Utilidade média variância, carteira ótima e o modelo CAPM

Roberto Guena de Oliveira

July 15, 2023

Sumário

Utilidade média variância

Utilidade média variância

Diversos modelos financeiros assumem que os investidores tem preferências representáveis por uma função de utilidade $u(\mu, \sigma)$ na qual μ é a esperança matemática da taxa de retorno sobre a riqueza e σ é o desvio padrão dessa taxa de retorno.

Utilidade média variância

Diversos modelos financeiros assumem que os investidores tem preferências representáveis por uma função de utilidade $u(\mu, \sigma)$ na qual μ é a esperança matemática da taxa de retorno sobre a riqueza e σ é o desvio padrão dessa taxa de retorno. Duas hipóteses poderiam alternativamente justificar essa função de utilidade:

1. A função de utilidade de Bernouille tem a forma $u(Y) = Y - bY^2, b > 0$ (implica não monotonicidade e coeficiente de aversão absoluta ao risco crescente); ou

Utilidade média variância

Diversos modelos financeiros assumem que os investidores tem preferências representáveis por uma função de utilidade $u(\mu, \sigma)$ na qual μ é a esperança matemática da taxa de retorno sobre a riqueza e σ é o desvio padrão dessa taxa de retorno. Duas hipóteses poderiam alternativamente justificar essa função de utilidade:

1. A função de utilidade de Bernouille tem a forma $u(Y) = Y - bY^2, b > 0$ (implica não monotonicidade e coeficiente de aversão absoluta ao risco crescente); ou
2. Os rendimentos dos ativos que compõem a carteira de investimentos têm distribuição conjunta normal.

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$u(Y) = Y - bY^2$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$u(Y) = Y - bY^2$$

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right)$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$
\begin{aligned}
u(Y) &= Y - bY^2 \\
\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &= \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$
\begin{aligned}
u(Y) &= Y - bY^2 \\
\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &= \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\text{Var}\,\tilde{Y} = \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2
$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$
\begin{aligned}
u(Y) &= Y - bY^2 \\
\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &= \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 \\
\operatorname{Var}\tilde{Y} &= \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$\begin{aligned} u(Y) &= Y - bY^2 \\ \mathbb{E}u(\tilde{Y}) &= \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 \\ \operatorname{Var}\tilde{Y} &= \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right] = \mathbb{E}\tilde{Y}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{Y} \end{aligned} \tag{1}$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$u(Y) = Y - bY^2$$

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 \tag{1}$$

$$\operatorname{Var}\tilde{Y} = \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right] = \mathbb{E}\tilde{Y}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{Y}$$

$$\mathbb{E}\tilde{Y}^2 = \operatorname{Var}\tilde{Y} + \mathbb{E}^2\tilde{Y} \tag{2}$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$u(Y) = Y - bY^2$$

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 \tag{1}$$

$$\operatorname{Var}\tilde{Y} = \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right] = \mathbb{E}\tilde{Y}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{Y}$$

$$\mathbb{E}\tilde{Y}^2 = \operatorname{Var}\tilde{Y} + \mathbb{E}^2\tilde{Y} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), chegamos a

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}^2\tilde{Y} - b\operatorname{Var}\tilde{Y}$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$u(Y) = Y - bY^2$$

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 \tag{1}$$

$$\operatorname{Var}\tilde{Y} = \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right] = \mathbb{E}\tilde{Y}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{Y}$$

$$\mathbb{E}\tilde{Y}^2 = \operatorname{Var}\tilde{Y} + \mathbb{E}^2\tilde{Y} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), chegamos a

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}^2\tilde{Y} - b\operatorname{Var}\tilde{Y} = u(\mathbb{E}\tilde{Y}) - b\operatorname{Var}\tilde{Y}.$$

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$
\begin{aligned}
u(Y) &= Y - bY^2 \\
\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &= \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 && (1) \\
\operatorname{Var}\tilde{Y} &= \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right] = \mathbb{E}\tilde{Y}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{Y} \\
\mathbb{E}\tilde{Y}^2 &= \operatorname{Var}\tilde{Y} + \mathbb{E}^2\tilde{Y} && (2)
\end{aligned}
$$

Substituindo (2) em (1), chegamos a

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}^2\tilde{Y} - b\operatorname{Var}\tilde{Y} = u(\mathbb{E}\tilde{Y}) - b\operatorname{Var}\tilde{Y}.$$

Ou seja, a utilidade esperada — $\mathbb{E}u(\tilde{Y})$ — é inteiramente definida pela riqueza esperada — $\mathbb{E}\tilde{Y}$ — e sua variância — $\operatorname{Var}\tilde{Y}$.

Utilidade média variância como aproximação

Sejam Y_0 a riqueza investida, $\tilde{r}$ a rentabilidade da carteira de investimentos, $\tilde{Y} = (1 + \tilde{r})Y_0$, $\bar{r} = \mathbb{E}\tilde{r}$, $\bar{Y} = \mathbb{E}\tilde{Y} = (1 + \bar{r})Y_0$ e $u(Y)$ a função de utilidade da investidora.

Utilidade média variância como aproximação

Sejam Y_0 a riqueza investida, $\tilde{r}$ a rentabilidade da carteira de investimentos, $\tilde{Y} = (1 + \tilde{r})Y_0$, $\bar{r} = \mathbb{E}\tilde{r}$, $\bar{Y} = \mathbb{E}\tilde{Y} = (1 + \bar{r})Y_0$ e $u(Y)$ a função de utilidade da investidora. Então, usando uma série de Taylor de primeira ordem,

$$u(\tilde{Y}) \approx u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})$$

Utilidade média variância como aproximação

Sejam Y_0 a riqueza investida, $\tilde{r}$ a rentabilidade da carteira de investimentos, $\tilde{Y} = (1 + \tilde{r})Y_0$, $\bar{r} = \mathbb{E}\tilde{r}$, $\bar{Y} = \mathbb{E}\tilde{Y} = (1 + \bar{r})Y_0$ e $u(Y)$ a função de utilidade da investidora. Então, usando uma série de Taylor de primeira ordem,

$$u(\tilde{Y}) \approx u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})$$

Assim, a utilidade esperada é

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) \approx \mathbb{E}\left[u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})\right]$$

Utilidade média variância como aproximação

Sejam Y_0 a riqueza investida, $\tilde{r}$ a rentabilidade da carteira de investimentos, $\tilde{Y} = (1+\tilde{r})Y_0$, $\bar{r} = \mathbb{E}\tilde{r}$, $\bar{Y} = \mathbb{E}\tilde{Y} = (1+\bar{r})Y_0$ e $u(Y)$ a função de utilidade da investidora. Então, usando uma série de Taylor de primeira ordem,

$$u(\tilde{Y}) \approx u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})$$

Assim, a utilidade esperada é

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &\approx \mathbb{E}\left[u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})\right] \\
&= u(\bar{Y}) + u'(\bar{Y})\mathbb{E}(\tilde{Y} - \bar{Y}) + \frac{u''(\bar{Y})}{2}\mathbb{E}(\tilde{Y} - \bar{Y})^2
\end{aligned}$$

Utilidade média variância como aproximação

Sejam Y_0 a riqueza investida, $\tilde{r}$ a rentabilidade da carteira de investimentos, $\tilde{Y} = (1 + \tilde{r})Y_0$, $\bar{r} = \mathbb{E}\tilde{r}$, $\bar{Y} = \mathbb{E}\tilde{Y} = (1 + \bar{r})Y_0$ e $u(Y)$ a função de utilidade da investidora. Então, usando uma série de Taylor de primeira ordem,

$$u(\tilde{Y}) \approx u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})$$

Assim, a utilidade esperada é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &\approx \mathbb{E}\left[u(\bar{Y}) + (\tilde{Y} - \bar{Y})u'(\bar{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{2}u''(\bar{Y})\right] \\ &= u(\bar{Y}) + u'(\bar{Y})\mathbb{E}(\tilde{Y} - \bar{Y}) + \frac{u''(\bar{Y})}{2}\mathbb{E}(\tilde{Y} - \bar{Y})^2 \\ &= u(\bar{Y}) + \frac{u''(\bar{Y})}{2}\operatorname{Var}\tilde{Y}.\end{aligned}$$

Utilidade média variância como aproximação

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &\approx u(\bar{Y}) + \frac{u''(\bar{Y})}{2}\operatorname{Var}\tilde{Y} \\ &= u[Y_0(1+\bar{r})] + \frac{u''[Y_0(1+\bar{r})]}{2}\operatorname{Var}Y_0(1+\tilde{r})\end{aligned}$$

Utilidade média variância como aproximação

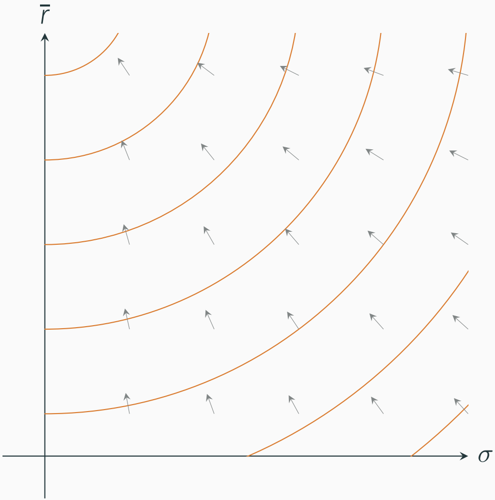
$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(\tilde{Y}) \approx u(\bar{Y}) + \frac{u''(\bar{Y})}{2} \operatorname{Var} \tilde{Y} \\ = u[Y_0(1+\bar{r})] + \frac{u''[Y_0(1+\bar{r})]}{2} \operatorname{Var} Y_0(1+\tilde{r}) \\ = u[Y_0(1+\bar{r})] + \frac{Y_0^2}{2} u''[Y_0(1+\bar{r})] \operatorname{Var} \tilde{r}\end{aligned}$$

Utilidade média variância como aproximação

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &\approx u(\bar{Y}) + \frac{u''(\bar{Y})}{2}\operatorname{Var}\tilde{Y}\\ &= u[Y_0(1+\bar{r})] + \frac{u''[Y_0(1+\bar{r})]}{2}\operatorname{Var}Y_0(1+\tilde{r})\\ &= u[Y_0(1+\bar{r})] + \frac{Y_0^2}{2}u''[Y_0(1+\bar{r})]\operatorname{Var}\tilde{r} = \upsilon(\mu,\sigma).\end{aligned}$$

Em que $\mu = \bar{r}$ e $\sigma = \sqrt{\operatorname{Var}\tilde{r}}$.

Curvas de indiferença para utilidade média variância



Rentabilidade e desvio padrão de uma carteira com dois ativos

Carteira com dois ativos: notação

$\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$ são os retornos dos ativos 1 e 2 respectivamente;

$\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ são as esperanças desses retornos;

σ_1 e σ_2 são os desvios padrões desses retornos;

$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$ é a covariância entre esses dois retornos;

Y_0 É o valor total do investimento;

w É a fração do valor investido que foi usado na aquisição do ativo 1, de tal sorte que o valor investido no ativo 1 é wY_0 e o valor investido no ativo 2 é $(1 - w)Y_0$.

Carteira de dois ativos: retorno esperado

O valor obtido com a carteira de ativos ao final do período de investimento será

$$\tilde{F} = (1 + \tilde{r}_1) \times wY_0 + (1 + \tilde{r}_2) \times (1 - w)Y_0 = Y_0[1 + \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)].$$

Carteira de dois ativos: retorno esperado

O valor obtido com a carteira de ativos ao final do período de investimento será

$$\tilde{F} = (1 + \tilde{r}_1) \times wY_0 + (1 + \tilde{r}_2) \times (1 - w)Y_0 = Y_0[1 + \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)].$$

O valor esperado é

$$\bar{F} = Y_0[1 + \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)].$$

Carteira de dois ativos: retorno esperado

O valor obtido com a carteira de ativos ao final do período de investimento será

$$\tilde{F} = (1 + \tilde{r}_1) \times wY_0 + (1 + \tilde{r}_2) \times (1 - w)Y_0 = Y_0[1 + \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)].$$

O valor esperado é

$$\bar{F} = Y_0[1 + \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)].$$

O retorno é

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{F}}{Y_0} - 1 = \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2).$$

O retorno esperado é

$$\bar{R} = \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2).$$

Carteira de dois ativos: retorno esperado

O valor obtido com a carteira de ativos ao final do período de investimento será

$$\tilde{F} = (1 + \tilde{r}_1) \times wY_0 + (1 + \tilde{r}_2) \times (1 - w)Y_0 = Y_0[1 + \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)].$$

O valor esperado é

$$\bar{F} = Y_0[1 + \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)].$$

O retorno é

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{F}}{Y_0} - 1 = \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2).$$

O retorno esperado é

$$\bar{R} = \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2).$$

A variância do retorno é

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2 + 2w(1 - w)\sigma_{1,2}$$

Carteira com dois ativos: variância mínima

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

Carteira com dois ativos: variância mínima

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_R^2}{dw} &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-2w)\sigma_{1,2} \\ &= 2[w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) - \sigma_2^2 + \sigma_{1,2}]\end{aligned}$$

Carteira com dois ativos: variância mínima

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_R^2}{dw} &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-2w)\sigma_{1,2} \\ &= 2[w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) - \sigma_2^2 + \sigma_{1,2}]\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\sigma_R^2}{dw^2} = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2})$$

Carteira com dois ativos: variância mínima

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_R^2}{dw} &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-2w)\sigma_{1,2} \\ &= 2[w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) - \sigma_2^2 + \sigma_{1,2}]\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\sigma_R^2}{dw^2} = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) = 2\,\mathrm{Var}(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \geq 0.$$

Carteira com dois ativos: variância mínima

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_R^2}{dw} &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-2w)\sigma_{1,2} \\ &= 2[w(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{1,2}) - \sigma_2^2 + \sigma_{1,2}]\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\sigma_R^2}{dw^2} = 2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{1,2}) = 2\,\mathrm{Var}(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \geq 0.$$

Portanto, para minimizar a variância, basta fazer

$$w(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{1,2}) - \sigma_1^2 + \sigma_{1,2} = 0 \Rightarrow w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{1,2}}.$$

Carteira com dois ativos: variância e rentabiliade esperada

$$\bar{R} = \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

Carteira com dois ativos: variância e rentabiliade esperada

$$\bar{R} = \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

Assumindo $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$, resolvendo a 1ª equação para w e substituindo o resultado na segunda equação obtemos

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\bar{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\bar{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2} \quad (3)$$

Carteira com dois ativos: variância e rentabilidade esperada

A última expressão do slide anterior pode ser transformada em

$$\frac{\sigma_R^2}{\gamma(\beta-\alpha^2)} - \frac{(\bar{R}-\alpha)^2}{\beta-\alpha^2} = 1$$

onde

$$\alpha = \frac{\bar{r}_2\sigma_1^2 + \bar{r}_1\sigma_2^2 - \sigma_{12}(\bar{r}_1+\bar{r}_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}$$

$$\beta = \frac{\bar{r}_2^2\sigma_1^2 + \bar{r}_1^2\sigma_2^2 - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}$$

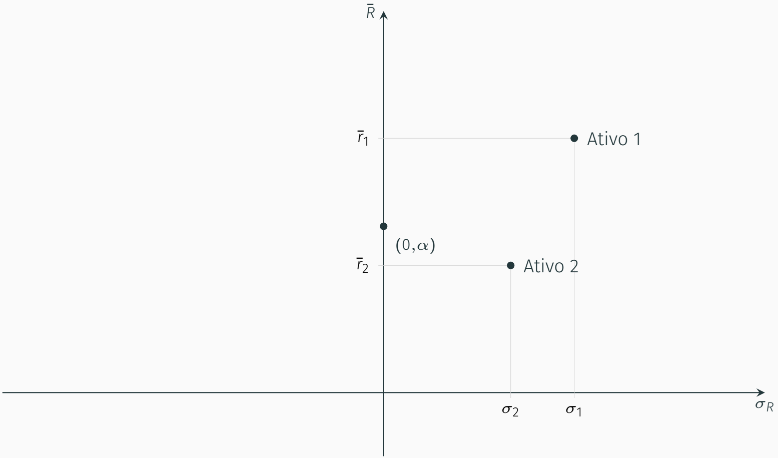
e

$$\gamma = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1-\bar{r}_2)^2}$$

Os possíveis pares $(\sigma_R, \bar{R})$ descrevem uma hipérbole com centro no ponto $(0, \alpha)$, eixo transversal paralelo ao eixo de σ_R, e vértices nos pontos $(\sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)}, \alpha)$ e $(-\sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)}, \alpha)$.

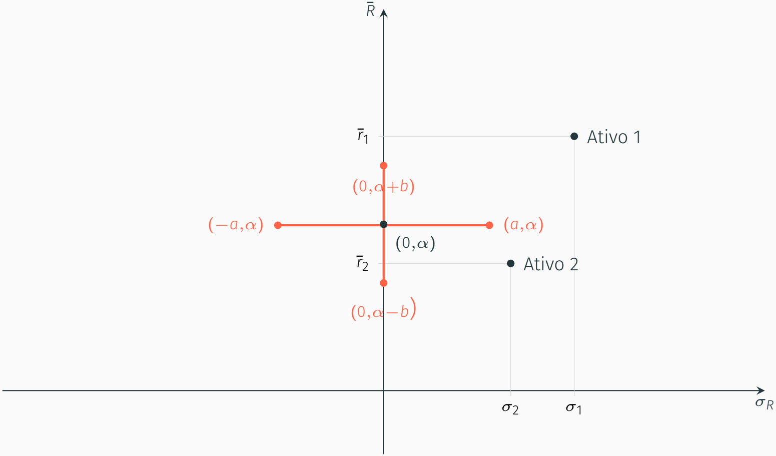
Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada

$$\frac{\sigma_R^2}{a^2} - \frac{(\bar{R}-\alpha)^2}{b^2} = 1; \quad a = \sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)};\ b = \sqrt{\beta-\alpha^2}$$



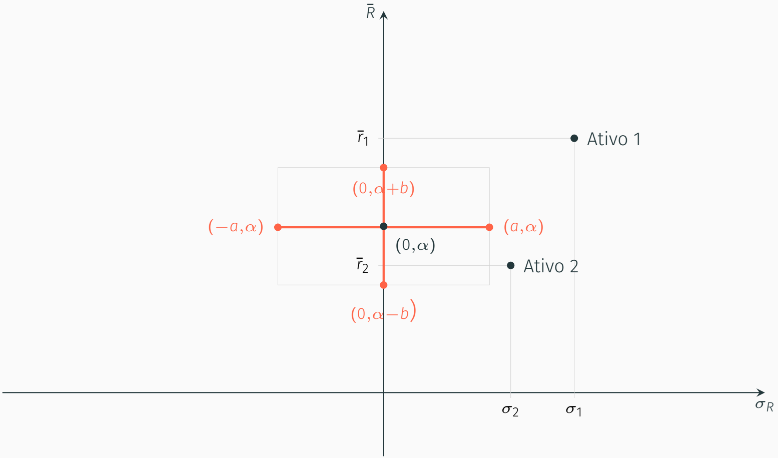
Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada

$$\frac{\sigma_R^2}{a^2} - \frac{(\bar{R}-\alpha)^2}{b^2} = 1; \quad a = \sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)};\ b = \sqrt{\beta-\alpha^2}$$



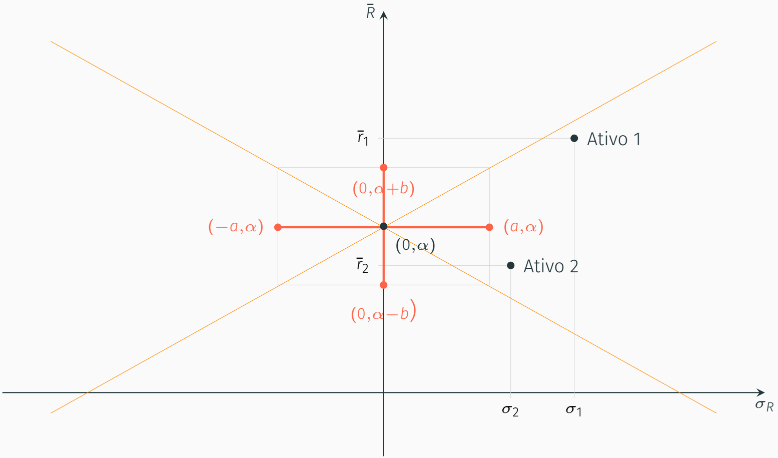
Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada

$$\frac{\sigma_R^2}{a^2} - \frac{(\bar{R} - \alpha)^2}{b^2} = 1; \quad a = \sqrt{\gamma(\beta - \alpha^2)};\ b = \sqrt{\beta - \alpha^2}$$



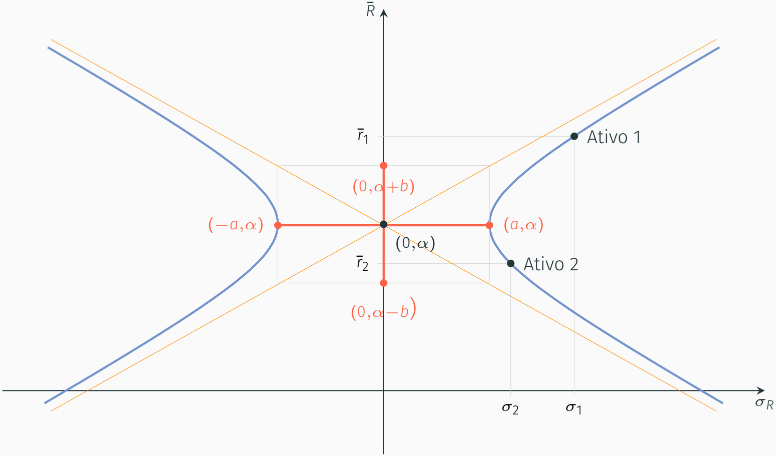
Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada

$$\frac{\sigma_R^2}{a^2} - \frac{(\bar{R}-\alpha)^2}{b^2} = 1; \quad a = \sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)};\ b = \sqrt{\beta-\alpha^2}$$

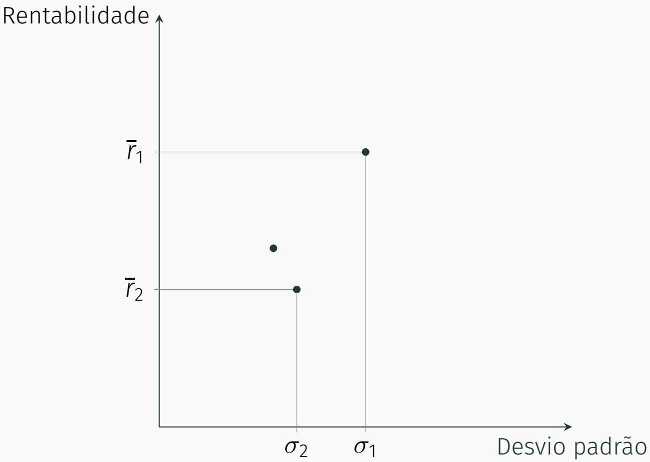


Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada

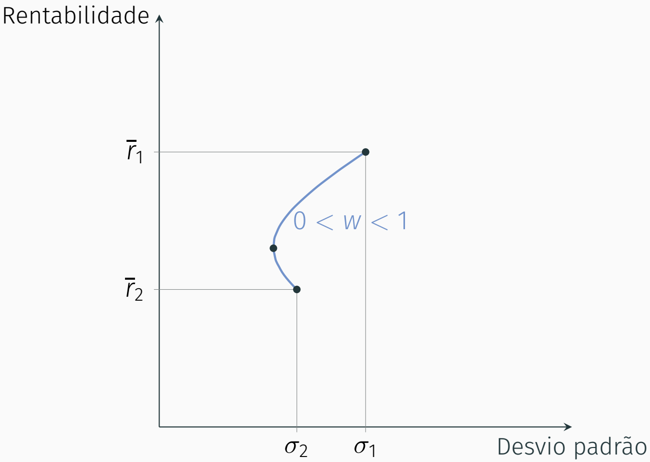
$$\frac{\sigma_R^2}{a^2} - \frac{(\bar{R} - \alpha)^2}{b^2} = 1; \quad a = \sqrt{\gamma(\beta - \alpha^2)}; \; b = \sqrt{\beta - \alpha^2}$$



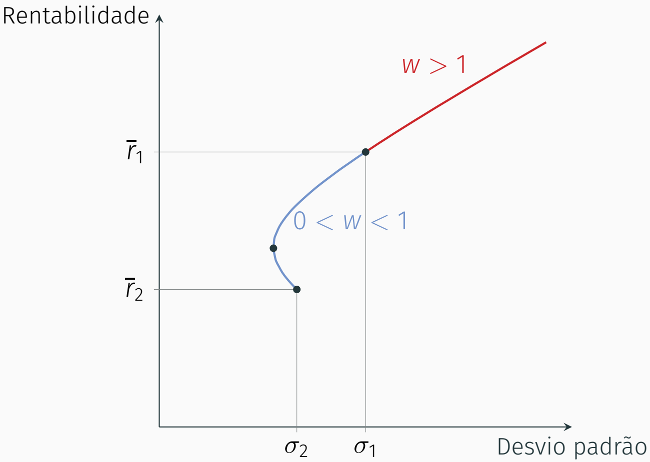
Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada



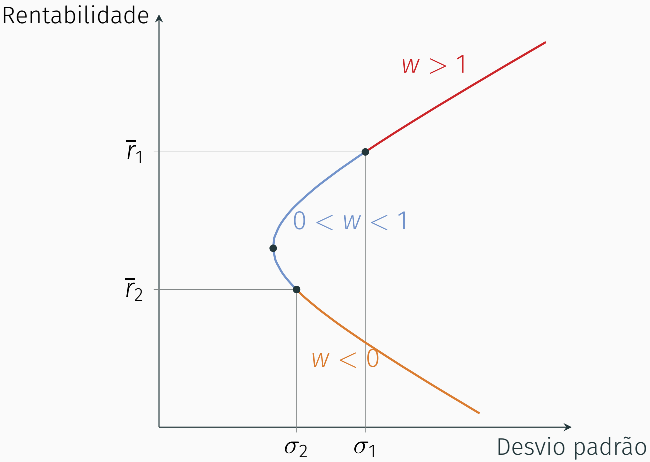
Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada



Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada



Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada



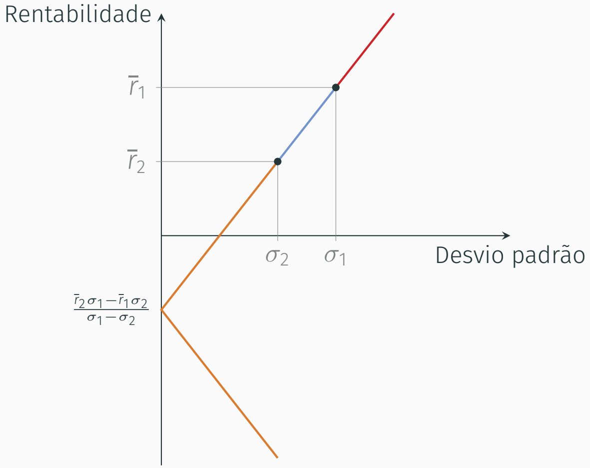
Correlação linear positiva perfeita

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\bar{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}\left(\bar{r}_1 + \bar{r}_2\right)}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\bar{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}$$

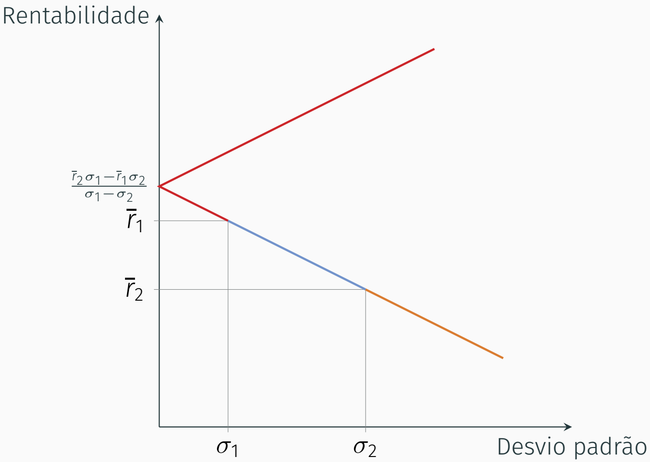
Havendo correlação linear positiva perfeita, $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$. Substituindo acima e simplificando vem

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_R$$

Correlação linear perfeita positiva com $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ e $\sigma_1 > \sigma_2$



Correlação linear perfeita positiva com $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$



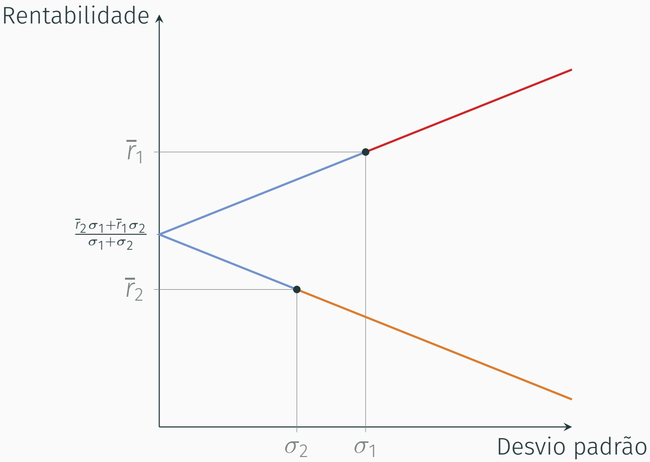
Correlação linear negativa perfeita

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\bar{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}\left(\bar{r}_1 + \bar{r}_2\right)}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\bar{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}$$

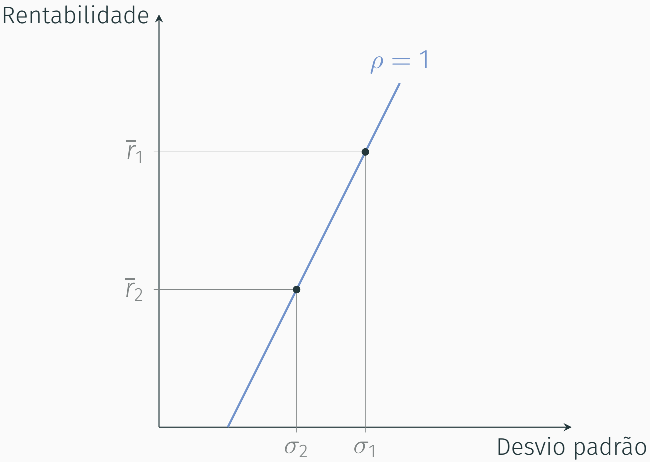
Havendo correlação linear negativa perfeita, $\sigma_{12} = -\sigma_1\sigma_2$. Substituindo acima e simplificando vem

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_R.$$

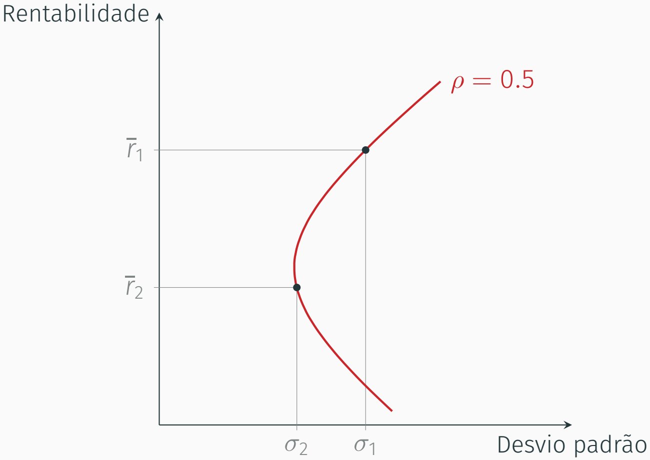
Correlação linear perfeita negativa



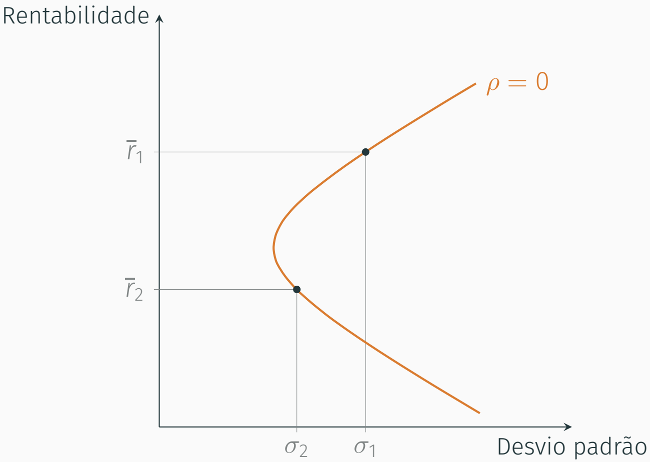
Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



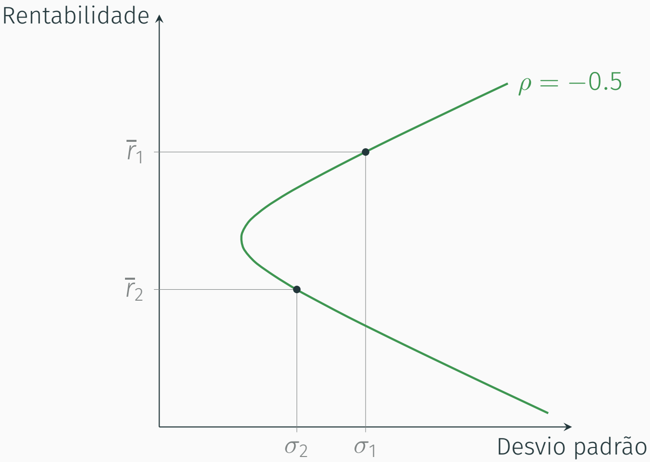
Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



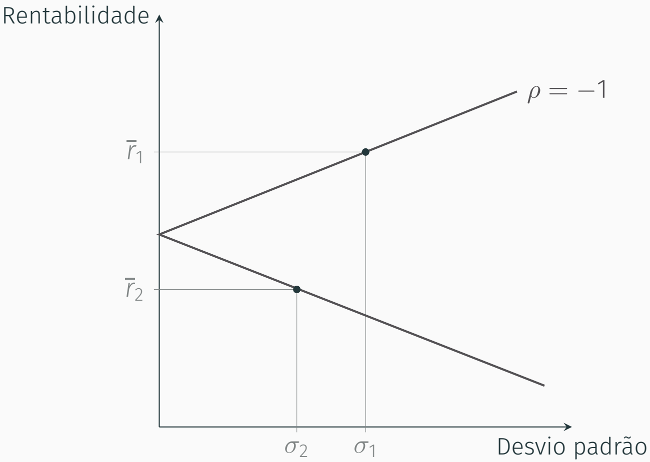
Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



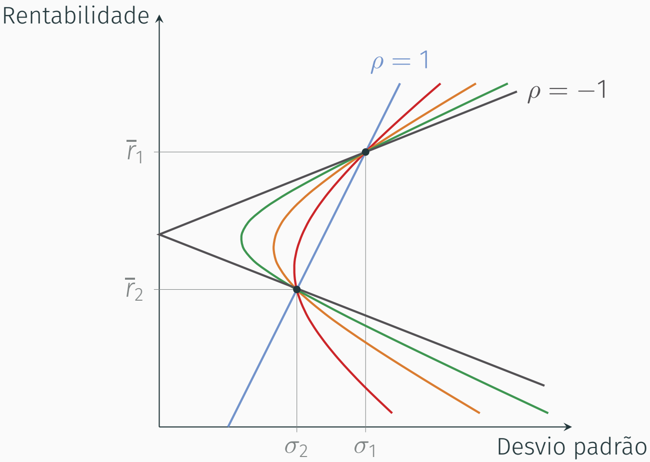
Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



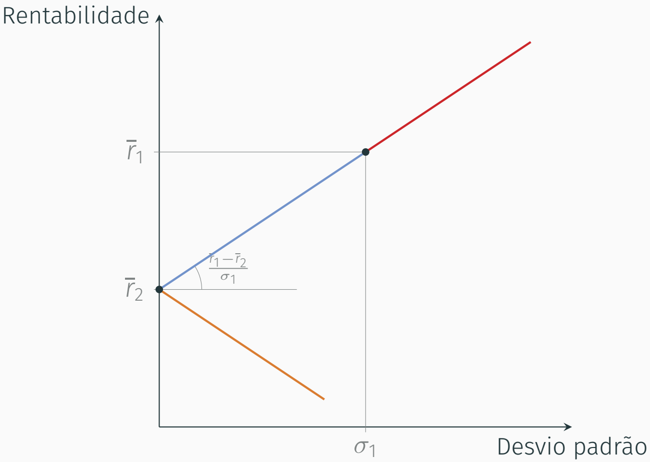
Um ativo livre de risco e um ativo com risco

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\bar{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}\left(\bar{r}_1 + \bar{r}_2\right)}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\bar{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}$$

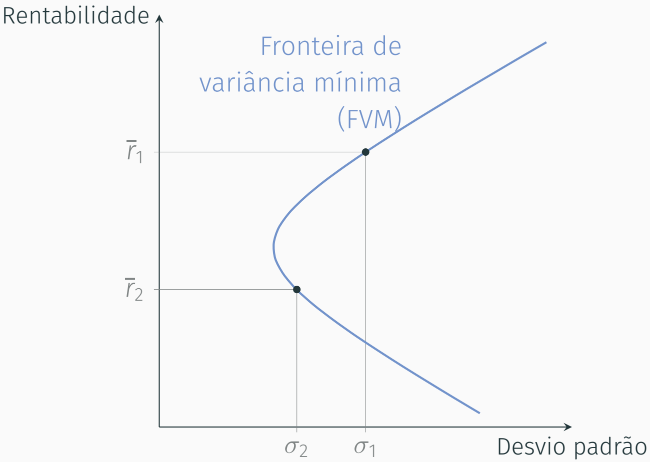
Se o ativo 2 é livre de risco, $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$. Substituindo acima e simplificando vem

$$\bar{R} = \bar{r}_2 \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1}\sigma_R.$$

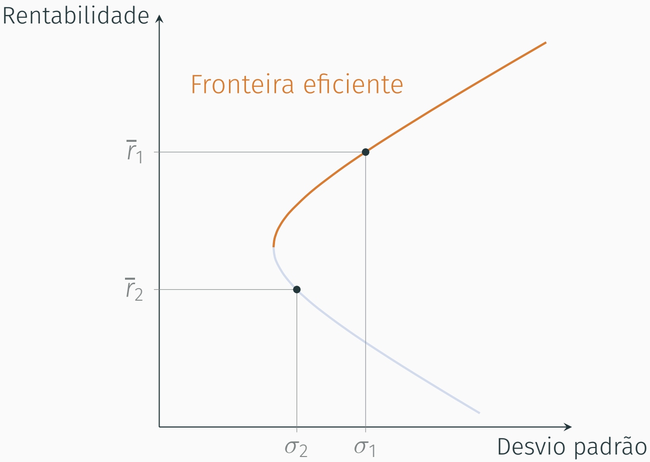
Um ativo livre de risco e um ativo com risco



O conjunto eficiente ou a fronteira eficiente



O conjunto eficiente ou a fronteira eficiente



Rentabilidade e desvio padrão de uma carteira com diversos ativos

Carteira com diversos ativos: notação

- $\tilde{r}_i$ rentabilidade do ativo i, $i = 1,2,\ldots,n$;
- $\bar{r}_i$ rentabilidade esperada do ativo;
- σ_i desvio padrão da rentabilidade do ativo i;
- σ_{ij} covariância entre as rentabilidades dos ativos i e j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
- w_i participação (em valor) do ativo i na carteira de investimentos;
- $\tilde{R}$ rentabilidade da carteira de ativos;
- $\bar{R}$ restabilidade esperada dessa carteira;
- σ_R desvio padrão dessa rentabilidade.

Carteira com diversos ativos: indicadores de rentabiliade e risco

Rentabilidade esperada

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$$

Variância

$$\begin{aligned}\sigma_R^2 &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1\,1} & \sigma_{1\,2} & \dots & \sigma_{1\,n} \\ \sigma_{2\,1} & \sigma_{2\,2} & \dots & \sigma_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n\,1} & \sigma_{n\,2} & \dots & \sigma_{n\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i\,j}\end{aligned}$$

Variância

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + & \ldots & + w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + & \ldots & + w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} & + \; w_2^2 \sigma_{2\,2} & + & \ldots & + w_2 w_i \sigma_{2\,i} & + & \ldots & + w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} & + w_i w_2 \sigma_{i\,2} & + & \vdots & + \; w_i^2 \sigma_{i\,i} & + & \vdots & + w_i w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} & + w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + & \ldots & + w_n w_i \sigma_{n\,i} & + & \ldots & + \; w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccc}
\sigma_{RR}= & w_1^2\sigma_{1\,1} & +w_1w_2\sigma_{1\,2}+ & \ldots & +w_1w_i\sigma_{1\,i}+ & \ldots & +w_1w_n\sigma_{1\,n}\\
 & +w_2w_1\sigma_{2\,1}+ & w_2^2\sigma_{2\,2} & +\ldots & +w_2w_i\sigma_{2\,i}+ & \ldots & +w_2w_n\sigma_{2\,n}\\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
 & +w_iw_1\sigma_{i\,1} & +w_iw_2\sigma_{i\,2}+ & \vdots & +\ w_i^2\sigma_{i\,i} & +\ \vdots & +w_iw_n\sigma_{2\,n}\\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
 & +w_nw_1\sigma_{n\,1} & +w_nw_2\sigma_{n\,2}+ & \ldots & +w_nw_i\sigma_{n\,i}+ & \ldots & +\ w_n^2\sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$\frac{\partial\sigma_{RR}}{\partial w_i}$$

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\sigma_{RR} = & W_1^2\sigma_{1\,1} & + W_1 W_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & W_1 W_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & W_1 W_n \sigma_{1\,n} \\
+ & W_2 W_1 \sigma_{2\,1} & + W_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & W_2 W_i \sigma_{2\,i} & + \ldots + & W_2 W_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
+ & W_i W_1 \sigma_{i\,1} & + W_i W_2 \sigma_{i\,2} & + \vdots + & W_i^2 \sigma_{i\,i} & + \vdots + & W_i W_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
+ & W_n W_1 \sigma_{n\,1} & + W_n W_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & W_n W_i \sigma_{n\,i} & + \ldots + & W_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$
\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial W_i} =
$$

Variância

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{11} & + & w_1w_2\sigma_{12} & + & \ldots & + & \color{red}{w_1w_i\sigma_{1i}} & + & \ldots & + & w_1w_n\sigma_{1n} \\
+ & w_2w_1\sigma_{21} & + & w_2^2\sigma_{22} & + & \ldots & + & w_2w_i\sigma_{2i} & + & \ldots & + & w_2w_n\sigma_{2n} \\
& \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
+ & \color{red}{w_iw_1\sigma_{i1}} & + & w_iw_2\sigma_{i2} & + & \vdots & + & w_i^2\sigma_{ii} & + & \vdots & + & w_iw_n\sigma_{2n} \\
& \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
+ & w_nw_1\sigma_{n1} & + & w_nw_2\sigma_{n2} & + & \ldots & + & w_nw_i\sigma_{ni} & + & \ldots & + & w_n^2\sigma_{nn}
\end{array}
$$

$$\frac{\partial\sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i}$$

Variância

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\sigma_{RR}= & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} + & w_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & \color{red}{w_2 w_i \sigma_{2\,i}} & + \ldots + & w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} + & \color{red}{w_i w_2 \sigma_{i\,2}} & + \vdots + & w_i^2 \sigma_{i\,i} & + \vdots + & w_i w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} + & w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & w_n w_i \sigma_{n\,i} & + \ldots + & w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}$$

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i}$$

Variância

$$
\begin{array}{rcccccc}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} + & w_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & w_2 w_i \sigma_{2\,i} & + \ldots + & w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} & + w_i w_2 \sigma_{i\,2} & + \vdots + & w_i^2 \sigma_{i\,i} & + \vdots & + w_i w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} & + w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & w_n w_i \sigma_{n\,i} & + \ldots + & w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i} \ldots$$

$$\begin{array}{rcccccc}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} + & w_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & w_2 w_i \sigma_{2\,i} & + \ldots + & w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} & + w_i w_2 \sigma_{i\,2} & + \vdots + & \color{red}{w_i^2 \sigma_{i\,i}} & + \vdots & + w_i w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} & + w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & w_n w_i \sigma_{n\,i} & + \ldots + & w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}$$

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i} \ldots + 2w_i\sigma_{ii}$$

Variância

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} + & w_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & w_2 w_i \sigma_{2\,i} & + \ldots + & w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} & + w_i w_2 \sigma_{i\,2} & + \vdots + & w_i^2 \sigma_{i\,i} & + \vdots & + w_i w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} & + w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & w_n w_i \sigma_{n\,i} & + \ldots + & w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$
\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i} \ldots + 2w_i\sigma_{ii} + \ldots
$$

Variância

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} + & w_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & w_2 w_i \sigma_{2\,i} & + \ldots + & w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} & + w_i w_2 \sigma_{i\,2} & + \vdots + & w_i^2 \sigma_{i\,i} & + \vdots & + {\color{red} w_i w_n \sigma_{2\,n}} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} & + w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & {\color{red} w_n w_i \sigma_{n\,i}} & + \ldots + & w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$
\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i} \ldots + 2w_i\sigma_{ii} + \ldots + 2w_n\sigma_{ni}
$$

Variância

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1 w_2 \sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1 w_i \sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1 w_n \sigma_{1\,n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{2\,1} + & w_2^2 \sigma_{2\,2} & + \ldots + & w_2 w_i \sigma_{2\,i} & + \ldots + & w_2 w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_i w_1 \sigma_{i\,1} & + w_i w_2 \sigma_{i\,2} & + \vdots + & w_i^2 \sigma_{i\,i} & + \vdots & + w_i w_n \sigma_{2\,n} \\
& \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& + w_n w_1 \sigma_{n\,1} & + w_n w_2 \sigma_{n\,2} & + \ldots + & w_n w_i \sigma_{n\,i} & + \ldots + & w_n^2 \sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$
\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i} \ldots + 2w_i\sigma_{ii} + \ldots + 2w_n\sigma_{ni} = 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ji}
$$

A baixa informatividade da variância de um ativo

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial w_i} = 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} = 2\left(w_i \sigma_{ii} + \sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}\right)$$

Em uma carteira bem diversificada, w_i é pequeno e, portanto, a variância do ativo i explica muito pouco do impacto desse ativo sobre a variância da carteira de investimentos. Já o termo $\sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}$ tem impacto mais significativo, pois, apesar de os w_j's também serem pequenos, eles aparecem $n-1$ vezes.

Isso indica que o impacto de um ativo sobre o risco de uma carteira bem diversificada depende fundamentalmente de como esse ativo covaria com os outros e muito pouco da variância desse ativo.

Carteira de variância mínima

O problema
Minimizar

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sujeito à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

O problema
Minimizar

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sujeito à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right)$$

Carteira de variância mínima

Condições de 1ª ordem

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_i} = 0 \Rightarrow 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Carteira de variância mínima

Condições de 1ª ordem em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{1\,1} & 2\sigma_{1\,2} & \dots & 2\sigma_{1\,n} & 1 \\ 2\sigma_{2\,1} & 2\sigma_{2\,2} & \dots & 2\sigma_{2\,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n\,1} & 2\sigma_{n\,2} & \dots & 2\sigma_{n\,n} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_m}$$

Carteira de variância mínima

Condições de 1ª ordem em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{1\,1} & 2\sigma_{1\,2} & \dots & 2\sigma_{1\,n} & 1 \\ 2\sigma_{2\,1} & 2\sigma_{2\,2} & \dots & 2\sigma_{2\,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n\,1} & 2\sigma_{n\,2} & \dots & 2\sigma_{n\,n} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_m}$$

Solução

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{b}_m$$

Carteira de variância mínima condicionada

O problema
Minimizar

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{R}$$

Carteira de variância mínima condicionada

O problema
Minimizar

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{R}$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{R} \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right)$$

Carteira de variância mínima condicionada

Condições de 1ª ordem

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_i} = 0 \Rightarrow 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \bar{R} + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{R} = 0 \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Carteira de variância mínima condicionada

Condições de 1ª ordem em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{1\,1} & 2\sigma_{1\,2} & \dots & 2\sigma_{1\,n} & \bar{r}_1 & 1 \\ 2\sigma_{2\,1} & 2\sigma_{2\,2} & \dots & 2\sigma_{2\,n} & \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n\,1} & 2\sigma_{n\,2} & \dots & 2\sigma_{n\,n} & \bar{r}_n & 1 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{R} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Carteira de variância mínima condicionada

Condições de 1ª ordem em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{1\,1} & 2\sigma_{1\,2} & \dots & 2\sigma_{1\,n} & \bar{r}_1 & 1 \\ 2\sigma_{2\,1} & 2\sigma_{2\,2} & \dots & 2\sigma_{2\,n} & \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n\,1} & 2\sigma_{n\,2} & \dots & 2\sigma_{n\,n} & \bar{r}_n & 1 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{R} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{b}}$$

Solução

$$\mathsf{z} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{b}.$$

Propriedades da fronteira de variância mínima

Sejam $\mathbf{b}_a = (0, \ldots, 0, \bar{R}_a, 1)$, $\mathbf{b}_b = (0, \ldots, 0, \bar{R}_b, 1)$, e $\mathbf{z}_a$ e $\mathbf{z}_b$, tais que

$$\mathbf{z}_a = \mathsf{A}^{-1}\mathbf{b}_a \quad \text{e} \quad \mathbf{z}_b = \mathsf{A}^{-1}\mathbf{b}_b.$$

Os primeiros n componentes dos vetores $\mathbf{z}_a$ e $\mathbf{z}_b$, $\mathbf{w}_a$ e $\mathbf{w}_b$, são as carteiras de variância mínima associadas às rentabilidades esperadas $\bar{R}_a$ e $\bar{R}_b$, respectivamente. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, multiplicando a primeira igualdade acima por α e a segunda por $1-\alpha$, e somando as duas, obtemos

$$\alpha\mathbf{z}_a + (1-\alpha)\mathbf{z}_b = \mathsf{A}^{-1}[\alpha\mathbf{b}_a + (1-\alpha)\mathbf{b}_b]$$

Como

$$\alpha\mathbf{b}_a + (1-\alpha)\mathbf{b}_b = \left[0, \cdots, 0, \alpha\bar{R}_a + (1-\alpha)\bar{R}_b, 1\right]$$

concluímos que a carteira de menor variância dada a rentabilidade esperada $\alpha\bar{R}_a + (1-\alpha)\bar{R}_b$ é formada pelos os primeiros n componentes do vetor $\alpha\mathbf{z}_a + (1-\alpha)\mathbf{z}_b$, e, portanto é igual a $\alpha\mathbf{w}_a + (1-\alpha)\mathbf{w}_b$.

Propriedades da fronteira de variância mínima

Qualquer combinação afim de duas carteiras de investimento sobre a fronteira de variância mínima também é uma carteira de investimentos sobre a fronteira de variância mínima.

Se $\mathbf{w}_a$ é uma carteira de variância mínima à rentabiliade esperada R_a e $\mathbf{w}_b$ é uma carteira de variância mínima à rentabiliade esperada R_b, então, a carteira para qualquer R, fazendo $\alpha = \frac{\bar{R}-\bar{R}_b}{\bar{R}_a-\bar{R}_b}$, a carteira $\alpha\mathbf{w}_a + (1-\alpha)\mathbf{w}_b$, é uma carteira de variância mínima associada à rentabilidade esperada $\bar{R}$ e sua variânicia pode ser calculada com a fórmula

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2\sigma_a^2 + (1-\alpha)^2\sigma_b^2 + \alpha(1-\alpha)\sigma_{ab}.$$

Na qual

$$\sigma_a^2 = \mathbf{w}_a^\intercal \mathbf{A}\,\mathbf{w}_a, \quad \sigma_b^2 = \mathbf{w}_b^\intercal \mathbf{A}\,\mathbf{w}_b, \quad \text{e} \quad \sigma_{ab} = \mathbf{w}_b^\intercal \mathbf{A}\,\mathbf{w}_b.$$

Qualquer ponto sobre a FVM pode ser obtido a partir de uma combinação afim de duas carteiras sobre essa fronteira. O gráfico da FVM é uma hipérbole côncava à direita.

A carteira zero-beta

Considere duas carteiras $\mathbf{w}_m$ e $\mathbf{w}_a$ sobre a fronteira de variância mínima, com $\bar{R}_m \neq \bar{R}_a$.

Considere agora a carteira $\mathbf{w}_\alpha = \alpha \mathbf{m}_m + (1-\alpha)\mathbf{w}_a$, sendo que α é uma constante real qualquer. A covariância entre a rentabilidade da carteira $\mathbf{w}_\alpha$ e a carteira $\mathbf{w}_m$ é

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha,m} = \mathrm{Cov}\left[\alpha\tilde{R}_m + (1-\alpha)\tilde{R}_a, \tilde{R}_m\right] &= \alpha \,\mathrm{Cov}(\tilde{R}_m, \tilde{R}_m) + (1-\alpha)\,\mathrm{Cov}(\tilde{R}_m, \tilde{R}_a) \\ &= \alpha\sigma_{mm} + (1-\alpha)\sigma_{am}\end{aligned}$$

O valor de α que faz com que essa covariância seja nula é

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1}$$

A carteira zero-beta (continuação)

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1}$$

A carteira zero-beta (continuação)

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1}$$

A razão $\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$ é chamada de beta da carteira $\mathbf{w}_a$ em relação à carteira $\mathbf{w}_b$ e é notada por β_{am}.

A carteira zero-beta (continuação)

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1} = \frac{\beta_{ma}}{\beta_{ma} - 1}$$

A razão $\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$ é chamada de beta da carteira $\mathbf{w}_a$ em relação à carteira $\mathbf{w}_b$ e é notada por β_{am}.

A carteira zero-beta (continuação)

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1} = \frac{\beta_{ma}}{\beta_{ma} - 1}$$

A razão $\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$ é chamada de beta da carteira $\mathbf{w}_a$ em relação à carteira $\mathbf{w}_b$ e é notada por β_{am}.

Façamos

$$\mathbf{w}_{om} = \alpha_{om}\mathbf{w}_m + (1 - \alpha_{om})\mathbf{w}_a$$

A carteira zero-beta (continuação)

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1} = \frac{\beta_{ma}}{\beta_{ma} - 1}$$

A razão $\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$ é chamada de beta da carteira $\mathbf{w}_a$ em relação à carteira $\mathbf{w}_b$ e é notada por β_{am}.

Façamos

$$\mathbf{w}_{om} = \alpha_{om}\mathbf{w}_m + (1 - \alpha_{om})\mathbf{w}_a$$

Como, por construção, $\sigma_{om} = 0$, então $\beta_{om} = 0$. Por essa razão, a carteira $\mathbf{w}_{om}$ é chamada de carteira zero-beta da carteira $\mathbf{w}_m$.

A carteira zero-beta (continuação)

$$\alpha_{om} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{am} - \sigma_{mm}} = \frac{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}} - 1} = \frac{\beta_{ma}}{\beta_{ma} - 1}$$

A razão $\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$ é chamada de beta da carteira $\mathbf{w}_a$ em relação à carteira $\mathbf{w}_b$ e é notada por β_{am}.

Façamos

$$\mathbf{w}_{om} = \alpha_{om}\mathbf{w}_m + (1 - \alpha_{om})\mathbf{w}_a$$

Como, por construção, $\sigma_{om} = 0$, então $\beta_{om} = 0$. Por essa razão, a carteira $\mathbf{w}_{om}$ é chamada de carteira zero-beta da carteira $\mathbf{w}_m$.

Note que, como, $\mathbf{w}_a$ e $\mathbf{w}_m$ estão sobre a FVM, $\mathbf{w}_{om}$ também está sobre essa fronteira.

Inclinação da fronteira de variância mínima

Considere uma carteira $\mathbf{w}_m$ localizada sobre a FVM com rentabilidade esperada $\bar{R}_m$ e desvio padrão σ_m e uma outra carteira de investimentos qualquer $\mathbf{w}_b$ com rentabilidade esperada $\bar{R}_b$ e desvio padrão σ_b.

Considere a carteira de investimentos $\mathbf{w}_\alpha = \alpha \mathbf{w}_m + (1-\alpha)\mathbf{w}_b$. O desvio padrão dessa carteira é dado por

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha^2\sigma_m^2 + (1-\alpha)^2\sigma_b^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{bm}} \tag{4}$$

Se quisermos fazer com que a rentabilidade esperada dessa carteira seja $\bar{R}$, devemos escolher

$$\alpha = \frac{\bar{R} - \bar{R}_b}{\bar{R}_a - \bar{R}_b}$$

Então

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\bar{R}} = \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\bar{R}} = \frac{\alpha\sigma_m^2 - (1-\alpha)\sigma_b^2 + (1-2\alpha)\sigma_{bm}}{(\bar{R}_m - \bar{R}_b)\sqrt{\alpha^2\sigma_m^2 + (1-\alpha)^2\sigma_b^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{bm}}} \tag{5}$$

Inclinação da fronteira de variância mínima (continuação)

Seja $\sigma(\bar{R})$ a função que descreve o desvio padrão da carteira de variância mínima condicionada à rentabilidade esperada $\bar{R}$.

Inclinação da fronteira de variância mínima (continuação)

Seja $\sigma(\bar{R})$ a função que descreve o desvio padrão da carteira de variância mínima condicionada à rentabilidade esperada $\bar{R}$.

Por definição, para qualquer valor de $\bar{R}$,

$$\sigma_\alpha - \sigma\left(\bar{R}\right) \geq 0 \tag{6}$$

Inclinação da fronteira de variância mínima (continuação)

Seja $\sigma(\bar{R})$ a função que descreve o desvio padrão da carteira de variância mínima condicionada à rentabilidade esperada $\bar{R}$.

Por definição, para qualquer valor de $\bar{R}$,

$$\sigma_\alpha - \sigma\left(\bar{R}\right) \geq 0 \tag{6}$$

No caso particular em que $\bar{R} = \bar{R}_m$, $\alpha\left(\bar{R}\right) = 1$ e, portanto, $\sigma_\alpha\left(\bar{R}\right) - \sigma\left(\bar{R}\right) = 0$. Isso significa que a função à esquerda de (6) atinge valor quando $\bar{R}_m$.

Inclinação da fronteira de variância mínima (continuação)

Seja $\sigma(\bar{R})$ a função que descreve o desvio padrão da carteira de variância mínima condicionada à rentabilidade esperada $\bar{R}$.

Por definição, para qualquer valor de $\bar{R}$,

$$\sigma_\alpha - \sigma\left(\bar{R}\right) \geq 0 \tag{6}$$

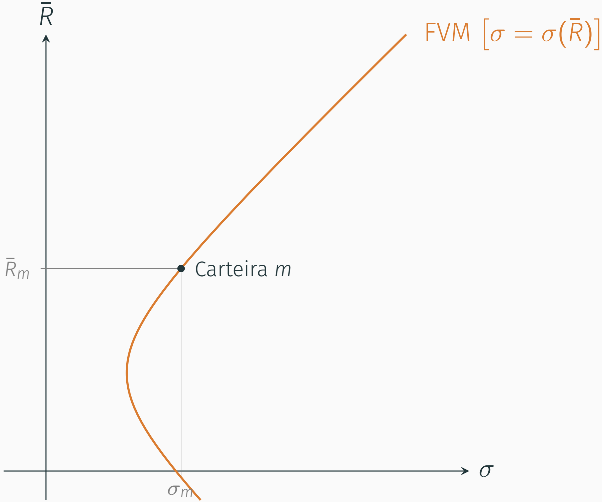
No caso particular em que $\bar{R} = \bar{R}_m$, $\alpha\left(\bar{R}\right) = 1$ e, portanto, $\sigma_\alpha\left(\bar{R}\right) - \sigma\left(\bar{R}\right) = 0$. Isso significa que a função à esquerda de (6) atinge valor quando $\bar{R}_m$. Portanto, nesse ponto, deve ser atendida a condição de primeira ordem

$$\frac{d\sigma\left(\bar{R}_m\right)}{d\bar{R}} = \frac{d\sigma_\alpha}{d\bar{R}} \tag{7}$$

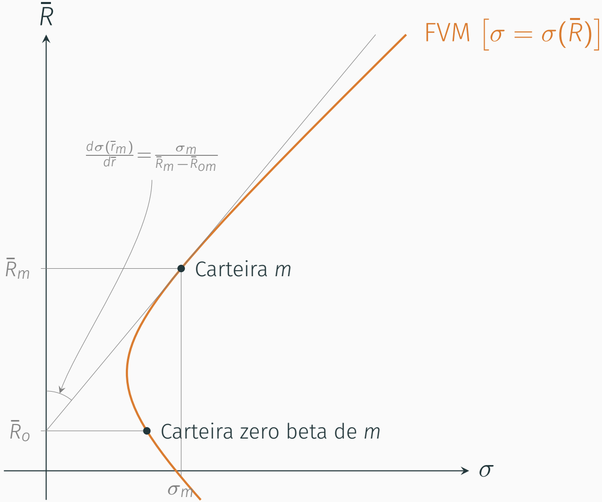
Ou usando (5), se notando que, quando $\bar{R} = \bar{R}_m$, $\alpha = 1$,

$$\frac{d\sigma\left(\bar{R}_m\right)}{d\bar{R}} = \frac{\sigma_m^2 - \sigma_{bm}}{(\bar{R}_m - \bar{R}_b)\sigma_m} = \sigma_m \frac{1 - \frac{\sigma_{bm}}{\sigma_m}}{\bar{R}_m - \bar{R}_b} = \sigma_m \frac{1 - \beta_{bm}}{\bar{R}_m - \bar{R}_b} \tag{8}$$

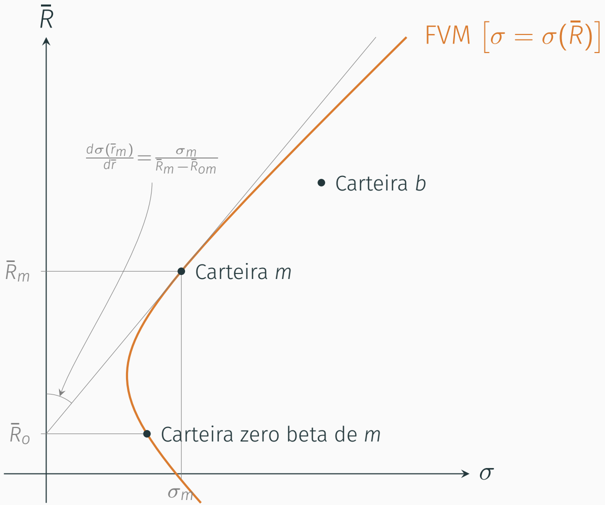
Interpretação gráfica



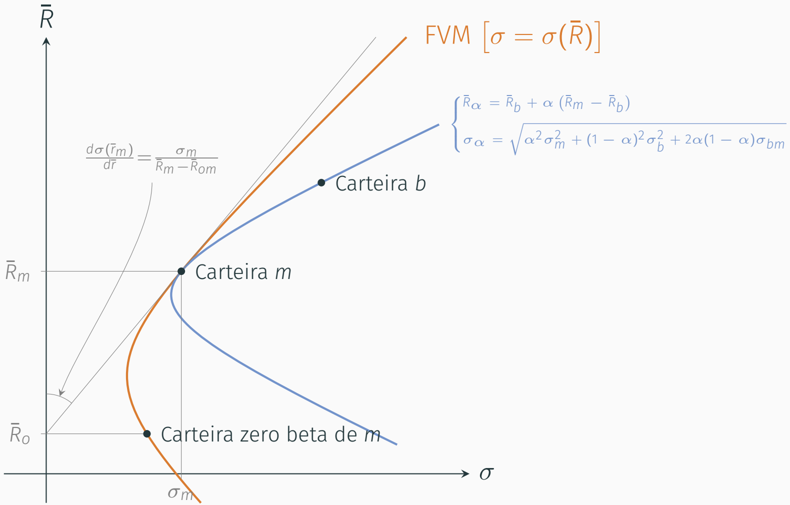
Interpretação gráfica



Interpretação gráfica



Interpretação gráfica



Inclinação da fronteira de variância mínima e a carteira zero-beta

Aplicando a fórmula (8) à carteira zero-beta da carteira m vem

$$\frac{d\sigma_\alpha\left(\bar{R}_m\right)}{d\bar{R}} = \sigma_m \frac{1-\beta_{om}}{\bar{R}_m - \bar{R}_o} = \frac{\sigma_m}{\bar{R}_m - \bar{R}_o} \tag{9}$$

Combinando (8) e (9), chega-se a

$$\sigma_m \frac{1-\beta_{bm}}{\bar{R}_m - \bar{R}_b} = \frac{\sigma_m}{\bar{R}_m - \bar{R}_o}$$

Inclinação da fronteira de variância mínima e a carteira zero-beta

Aplicando a fórmula (8) à carteira zero-beta da carteira *m* vem

$$\frac{d\sigma_{\alpha}\left(\bar{R}_m\right)}{d\bar{R}} = \sigma_m \frac{1-\beta_{om}}{\bar{R}_m - \bar{R}_o} = \frac{\sigma_m}{\bar{R}_m - \bar{R}_o} \tag{9}$$

Combinando (8) e (9), chega-se a

$$\sigma_m \frac{1-\beta_{bm}}{\bar{R}_m - \bar{R}_b} = \frac{\sigma_m}{\bar{R}_m - \bar{R}_o}$$

Resolvendo para $\bar{R}_b$, obtém-se

$$\bar{R}_b = \bar{R}_o + \beta_{bm}\left(\bar{R}_m - \bar{R}_{om}\right) \tag{10}$$

O modelo CAPM zero-beta, ou modelo CAPM de Fischer Black

Notação

n ativos, L investidores.

$\mathbf{q}_\ell = (q_{\ell,1}, q_{\ell,2}, \dots, q_{\ell,n})$.

A quantidade total de ativos no mercado é notada por $\mathbf{q}_m = (q_{m,1}, q_{m,2}, \dots, q_{m,n})$.

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ é o vetor de preços dos ativos.

$Y_\ell = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{\ell,i}$

$Y_m = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{m,i}$

$w_{\ell,i} = \frac{p_i q_{\ell,i}}{Y_\ell}$, $\mathbf{w}_\ell = (w_{\ell,1}, w_{\ell,2}, \dots, w_{\ell,n})$

$w_{m,i} = \frac{p_i q_{m,i}}{Y_m}$, $\mathbf{w}_m = (w_{m,1}, w_{m,2}, \dots, w_{m,n})$.

Condição de equilíbrio

O mercado estará em equilíbrio caso, para todo bem i

$$q_{1,i} + q_{2,i} + \cdots + q_{m,i} = q_{m,i}$$

Multiplicando dos dois lados por p_i,

$$p_i q_{1,i} + p_i q_{2,i} + \cdots + p_i q_{L,i} = p_i q_{m,i} \tag{11}$$

Somando para todos os ativos,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_{1,i} + \sum_{i=1}^{n} p_i q_{2,i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} p_i q_{L,i} = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{m,i}$$

$$Y_1 + Y_2 + \cdots Y_L = Y_m$$

Condição de equilíbrio

Dividimos os dois lados de (11) por Y_m e multiplicamos e dividimos cada termo i do lado esquerdo por Y_i para obter

$$\frac{Y_1}{Y_m}\frac{p_i q_{1,i}}{Y_1} + \frac{Y_2}{Y_m}\frac{p_i q_{2,i}}{Y_2} + \cdots + \frac{Y_L}{Y_m}\frac{p_i q_{m,i}}{Y_L} = \frac{p_i q_{m,i}}{Y_m}$$

Ou, chamando $s_\ell = Y_\ell / Y_m$ e lembrando que $w_{\ell,i} = p_i q_{\ell,i} / Y_\ell$,

$$s_1 w_{1,i} + s_2 w_{2,i} + \cdots + s_L w_{L,i} = w_{m,i}$$

Como, em equilíbrio, a equação acima é válida para todo ativo i,

$$s_1 \mathbf{w}_1 + s_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + s_L \mathbf{w}_L = \mathbf{w}_m$$

Note que, como em equilíbrio $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_L = Y_m$, $s_1 + s_2 + \cdots + s_L = 1$. Portanto, em equilíbrio, a carteira de mercado é uma combinação convexa das carteiras demandadas pelos investidores.

Hipóteses

- Modelo de um único período.
- Todos investidores estimam as mesmas rentabilidades esperadas e a mesma matriz de covariância para os ativos existentes;
- Todos investidores são capazes de vender a descoberto em quantidades ilimitadas e sem custo qualquer ativo da economia;
- Todos investidores demandam carteiras de investimento sobre a fronteira eficiente;
- O mercado encontra-se em equilíbrio.

CAPM zero-beta: conclusões

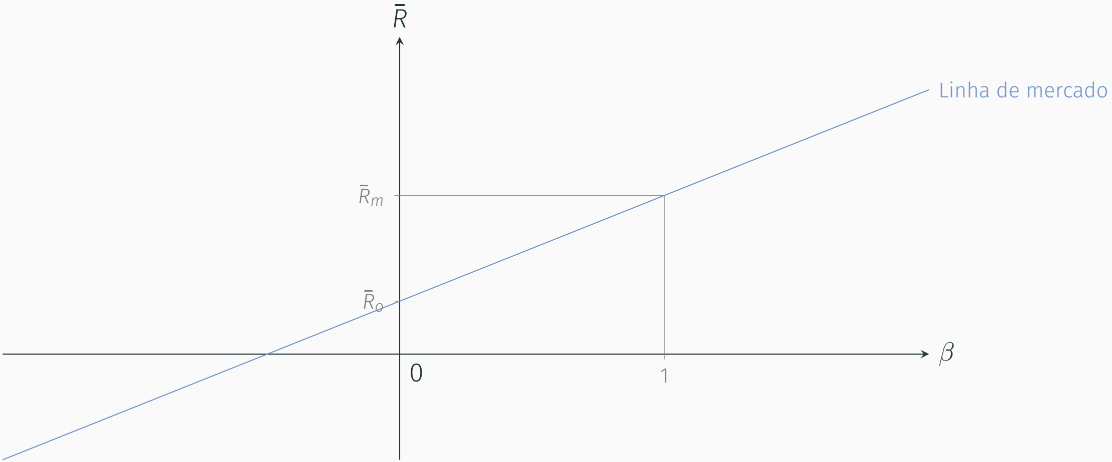
Pela condição de equilíbrio, a carteira de mercado é uma combinação convexa das carteiras individuais.

Pela hipótese de que os investidores demanda carteiras sobre a fronteira eficiente, a carteira de mercado também deve encontrar-se sobre a fronteira eficiente.

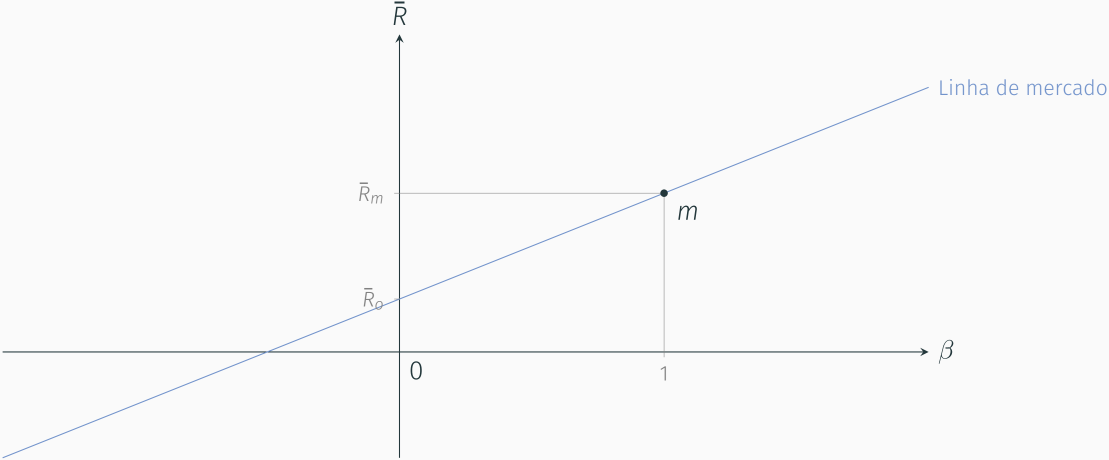
Portanto, podemos aplicar a condição (10) para descrever a relação entre a rentabilidade esperada de qualquer ativo e a carteira de mercado. Mais especificamente, se $\bar{R}_o$ é a rentabilidade esperada de uma carteira zero-beta da carteira de mercado e β_i é o beta de um ativo ou carteira i qualquer em relação à carteira de mercado. A rentabilidade desse ativo será dada por

$$\bar{r}_i = \bar{R}_o + \beta_i \left(\bar{R}_m - \bar{R}_o \right).$$

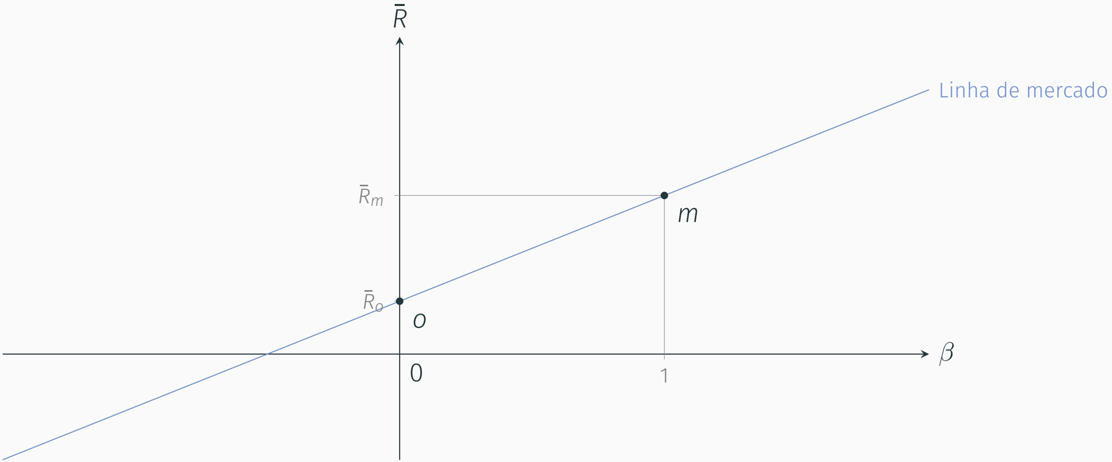
Linha de mercado



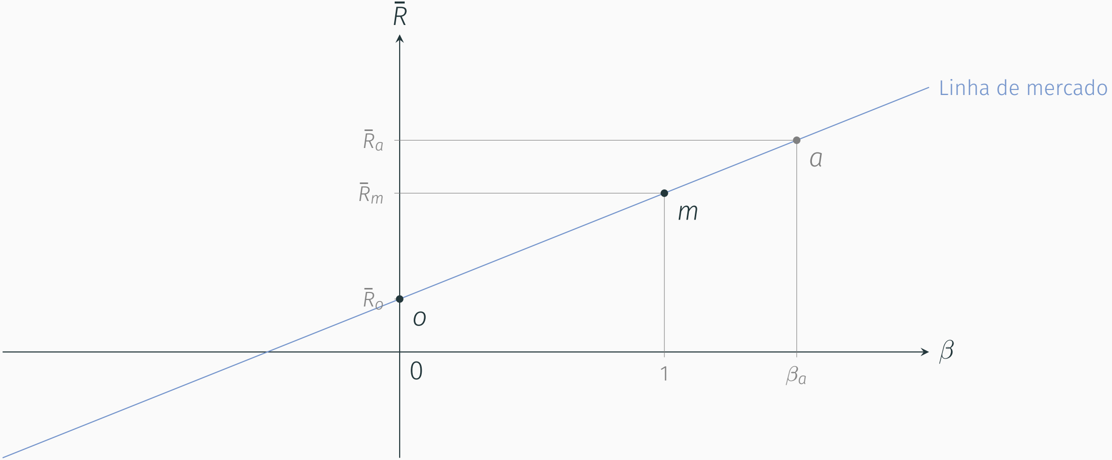
Linha de mercado



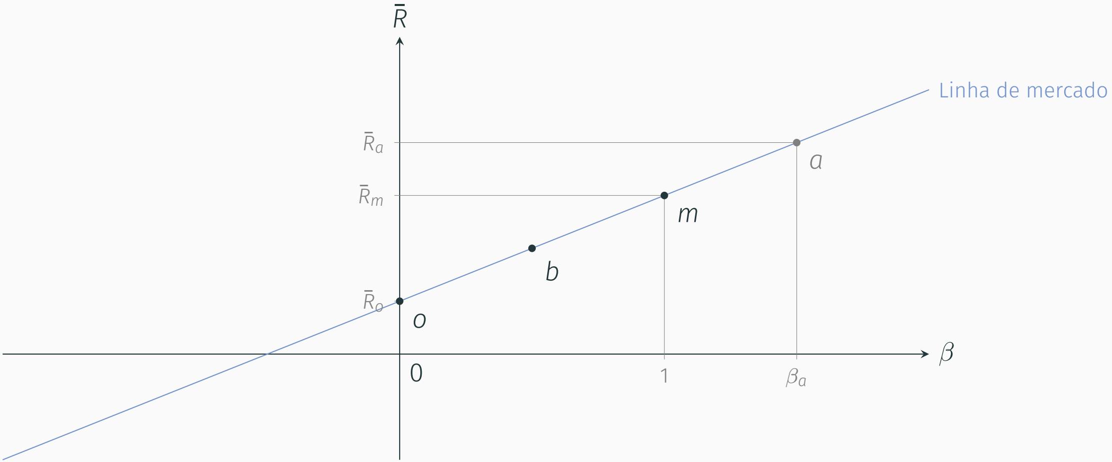
Linha de mercado



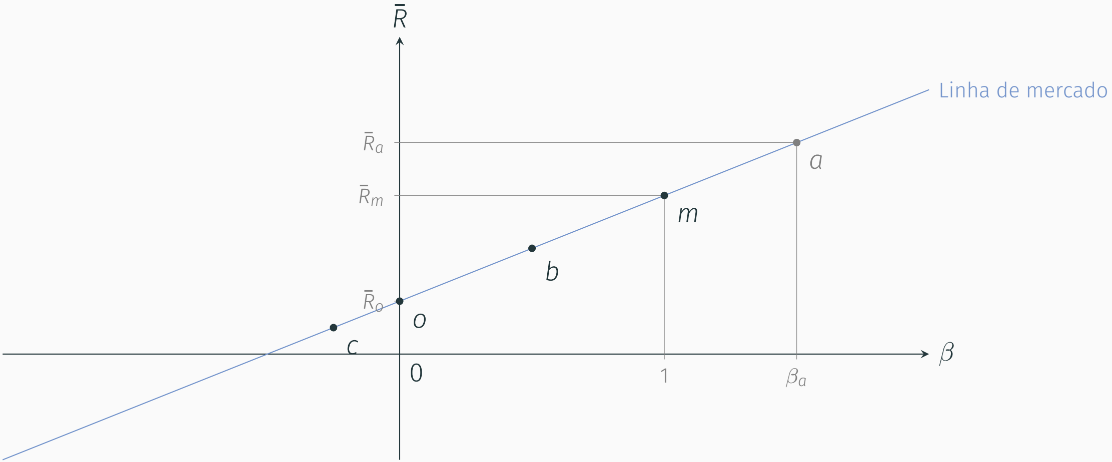
Linha de mercado



Linha de mercado



Linha de mercado



O modelo CAPM de Sharpe e Lintner

Hipóteses

- Modelo de um único período.
- Todos investidores estimam as mesmas rentabilidades esperadas e a mesma matriz de covariância para os ativos existentes;
- Todos investidores são capazes de tomar emprestado e emprestar usando um ativo livre de risco;
- Todos investidores demandam carteiras de investimento sobre a fronteira eficiente;
- O mercado encontra-se em equilíbrio.

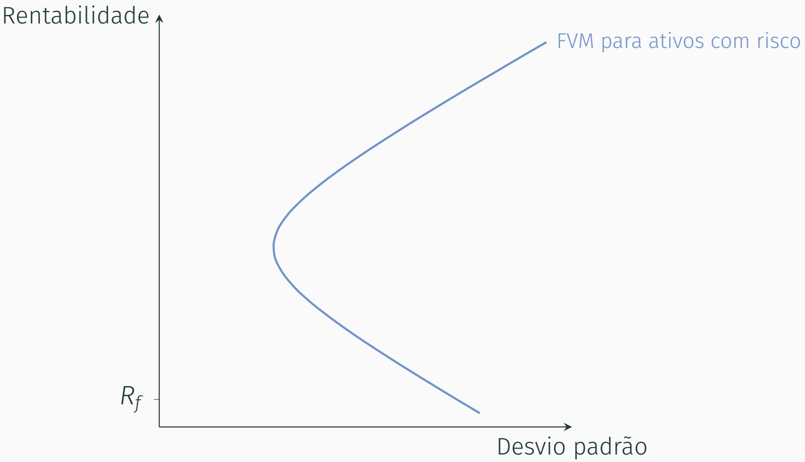
A lógica do modelo

Vamos dividir a escolha do investidor em duas etapas:

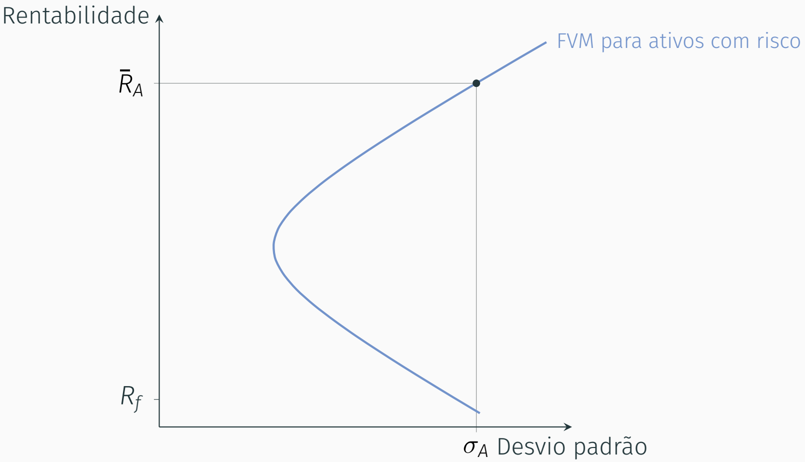
Na primeira, ele escolhe em que proporções quer investir nos ativos com risco. Em outras palavras, ele compõe uma carteira de ativos composta apenas de ativos com risco.

Na segundo etapa, ele monta uma carteira de investimento combinando a carteira de ativos com risco com o ativo livre de risco.

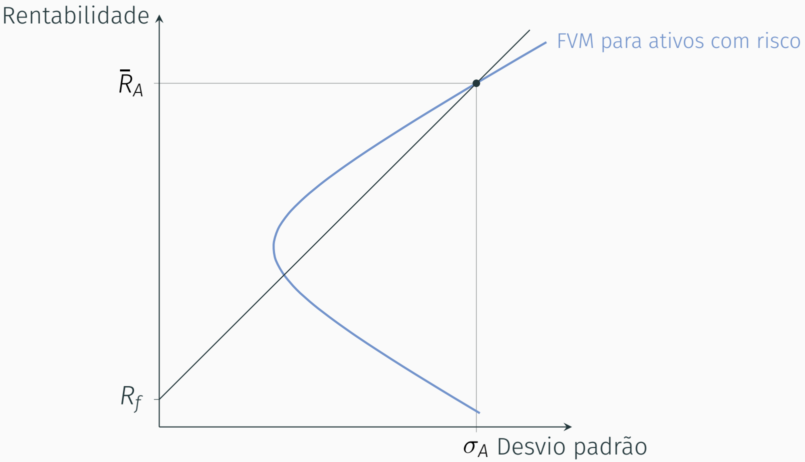
Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



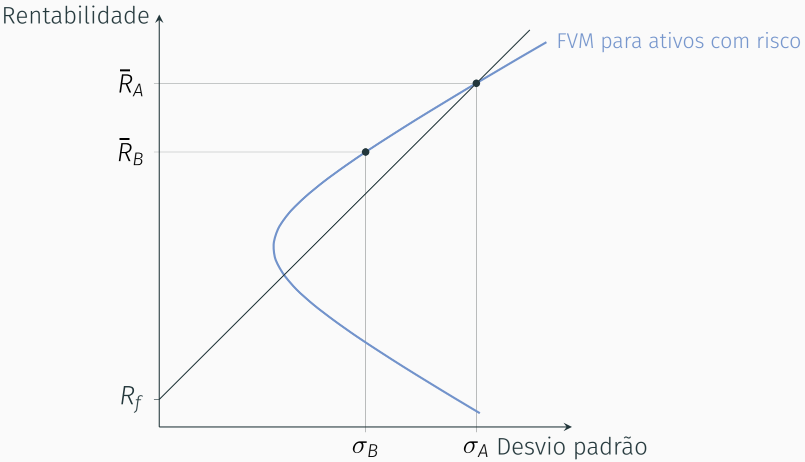
Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



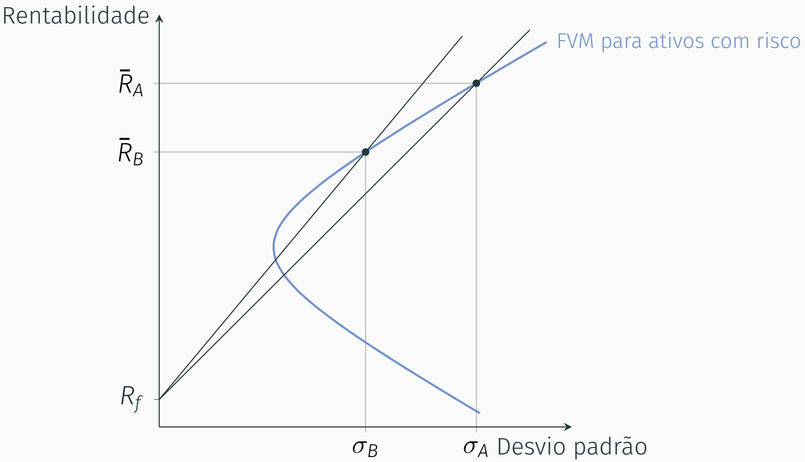
Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



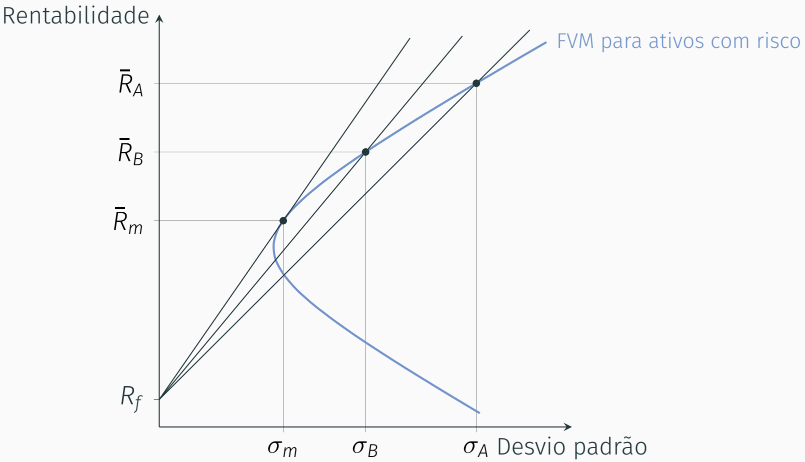
Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



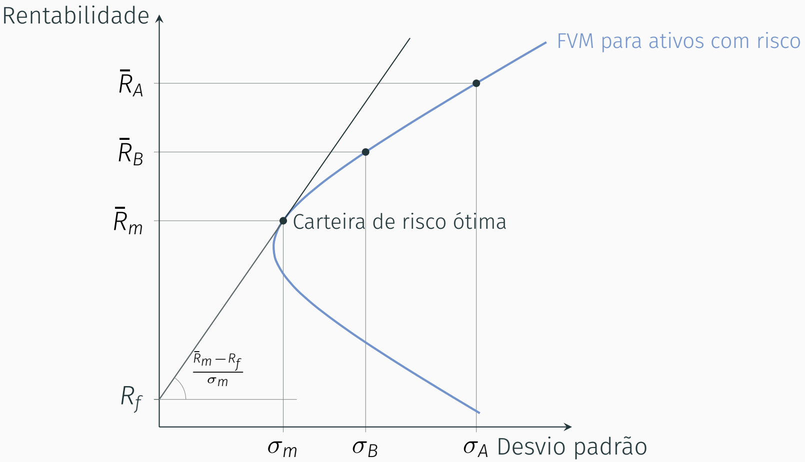
Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



Encontrando a carteira de risco ótima

Objetivo

Maximizar

$$\frac{\bar{R}(\mathbf{w}) - R_f}{\sigma(\mathbf{w})}$$

Encontrando a carteira de risco ótima

Objetivo

Maximizar

$$\frac{\bar{R}(\mathbf{w}) - R_f}{\sigma(\mathbf{w})}$$

atendendo à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Objetivo

Maximizar

$$\frac{\bar{R}(\mathbf{w}) - R_f}{\sigma(\mathbf{w})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}}$$

atendendo à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Encontrando a carteira de risco ótima

Objetivo

Maximizar

$$\frac{\bar{R}(\mathbf{w}) - R_f}{\sigma(\mathbf{w})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}}$$

atendendo à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right)$$

Encontrando a carteira de risco ótima

Condições de primeira ordem

$$\frac{\bar{r}_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i\,j}}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f\right)\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_{i\,k}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} w_i w_i \sigma_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}} + \lambda = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Encontrando a carteira de risco ótima

Condições de primeira ordem em notação matricial

$$\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w})^{-\frac{1}{2}} - (\mathbf{w}'\bar{\mathbf{r}} - R_f)(\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w})^{-\frac{3}{2}}\Omega\mathbf{w} + \lambda\mathbf{1} = 0$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} - 1 = 0$$

Em que

- $\bar{\mathbf{r}}$ é o vetor das rentabilidades esperadas dos ativos;
- $\mathbf{w}$ é o vetor de pesos dos ativos;
- Ω é a matriz de covariância dessas rentabilidades;
- $\mathbf{1}$ é um vetor com todos os n elementos iguais a 1.

Encontrando a carteira de risco ótima

Solução

$$\mathbf{w} = \frac{\Omega^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - R_f \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - R_f \cdot \mathbf{1})}$$

Encontrando a carteira de risco ótima

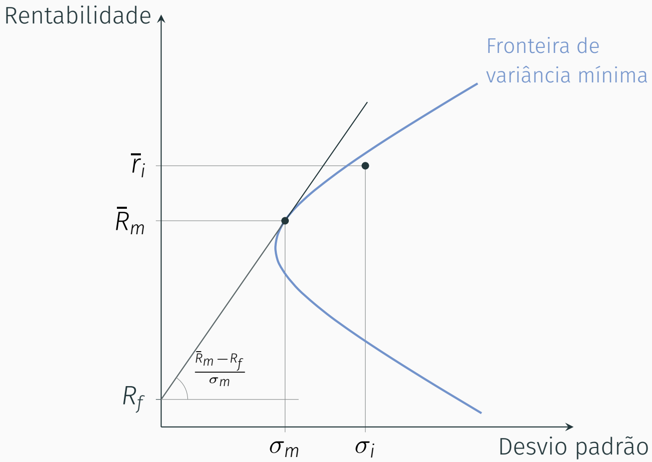
Solução

$$\mathbf{w} = \frac{\Omega^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - R_f \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Omega^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - R_f \cdot \mathbf{1})}$$

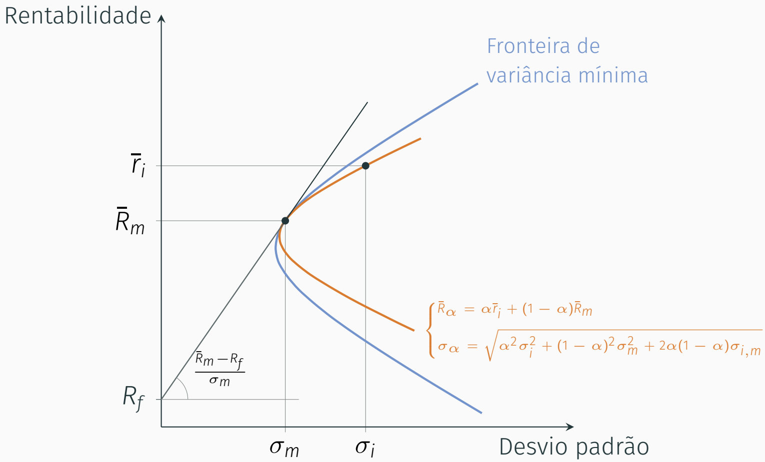
Ou, em outra notação,

$$w_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Omega_{kj}^{-1}(\bar{r}_j - R_f)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Omega_{ij}^{-1}(\bar{r}_j - R_f)}.$$

Condição de tangência



Condição de tangência



Condição de tangência

A inclinação da curva azul é

$$\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_f}{\sigma m}$$

Condição de tangência

A inclinação da curva azul é

$$\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_f}{\sigma m}$$

A inclinação da curva laranja é

$$\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_i}{\sigma_m 1 - \beta_i}$$

Condição de tangência

A inclinação da curva azul é

$$\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_f}{\sigma m}$$

A inclinação da curva laranja é

$$\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_i}{\sigma_m 1 - \beta_i}$$

Como as duas inclinações são iguais,

$$\frac{\bar{R}_m - R_f}{\sigma_m} = \frac{\bar{R}_m - \bar{r}_i}{1 - \beta_i}.$$

Ou, resolvendo para r_i,

$$\bar{r}_i = R_f + \beta_i(\bar{R}_m - R_f)$$

O modelo CAPM — Equilíbrio

Todos investidores visualizam a mesma fronteira eficiente para os ativos com risco.

O modelo CAPM — Equilíbrio

Todos investidores visualizam a mesma fronteira eficiente para os ativos com risco.

Todos investidores demandam a mesma carteira de ativos com risco, embora possam combinar essa carteira com o ativo livre de risco em proporções diferentes — todos investidores estimam a mesma fronteira eficiente conhecida como linha de mercado de capitais;

O modelo CAPM — Equilíbrio

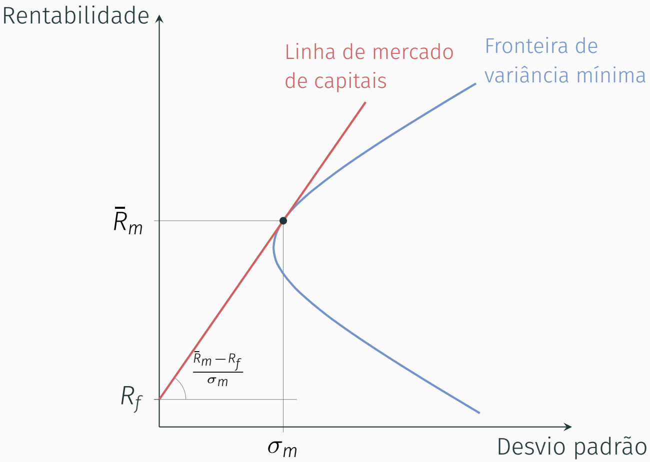
Todos investidores visualizam a mesma fronteira eficiente para os ativos com risco.

Todos investidores demandam a mesma carteira de ativos com risco, embora possam combinar essa carteira com o ativo livre de risco em proporções diferentes — todos investidores estimam a mesma fronteira eficiente conhecida como linha de mercado de capitais;

No equilíbrio, a carteira de risco demandada pelos investidores é a carteira de mercado, isto é, se q_i e p_i são respectivamente a quantidade existente no mercado e o preço do ativo i, o peso desse ativo na carteira de equilíbrio será

$$w_i = \frac{p_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}.$$

Linha de mercado de capitais



Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo i com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo i e $1-\alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo i sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo *i* com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo *i* e $1-\alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo *i* sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left[2\alpha\sigma_i^2 - 2(1-\alpha)\sigma_m^2 + (2-4\alpha)\sigma_{i,m}\right]_{\alpha=0}$$

Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo i com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo i e $1 - \alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo i sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left[2\alpha\sigma_i^2 - 2(1 - \alpha)\sigma_m^2 + (2 - 4\alpha)\sigma_{i,m}\right]_{\alpha=0} = 2(\sigma_{i,m} - \sigma_m^2)$$

Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo i com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo i e $1 - \alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo i sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left[2\alpha\sigma_i^2 - 2(1-\alpha)\sigma_m^2 + (2-4\alpha)\sigma_{i,m}\right]_{\alpha=0} = 2(\sigma_{i,m} - \sigma_m^2)$$

$$= 2\sigma_m^2 \left(\frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} - 1\right)$$

Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo *i* com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo *i* e $1 - \alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo *i* sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left[2\alpha\sigma_i^2 - 2(1-\alpha)\sigma_m^2 + (2-4\alpha)\sigma_{i,m}\right]_{\alpha=0} &= 2(\sigma_{i,m} - \sigma_m^2) \\ &= 2\sigma_m^2\left(\frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} - 1\right) = 2(\beta_i - 1) \end{aligned}$$

Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo *i* com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo *i* e $1-\alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo *i* sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left[2\alpha\sigma_i^2 - 2(1-\alpha)\sigma_m^2 + (2-4\alpha)\sigma_{i,m}\right]_{\alpha=0} &= 2(\sigma_{i,m} - \sigma_m^2) \\ &= 2\sigma_m^2\left(\frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} - 1\right) = 2(\beta_i - 1) \end{aligned}$$

Portanto, na margem, o ativo *i* aumenta, diminui ou não afeta o risco de mercado caso, respectivamente $\beta_i > 1$, $\beta_i < 1$ ou $\beta_i = 1$.

Significado do β

Se $\beta_i > 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma redução da participação do ativo i. Para que essa redução não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser maior que a rentabilidade esperada da carteira de mercado.

Significado do β

Se $\beta_i > 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma redução da participação do ativo i. Para que essa redução não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser maior que a rentatibilidade esperada da carteira de mercado.

Se $\beta_i < 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma maior participação do ativo i. Para que esse aumento de participação não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser menor que a rendatibilidade esperada da carteira de mercado.

Significado do β

Se $\beta_i > 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma redução da participação do ativo i. Para que essa redução não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser maior que a rentatibilidade esperada da carteira de mercado.

Se $\beta_i < 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma maior participação do ativo i. Para que esse aumento de participação não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser menor que a rendatibilidade esperada da carteira de mercado.

Se $\beta_i = 1$, a carteira de mercado tem seu risco inalterado com variações marginais da participação do ativo i. Para que a demanda desse ativo são seja superior à sua oferta, é necessário que sua rentabilidade esperada seja igula à rentabilidade esperada da carteira de mercado.

A linha de mercado (de títulos)