unidade adicional do bem i.

Taxa Marginal de Substituição: definição

Considere a função $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$ ($\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*)$) definida por

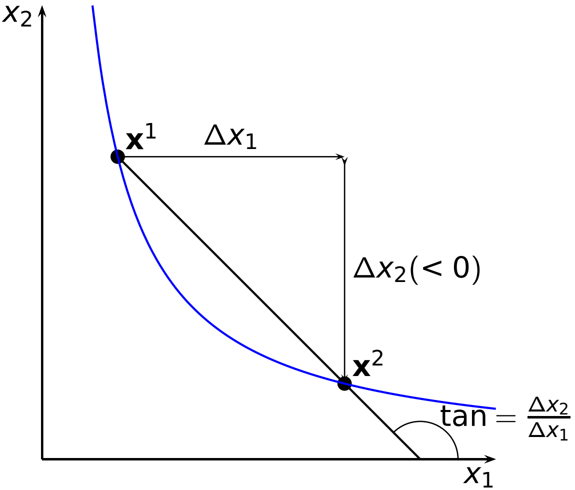
$$(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots, x_j(x_i), \ldots, x_n^*) \boldsymbol{\sim} \mathbf{x}^*$$

A taxa marginal de substituição no ponto $\mathbf{x}^*$, em unidades do bem j por unidade do bem i, é definida por

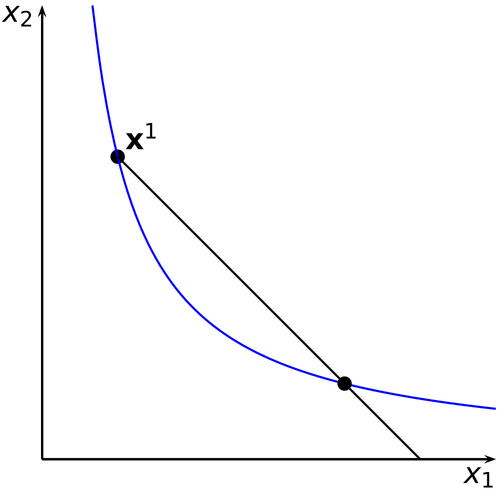
$$TMS_{ij}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial x_j(x_i^*, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i}.$$

Intuição: até quantas unidades do bem j o consumidor está disposto a sacrificar para ter uma unidade adicional do bem i ou até quantas unidades do bem j o consumidor aceita receber para abrir mão de uma unidade do bem i.

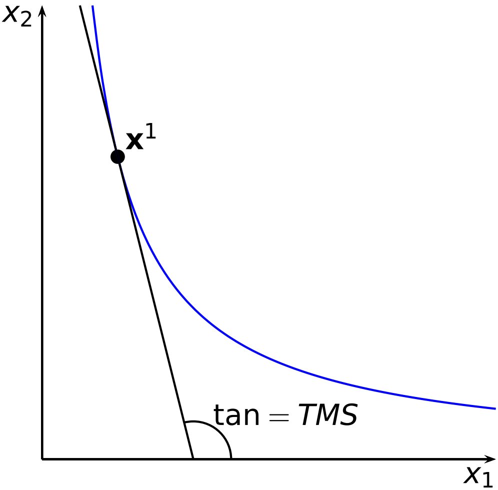
TMS – Interpretação gráfica



TMS – Interpretação gráfica



TMS – Interpretação gráfica



Continuidade

As preferências são ditas contínuas caso, quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, então, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{z} \in X$, $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta$ implica $\mathbf{z} \succ \mathbf{y}$.

- Preferências contínuas têm curvas de indiferença contínuas.
- Exemplo de preferências não contínuas: há apenas dois bens e, para quaisquer duas cestas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ se, e somente se, $x_1 > y_1$ ou $x_1 = y_1$ e $x_2 > y_2$.

Hipóteses de monotonicidade

1. Monotonicidade Fraca: Se,comparada a $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ contém quantidades maiores de todos os bens, então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.Implicações:
   - Inexistência de saciedade por parte do consumidor.
   - As curvas de indiferença não podem ser positivamente inclinadas.
2. Monotonicidade forte: Se, quando comparada a $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ possui pelo menos as mesmas quantidades de todos os bens e uma quantidade maior de, pelo menos, um bem, então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Implicações:
   - Inexistência de saciedade por parte do consumidor.
   - As curvas de indiferença devam ser negativamente inclinadas.

Hipótese de não saciedade local

Para qualquer cesta de bens $\mathbf{x} \in X$ e qualquer número real positivo δ existe uma cesta de bens $\mathbf{y} \in X$ que seja tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. Intuitivamente, sempre é possível deixar o consumidor melhor com uma pequena mudança no padrão de consumo.

Hipóteses de convexidade

1. Convexidade (fraca): Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ e $0 < \alpha < 1$

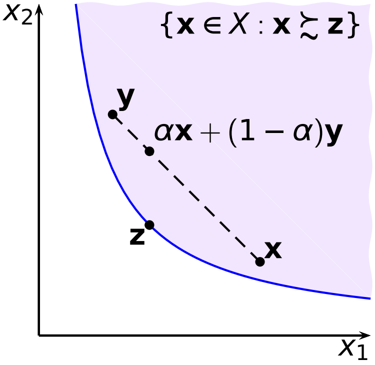
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{z} \text{ e } \mathbf{y} \succsim \mathbf{z} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}.$$

2. Convexidade forte ou estrita: Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ e $0 < \alpha < 1$

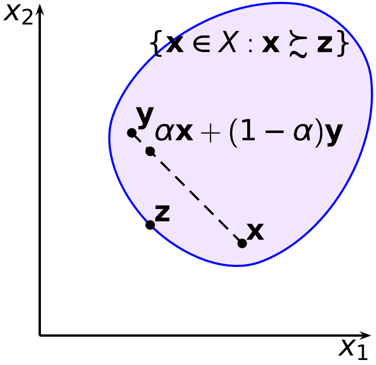
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{z} \text{ e } \mathbf{y} \succsim \mathbf{z} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succ \mathbf{z}.$$

Note que convexidade forte implica convexidade fraca, mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplos – I

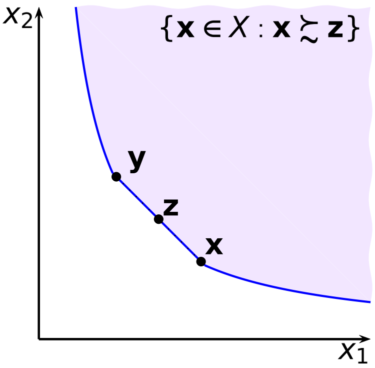


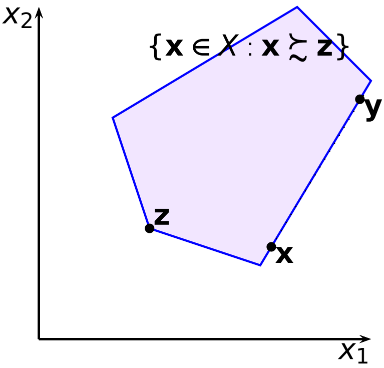
Preferências estritamente convexas



Preferências estritamente convexas

Exemplos– II

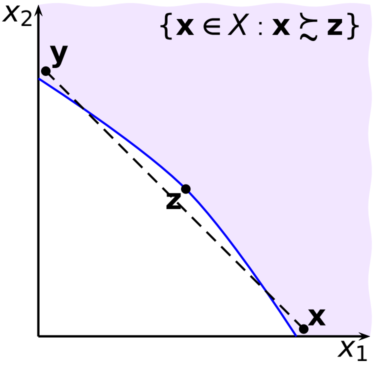




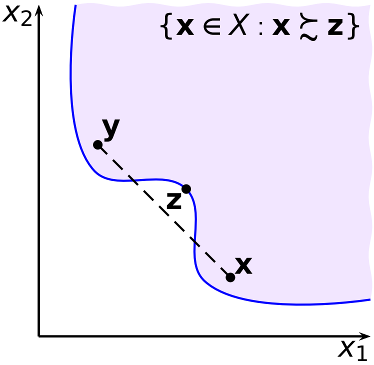
Preferências convexas, mas não estritamente convexas

Preferências convexas, mas não estritamente convexas

Exemplos– III

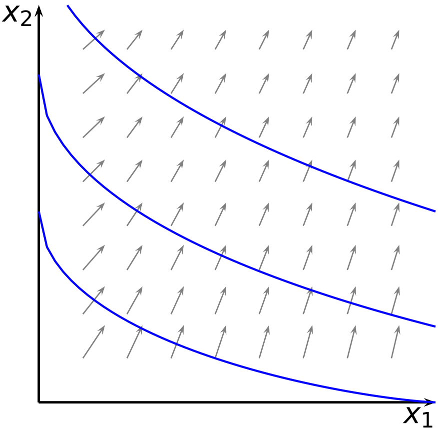


Preferências não convexas. (Côncavas).



Preferências não convexas

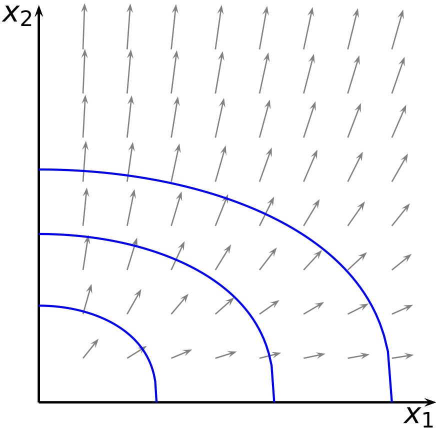
Preferências bem comportadas



Características:

- Monotônicas.
- Curvas de indiferença diferenciáveis.
- Convexas: *TMS* decrescente (em módulo).
- Aversão à especialização.

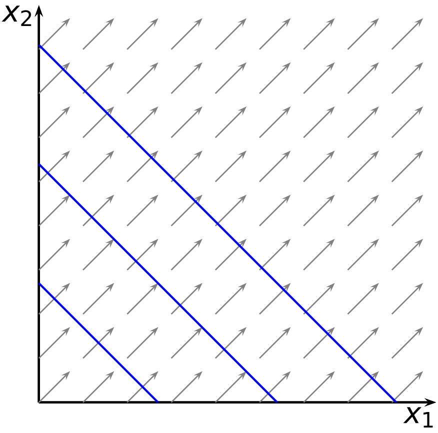
Preferências côncavas



Características:

- *TMS* crescente (em módulo).
- Propensão à especialização.

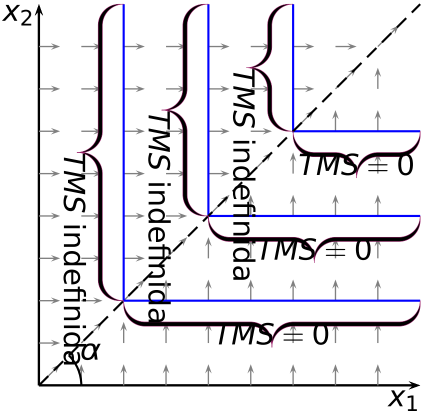
Substitutos Perfeitos



Características:

- *TMS* constante.
- Com escolha certa de unidades de medida, $TMS = -1$.

Complementos Perfeitos

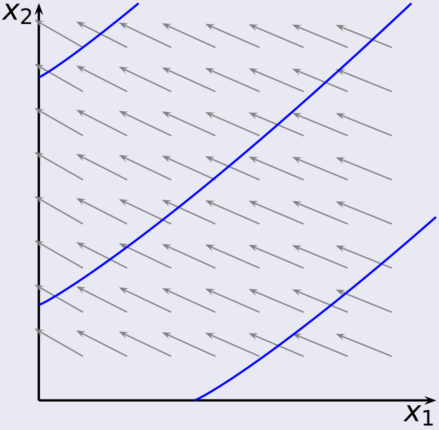


Características:

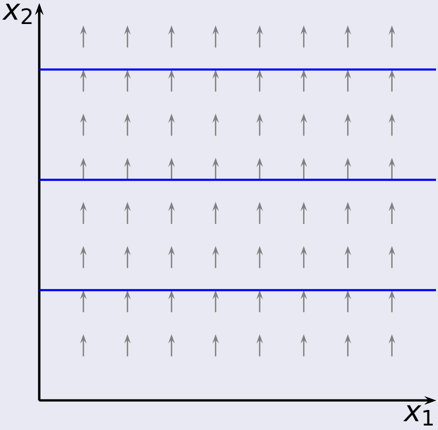
- Uma unidade adicional de x_2 só tem utilidade quando combinada com $\frac{1}{\alpha}$ unidades de x_2.
- Com escolha certa de unidades de medida, $\alpha = 1$.

Males & Neutros

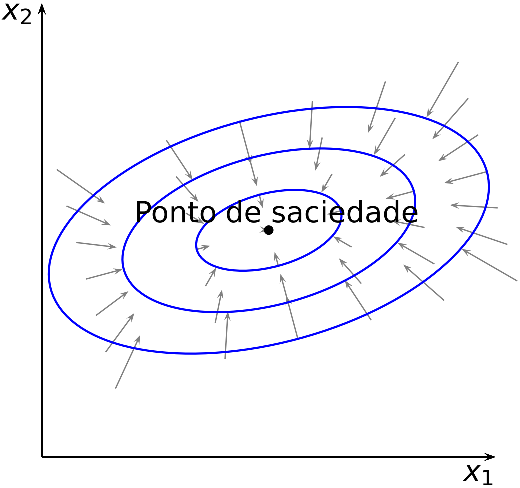
x_1 é um mal



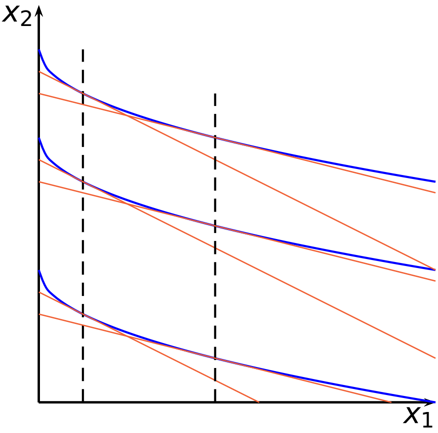
x_1 é um neutro



Saciedade



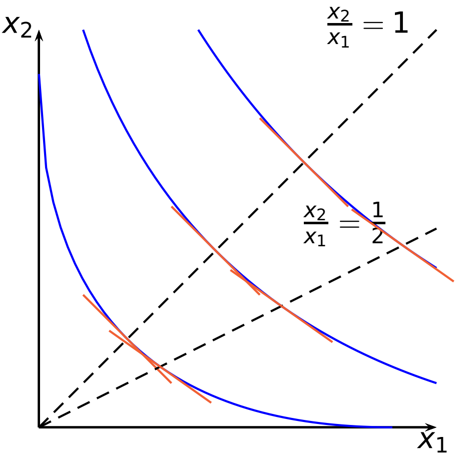
Preferências quase lineares



Características

- $TMS = u'(x_1)$ depende exclusivamente de x_1.

Preferências Homotéticas



Características:

- *TMS* depende apenas de x_2/x_1.

Parte II

Utilidade

Sumário

Função de Utilidade

Definição:

Uma função $U : X \to \mathbb{R}$ é chamada de função de utilidade caso, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,

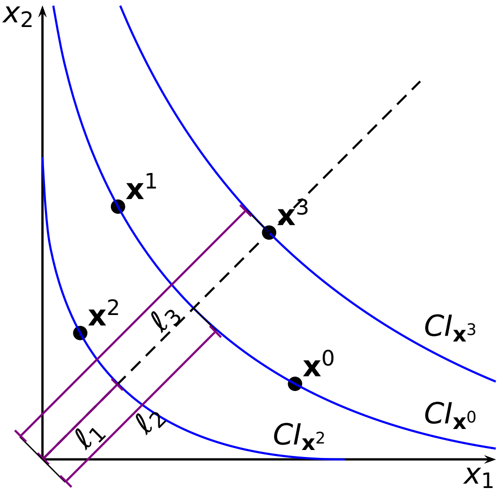
$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}).$$

Uma função de utilidade simplesmente atribui números reais a todas as cestas de bens do conjunto de consumo de tal sorte que cestas de bens mais preferidas recebam números mais elevados.

Condição suficiente para a existência de uma função de utilidade

Caso as preferências de um consumidor sejam completas, transitivas e contínuas, então, elas podem ser representadas por uma função de utilidade contínua.

Exemplo: construindo uma função de utilidade



$$U(\mathbf{x}^2) = \ell_1$$

$$U(\mathbf{x}^0) = U(\mathbf{x}^1) = \ell_2$$

$$U(\mathbf{x}^3) = \ell_3$$

Utilidade Ordinal

- Do modo como definimos a função de utilidade, esta tem por função ordenar as cestas de bens, atribuindo números maiores paras as cestas mais desejadas, não importando o valor absoluto desses números.
- Por exemplo, no slide anterior a função de utilidade poderia ser a raiz quadrada da distância entre a origem e a curva de indiferença, pois a ordenação das cestas seria mantida.
- Também poderia ser considerada como função de utilidade o quadrado dessa distância.

Transformações Monotônicas

- Sejam $U(\mathbf{x})$ uma função de utilidade que represente adequadamente as preferências de um consumidor e f, uma função estritamente crescente definida na imagem de $U(\mathbf{x})$, então a função $V(\mathbf{x})$ definida para todo $\mathbf{x} \in X$ como
$$V(\mathbf{x}) = f(U(\mathbf{x}))$$
também é uma boa representação das características ordinais das preferências do mesmo consumidor.
- A função $V(\mathbf{x})$ definida acima é chamada de transformação monotônica da função $U(\mathbf{x})$.
- Duas funções de utilidade quaisquer representam as características ordinais das mesmas preferências se, e somente se, uma é uma transformação monotônica da outra.

Utilidade Cardinal

- Caso, ao contrário do que dissemos até aqui, seja dado um significado ao valor que a função de utilidade associa a cada cesta de bens, dizemos que a função de utilidade é cardinal, ou que os aspectos cardinais da função de utilidade são relevantes.
- Os primeiros economistas *neoclássicos* trabalhavam com a hipótese de utilidade cardinal. Porém, hoje se sabe que toda a teoria microeconômica positiva e grande parte da microeconomia normativa dependem apenas dos aspectos ordinais da função de utilidade.

Utilidade Marginal

Definição

A utilidade marginal do bem i, UMg_i, é definida por

$$UMg_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

Taxa Marginal de Substituição: definição equivalente

Considere a função $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$ ($\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*)$) definida por

$$U(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots, x_j(x_i, \mathbf{x}^*), \ldots, x_n^*) = U(\mathbf{x}^*)$$

A taxa marginal de substituição no ponto $\mathbf{x}^*$, em unidades do bem j por unidade do bem i, é definida por

$$TMS_{ij}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial x_j(x_i^*, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i}.$$

Diferenciando em relação a x_i a definição de $x_j(x_i, \mathbf{x}^*)$ e calculando igualdade em $\mathbf{x}^*$ vem

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j(x_i, \mathbf{x}^*)}{\partial x_i}\frac{\partial U(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \rightarrow TMS = -\frac{UMg_i(\mathbf{x}^*)}{UMg_j(\mathbf{x}^*)}$$