Um modelo de troca intertemporal sem risco

Roberto Guena de Oliveira

20 de abril de 2023

Descrição do modelo

- Tempo discreto. Eventos ocorrem nas datas $0, 1, \ldots, T$;
- n agentes, chamados consumidores ou investidores, que vivem das data 0 até a data T;
- Um único bem físico diferenciado apenas pela data na qual estará disponível;
- O modelo inicia-se com cada consumidor possuindo um direito a consumir uma determinada quantidade do bem em cada uma das datas. Notaremos por $w_{i,t}$ o direito inicial do agente i ao consumo na data t, que chamaremos de *dotação inicial do agente i, na data t*. $\mathbf{w}_i = (w_{i,0}, w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,T})$ será denominado de *vetor de dotações iniciais do agente i* ou, simplesmente, *dotação inicial do agente i*.

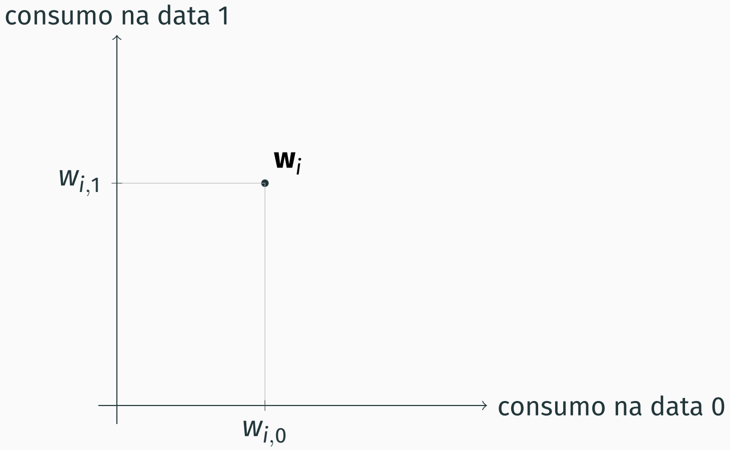
Tempo

Usaremos o termo *data* para designar um instante no tempo. O termo “período” refere-se a um intervalo de tempo. O tempo pode ser contínuo ou discreto.

Se o tempo é contínuo, qualquer data real é válida

No caso do tempo discreto, apenas as datas que são múltiplos de um determinado período são válidas

Representação gráfica da dotação inicial do agente *i* para o caso de um período unitário (duas datas)



Hipótese de ausência de custo de transações

Assumiremos que os agentes possam trocar entre si suas dotações iniciais. Sejam $\Delta\mathbf{c}_{i,j} = (\Delta c_{i,j,0}, \ldots, \Delta c_{i,j,T})$ as alterações dos consumos temporais do agente i em virtude de suas trocas com o agente j. Dizemos que essas trocas foram feitas sem custos de transação caso, para qualquer $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$,

$$\Delta c_{i,j,t} = -\Delta c_{j,i,t} \Rightarrow \Delta c_{i,j,t} + \Delta c_{j,i,t} = 0.$$

Em outras palavras a ausência de custos de transação implica que a troca entre dois agentes não cria nem destrói, mas, apenas realoca consumo entre esses dois agentes.

Ausência de custos de transação no agregado

Seja $c_{i,t}$ o oconsumo de um agente i qualquer em uma data t qualquer após a realização de trocas com outros agentes. Notando $\mathbf{c}_i = (c_{i,0}, \ldots, c_{i,T})$, a hipótese de ausência de custos de transações implica:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i$$

As transações não criam nem destoem consumo.

Hipótese de não arbitragem

Arbitragem
Dizemos que um investidor i qualquer realiza ganho de arbitragem caso, após a realização de trocas com outros investidores, para todo $t = 0, 1, \ldots, T$, $c_{i,t} \geq w_{i,t}$ e exista ao menos um valor de $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ para o qual $c_{i,t} > w_{i,t}$.

Exemplo: arbitragem

$\Delta c_{i,j,t} = 3$, $\Delta c_{i,j,\tau} = -4$, $\Delta c_{j,i,t} = -3$ e $\Delta c_{j,i,\tau} = 4$; agentes i e j só realizam trocas entres as datas t e τ;

$\Delta c_{i,k,t} = -3$, $\Delta c_{i,k,\tau} = 4{,}2$, $\Delta c_{k,i,t} = 3$ e $\Delta c_{k,i,\tau} = 4.2$; agentes i e k só realizam trocas entres as datas t e τ;

Mudança líquida de consumo para o agente i resultante das duas transações:

Data	Com j	Com k	Total
t	3	-3	0
τ	-4	4.2	0.2

Hipótese de não arbitragem

As condições de troca são tais que não existe possibilidade de arbitragem para qualquer agente.

Preço envolvido em uma troca

Se dois agentes entabulam uma troca de x_t unidades de consumo na data t por x_τ unidades de consumo na data τ, o preço associado a essa troca do consumo na data t medido em unidades de consumo na data τ é dado por

$$p_{t,\tau} = \frac{x_\tau}{x_t}.$$

Empregando a mesma definição, o preço do consumo na data τ em unidades de consumo da data t é

$$p_{\tau,t} = \frac{x_t}{x_\tau} = \frac{1}{p_{t,\tau}}.$$

Concorrência perfeita

Dizemos que os mercados estão em concorrência perfeita quando:

- Os agentes são tomadores de preço: para quaisquer duas datas, t e τ, a quantidade x_τ a ser trocada por uma quantidade x_t qualquer é determinada pelo mercado e considerada pelos agentes como um dado, de tal sorte que o preço associado à troca de x_t unidades de consumo na data t por consumo na data τ, $\frac{x_\tau}{x_t}$ é dado.
- Os agentes agem como se pudessem realizar quantas vezes quiserem a mesma transação, eventualmente com agentes diferentes.

Lei do preço único

Sejam duas datas quaisquer t e τ e duas transações quaisquer envolvendo troca de consumo entre essas duas datas. Sejam x_t e x_τ as quantidades trocadas em uma dessas transações, associadas, respectivamente, às datas t e τ e y_t e y_τ as quantidades trocadas na outra transação associadas às mesmas respectivas datas. Então, assumindo as hipóteses de concorrência perfeita, de não arbitragem e de ausência de custos de transação,

$$\frac{x_\tau}{x_t} = \frac{y_\tau}{y_t} = p_{t,\tau}.$$

Lei do preço único: prova

Assuma que

$$p_x = \frac{x_\tau}{x_t} > p_y = \frac{y_\tau}{y_t}.$$

Considere que um agente realize n vezes uma operação na qual oferece x_t na data t e recebe em troca x_τ na data τ e m vezes uma operação na qual recebe y_t na data t e oferece y_τ na data τ. As variações líquidas de consumo desse agente serão:

Na data t**:** $my_t - nx_t$;

Na data τ**:** $nx_\tau - my_\tau$

Usando as definições de p_x e p_y acima, o ganho na data τ pode ser reescrito como

$$np_x x_t - mp_y y_t = m(p_x - p_y)y_t - p_x(my_t - nx_t)$$

Lei do preço único: continuação da prova

$$np_x x_t - mp_y y_t = m(p_x - p_y)y_t - p_x(my_t - nx_t)$$

Escolha $m = m(n) = \min\{a \in \mathbb{Z} | ay_t \geq nx_t\}$, de tal sorte que $m(n)x_t - ny_t > 0$ e $m(n)x_t - ny_t \leq y_t$.

Escolha um valor de n tal que

$$m(n)(p_x - p_y) \geq p_x(y_t) > p_x(my_t - nx_y).$$

Com esse valor de n e escolhendo $m = m(n)$, ficamos com

Ganho na data t: $my_t - nx_t \geq 0$, pela definição de $m(n)$; e
Ganho na data τ: $m(n)(p_x - p_y) - p_x(my_t - nx_t) > 0$.

Logo, caso $p_x > p_y$, será possível realizar ganhos de arbitragem o que é contraditório com a hipótese de não arbitragem.

Relação entre preços

As hipóteses de não arbitragem, mercados completos, ausência de custo de transação e concorrência perfeita também garantem que, para quaisquer datas, t, q, e τ,

$$p_{t,\tau} = p_{t,q} p_{q,\tau}.$$

Prova

Assuma $p_{t,\tau} > p_{t,q}p_{q,\tau}$ Então a combinação das seguintes operações gerar um ganho líquido de consumo $p_{t,\tau} - p_{t,q}p_{q,\tau} > 0$ com manutenção do consumo nas outras datas:

1. Vender uma unidade de consumo na data t em troca de $p_{t,q}$ unidades de consumo na data q;
2. Vender $p_{t,q}$ unidades de consumo na data q em troca de $p_{t,q} \times p_{q,\tau}$ unidades de consumo na data τ;
3. Vender $p_{t,q} \times p_{q,\tau}$ unidades de consumo na data τ em troca de

Taxa de juros

Assuma as hipóteses de ausência de custo de transação, concorrência perfeita e não arbitragem. Então há apenas um preço associado a transações envolvendo duas datas, quaisquer que elas sejam. Considere duas datas quaisquer, t e τ. A taxa de juros associada a qualquer transação entre essas duas transações é dada por

$$i_{t,\tau} = p_{t,\tau}^{\frac{1}{\tau - t}} - 1$$

Adicionalmente, as seguintes identidades podem ser provadas com facilidade:

$$i_{t,\tau} = i_{\tau,t}$$

$$(1 + i_{t,\tau})^{\tau - t} = (1 + i_{t,q})^{q-t}(1 + i_{q,\tau})^{\tau - q}$$

Numerário da economia

Como, para quaisquer datas t, q e τ, $p_{t,\tau} = p_{t,q}p_{q,\tau}$, é possível determinar todos os preços da economia a partir dos preços do consumo em todas as datas expressos em unidades de consumo de uma data específica. A unidade de consumo nessa data é chamada *numerário*. Por exemplo, se conhecermos

$$\mathbf{p}_0 = (1, p_{1,0}, p_{2,0}, \ldots, p_{T,0}),$$

então, para quaisquer duas datas t e τ, podemos determinar $p_{t,\tau}$, usando a expressão:

$$p_{t,\tau} = \frac{p_{t,0}}{p_{\tau,0}}.$$

Nesse exemplo, o numerário é o consumo na data 0. Daqui para a frente, usaremos a notação abreviada $p_t = p_{t,0}$.

Numerário e taxa de juros

Do mesmo modo que podemos expressar todos os preços em termos do consumo na data 0, também podemos expressar a taxa de juros entre duas datas em termos das taxas de juros de cada uma dessas datas em relação à data 0, usando a expressão:

$$1 + i_{t,\tau} = p_{t,\tau}^{\tau-t} = \frac{p_{t,0}}{p_{\tau,0}} = \left[\frac{(1+i_{t,0})^{-t}}{(1+i_{\tau,0})^{-\tau}}\right]^{\tau-t} = \frac{(1+i_{\tau,0})^{\frac{\tau}{\tau-t}}}{(1+i_{t,0})^{\frac{t}{\tau-t}}}.$$

Desse modo, também convencionaremos notar $i_t = i_{t,0}$.

Exemplo

Se a taxa de juros de um empréstimo a ser realizado hoje com pagamento único em 5 anos é de 5% ao ano e a taxa de juros a ser realizado hoje com pagamento único em 2 anos é de 4,5% ao ano, calcule a taxa de juros de um empréstimo a ser realizado em 2 anos com vencimento daqui a cinco anos.

Restrição orçamentária intertemporal

Considere um agente i com um vetor de dotações iniciais $(w_{i,0}, w_{i,1}, \ldots, w_{i,t})$. Notemos por $(c_{i,0}, c_{i,1}, \ldots, c_{i,t})$ o vetor de consumo obtido por esse agente após a realização de trocas ao preço de mercado e definamos, para todo $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ $\Delta c_{i,t} = c_{i,t} - w_{i,t}$. Seja ainda $\Delta c_{i,t,q}$ a parte de $\Delta c_{i,t}$ associada às trocas realizadas por essa agente entre as datas t e q, de tal sorte que

$$\Delta c_{i,t} = \sum_{q=0}^{T} \Delta c_{i,t,q}.$$

Restrição orçamentária intertemporal (continuação)

Se as trocas foram feitas de acordo com os preços $p_0, p_1, \ldots, p_T$, então

$$\Delta c_{i,t,q} = -p_{q,t}\Delta c_{i,q,t} = -\frac{p_q}{p_t}\Delta c_{i,q,t} \Rightarrow p_t \Delta c_{i,t,q} + p_q \Delta c_{i,q,t} = 0.$$

Somando essa igualdade para todos os pares de datas possíveis, obtemos

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{q=0}^{T}\left(p_t \Delta c_{i,t,q} + p_q \Delta c_{i,q,t}\right) = 0$$

Restrição orçamentária intertemporal (continuação)

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{q=0}^{T}\left(p_t\Delta c_{i,t,q}+p_q\Delta c_{i,q,t}\right)=0$$

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{q=0}^{T}p_t\Delta c_{i,t,q}+\sum_{t=0}^{T}\sum_{q=0}^{T}p_q\Delta c_{i,q,t}=0$$

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{q=0}^{T}p_t\Delta c_{i,t,q}+\sum_{q=0}^{T}\sum_{t=0}^{T}p_q\Delta c_{i,q,t}=0$$

$$\sum_{t=0}^{T}p_t\sum_{q=0}^{T}\Delta c_{i,t,q}+\sum_{q=0}^{T}p_q\sum_{t=0}^{T}\Delta c_{i,q,t}=0$$

$$\sum_{t=0}^{T}p_t\Delta c_{i,t}+\sum_{q=0}^{T}p_q\Delta c_{i,q}=0$$

Restrição orçamentária intertemporal (continuação)

$$\sum_{t=0}^{T} p_t \Delta c_{i,t} + \sum_{t=0}^{T} p_t \Delta c_{i,t} = 0$$

$$\sum_{t=0}^{T} p_t \Delta c_{i,t} = 0$$

$$\sum_{t=0}^{T} p_t w_{i,t} + \sum_{t=0}^{T} p_t \Delta c_{i,t} = \sum_{t=0}^{T} p_t w_{i,t}$$

$$\sum_{t=0}^{T} p_t (w_{i,t} + \Delta c_{i,t}) = \sum_{t=0}^{T} p_t w_{i,t}$$

$$\sum_{t=0}^{T} p_t c_{i,t} = \sum_{t=0}^{T} p_t w_{i,t}$$

Restrição orçamentária intertemporal (continuação)

$$\sum_{t=0}^{T} p_t c_{i,t} = \sum_{t=0}^{T} p_t w_{i,t}$$

O valor presente do consumo após as trocas é igual ao valor presente da dotação inicial. Essa é a chamada restrição orçamentária intertemporal.

Restrição orçamentária em termos de valor presente:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_{i,t}}{(1+i_t)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{w_{i,t}}{(1+i_t)^t}$$

Restrição orçamentária em termos de valor futuro:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{(1+i_T)^T}{(1+i_t)^t} c_{i,t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{(1+i_T)^T}{(1+i_t)^t} w_{i,t}$$

Exemplo: 1 período 2 datas

Se a dotação inicial do agente i for $\mathbf{w}_i = (w_{i,0}, w_{i,1})$, sua restrição orçamentária será

$$c_{i,0} + p_{1,0}c_{i,1} = w_{i,0} + p_{1,0}w_{i,1}.$$

Ou, notando a taxa de juros entre os dois períodos por $r = \frac{1}{p_{1,0}} - 1$,

$$c_{i,0} + \frac{c_{i,1}}{1+r} = w_{i,0} + \frac{w_{i,1}}{1+r}.$$

Essa é a restrição orçamentária expressa em valor presente.

Exemplo (continuação)

$r = \frac{1}{p_{1,0}} - 1$,

$$c_{i,0} + \frac{c_{i,1}}{1+r} = w_{i,0} + \frac{w_{i,1}}{1+r}.$$

Se multiplicarmos dos dois lados por $p_{0,1} = \frac{1}{p_{1,0}} = 1 + r$, obtemos a restrição orçamentária em valor futuro:

$$p_{0,1}c_{i,0} + c_{i,1} = p_{0,1}w_{i,0} + w_{i,1}.$$

Ou, em termos de r

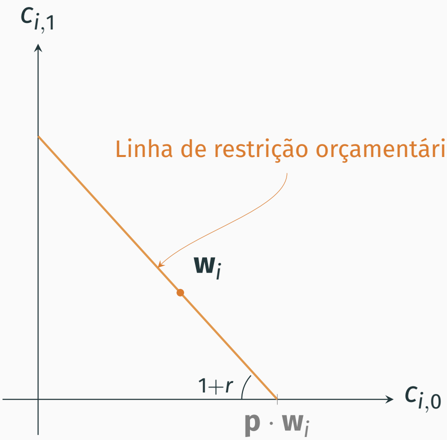
$$(1+r)c_{i,0} + c_{i,1} = (1+r)w_{i,0} + w_{i,1}$$

Exemplo (continuação)

$$(1+r)c_{i,0} + c_{i,1} = (1+r)w_{i,0} + w_{i,1}$$

Resolvendo para $c_{i,1}$,

$$c_{i,1} = w_{i,1} + (1+r)(w_{i,0} - c_{i,0}).$$



Comparação entre dotações iniciais

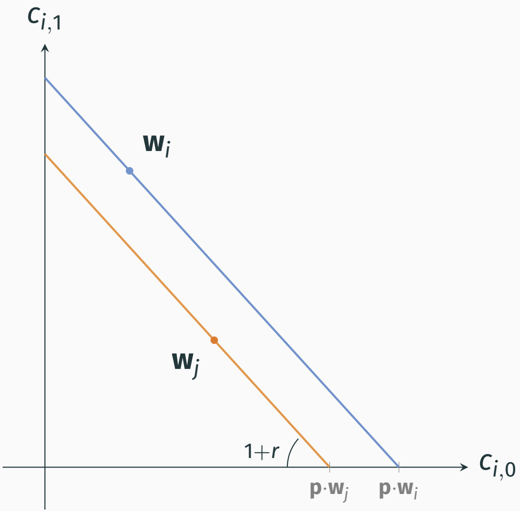
Dizemos que uma dotação inicial $\mathbf{w}_i$ domina outra dotação inicial $\mathbf{w}_j$ aos preços $\mathbf{p}$ caso, para qualquer cesta de consumo atendendo a restrição orçamentária $\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_j$, existe uma cesta de consumo $\mathbf{c}_i \gg \mathbf{c}_j$ tal que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}_i \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i$.

Se $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i > \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_j$, $\mathbf{w}_i$ domina a dotação inicial $\mathbf{w}_j$. Pois, para qualquer cesta de bens $\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_j$ a cesta $\mathbf{c}_i = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_j} \mathbf{c}_j$ é tal que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i$ e $\mathbf{c}_i \gg \mathbf{c}_j$.

Se $\mathbf{w}_i$ domina $\mathbf{w}_j$, então como $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c}_i > \mathbf{p} \cdot \mathbf{c}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_j$.

Portanto, $\mathbf{w}_i$ domina $\mathbf{w}_j$ se, e somente se, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i > \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_j$.

Exemplo: $\mathbf{w}_i$ domina $\mathbf{w}_j$



Valor de um ativo

Seja um ativo que prometa gerar os fluxos de caixa $f_1, f_2, \ldots, f_T$ nas datas $1, 2, \ldots, T$ e seja vendido pelo valor v na data 0.

Seja

$$vp = p_{1,0} \times f_1 + p_{2,0} \times f_2 + \cdots + p_{T,0} \times f_T = \frac{f_1}{1+i_1} + \frac{f_2}{(1+i_2)^2} + \cdots + \frac{f_T}{(1+i_T)^T}$$

A variação do valor presente da dotação causada pela compra do ativo é $vp - v$.

Se $v < vp$, a compra do ativo acrescenta valor à dotação inicial e, portanto, resulta em uma dotação que domina a dotação original.

Se $v < vp$, a venda do ativo acrescenta valor à dotação inicial e, portanto, resulta em uma dotação que domina a dotação original.

Portanto, assumindo-se a hipótese de não argitragem, devemos ter $v = vp$.

Exemplo: duas datas

$w_{i,0} = 3$, $w_{i,1} = 5$ e $p_{1,0} = 0{,}9$.

O valor presente da dotação inical é

$$w_{i,0} + p_{1,0} w_{i,1} = 3 + 5 \times 0{,}9 = 7{,}5.$$

Existe um ativo que prometa pagar 2,4 unidades de consumo na data 1.

O valor presente desse ativo é $vp = 0{,}9 \times 2{,}4 = 2{,}16$.

Se o ativo for vendido a $v = 1{,}5$, então, se o agente comprar o ativo, sua dotação passa a ser de $w_{i,0} - v = 1{,}5$ unidade de consumo na data 0 e $w_{i,1} + 2{,}4 = 7{,}4$ unidades de consumo na data 1.

O valor dessa nova dotação é $1{,}5 + 0{,}9 \times 7{,}4 = 8{,}16$. Portanto, a nova dotação domina a dotação original.

Exemplo: ilustração gráfica