Utilidade média variância, carteira ótima e o modelo CAPM

Roberto Guena de Oliveira

June 16, 2023

Sumário

Utilidade média variância

Utilidade média variância

Diversos modelos financeiros assumem que os investidores tem preferências representáveis por uma função de utilidade $u(\mu, \sigma)$ na qual μ é a esperança matemática da taxa de retorno sobre a riqueza e σ é o desvio padrão dessa taxa de retorno. Duas hipóteses poderiam alternativamente justificar essa função de utilidade:

1. A função de utilidade de Bernouille tem a forma $u(Y) = Y - bY^2, b > 0$ (implica não monotonicidade e coeficiente de aversão absoluta ao risco crescente); ou
2. Os rendimentos dos ativos que compõem a carteira de investimentos têm distribuição conjunta normal.

Função de utilidade quadrática e utilidade média variânica

$$u(Y) = Y - bY^2$$

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y} - b\tilde{Y}^2\right) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}\tilde{Y}^2 \tag{1}$$

$$\operatorname{Var}\tilde{Y} = \mathbb{E}\left[\tilde{Y} - E(\tilde{Y})\right]^2 = \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}\mathbb{E}(\tilde{Y}) + \mathbb{E}^2(\tilde{Y})\right] = \mathbb{E}\tilde{Y}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{Y}$$

$$\mathbb{E}\tilde{Y}^2 = \operatorname{Var}\tilde{Y} + \mathbb{E}^2\tilde{Y} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), chegamos a

$$\mathbb{E}u(\tilde{Y}) = \mathbb{E}\tilde{Y} - b\mathbb{E}^2\tilde{Y} - b\operatorname{Var}\tilde{Y} = u(\mathbb{E}\tilde{Y}) - b\operatorname{Var}\tilde{Y}.$$

Ou seja, a utilidade esperada — $\mathbb{E}u(\tilde{Y})$ — é inteiramente definida pela riqueza esperada — $\mathbb{E}\tilde{Y}$ — e sua variância — $\operatorname{Var}\tilde{Y}$.

Utilidade média variância como aproximação

Sejam Y_0 a riqueza investida, $\tilde{r}$ a rentabilidade da carteira de investimentos, $\tilde{Y} = (1+\tilde{r})Y_0$, $\bar{r} = \mathbb{E}\tilde{r}$, $\overline{Y} = \mathbb{E}\tilde{Y} = (1+\bar{r})Y_0$ e $u(Y)$ a função de utilidade da investidora. Então, usando uma série de Taylor de primeira ordem,

$$u(\tilde{Y}) \approx u(\overline{Y}) + (\tilde{Y} - \overline{Y})u'(\overline{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \overline{Y})^2}{2}u''(\overline{Y})$$

Assim, a utilidade esperada é

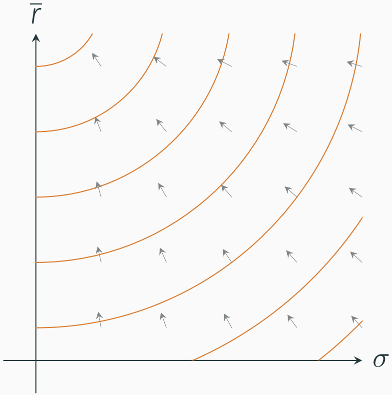
$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &\approx \mathbb{E}\left[u(\overline{Y}) + (\tilde{Y} - \overline{Y})u'(\overline{Y}) + \frac{(\tilde{Y} - \overline{Y})^2}{2}u''(\overline{Y})\right] \\ &= u(\overline{Y}) + u'(\overline{Y})\mathbb{E}(\tilde{Y} - \overline{Y}) + \frac{u''(\overline{Y})}{2}\mathbb{E}(\tilde{Y} - \overline{Y})^2 \\ &= u(\overline{Y}) + \frac{u''(\overline{Y})}{2}\,\mathrm{Var}\,\tilde{Y}.\end{aligned}$$

Utilidade média variância como aproximação

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(\tilde{Y}) &\approx u(\overline{Y}) + \frac{u''(\overline{Y})}{2}\operatorname{Var}\tilde{Y} \\ &= u[Y_0(1+\overline{r})] + \frac{u''[Y_0(1+\overline{r})]}{2}\operatorname{Var}Y_0(1+\tilde{r}) \\ &= u[Y_0(1+\overline{r})] + \frac{Y_0^2}{2}u''[Y_0(1+\overline{r})]\operatorname{Var}\tilde{r} = \upsilon(\mu,\sigma).\end{aligned}$$

Em que $\mu = \overline{r}$ e $\sigma = \sqrt{\operatorname{Var}\tilde{r}}$.

Curvas de indiferença para utilidade média variância



Rentabilidade e desvio padrão de uma carteira com dois ativos

Carteira com dois ativos: notação

$\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$ são os retornos dos ativos 1 e 2 respectivamente;

$\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ são as esperanças desses retornos;

σ_1 e σ_2 são os desvios padrões desses retornos;

$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$ é a covariância entre esses dois retornos;

Y_0 É o valor total do investimento;

w É a fração do valor investido que foi usado na aquisição do ativo 1, de tal sorte que o valor investido no ativo 1 é wY_0 e o valor investido no ativo 2 é $(1 - w)Y_0$.

Carteira de dois ativos: retorno esperado

O valor obtido com a carteira de ativos ao final do período de investimento será

$\tilde{F} = (1+\tilde{r}_1) \times wY_0 + (1+\tilde{r}_2) \times (1-w)Y_0 = Y_0[1+\tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)].$

O valor esperado é

$$\overline{F} = Y_0[1+\overline{r}_2 + w(\overline{r}_1 - \overline{r}_2)].$$

O retorno é

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{F}}{Y_0} - 1 = \tilde{r}_2 + w(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2).$$

O retorno esperado é

$$\overline{R} = \overline{r}_2 + w(\overline{r}_1 - \overline{r}_2).$$

A variância do retorno é

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

Carteira com dois ativos: variância mínima

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_R^2}{dw} &= 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-2w)\sigma_{1,2} \\ &= 2[w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) - \sigma_2^2 + \sigma_{1,2}]\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\sigma_R^2}{dw^2} = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) = 2\,\mathrm{Var}(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \geq 0.$$

Portanto, para minimizar a variância, basta fazer

$$w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}) - \sigma_1^2 + \sigma_{1,2} = 0 \Rightarrow w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}.$$

Carteira com dois ativos: variância e rentabiliade esperada

$$\overline{R} = \bar{r}_2 + w(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\sigma_R^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

Assumindo $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$, resolvendo a 1ª equação para w e substituindo o resultado na segunda equação obtemos

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\overline{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\overline{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}$$

Carteira com dois ativos: variância e rentabilidade esperada

A última expressão do slide anterior pode ser transformada em

$$\frac{\sigma_R^2}{\gamma(\beta-\alpha^2)}-\frac{(\overline{R}-\alpha)^2}{\beta-\alpha^2}=1$$

onde

$$\alpha=\frac{\bar{r}_2\sigma_1^2+\bar{r}_1\sigma_2^2-\sigma_{12}(\bar{r}_1+\bar{r}_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}$$

$$\beta=\frac{\bar{r}_2^2\sigma_1^2+\bar{r}_1^2\sigma_2^2-2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}$$

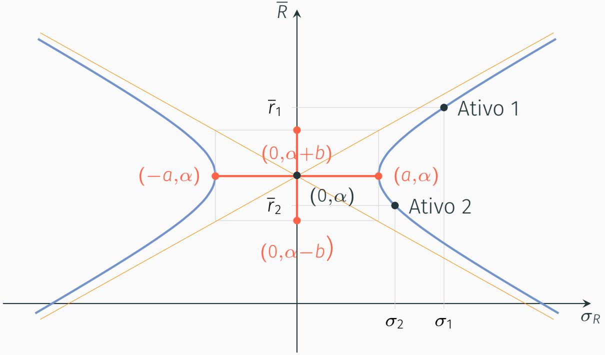
e

$$\gamma=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1-\bar{r}_2)^2}$$

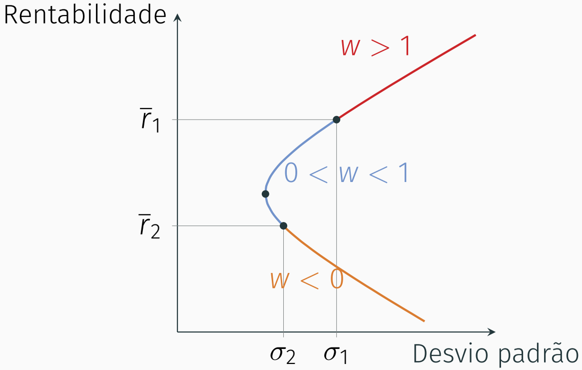
Os possíveis pares $(\sigma_R,\overline{R})$ descrevem uma hipérbole com centro no ponto $(0,\alpha)$, eixo transversal paralelo ao eixo de σ_R, e vértices nos pontos $(\sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)},\alpha)$ e $(-\sqrt{\gamma(\beta-\alpha^2)},\alpha)$.

Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada

$$\frac{\sigma_R^2}{a^2} - \frac{(\overline{R} - \alpha)^2}{b^2} = 1; \quad a = \sqrt{\gamma(\beta - \alpha^2)};\ b = \sqrt{\beta - \alpha^2}$$



Dois ativos: desvio padrão e rentabilidade esperada



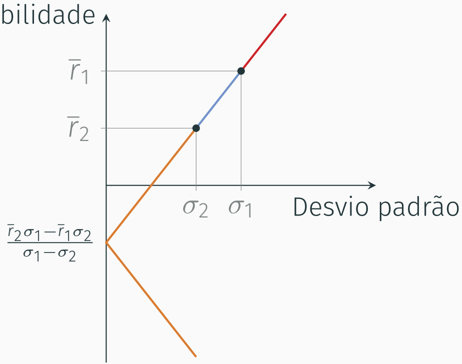
Correlação linear positiva perfeita

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\bar{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\bar{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}$$

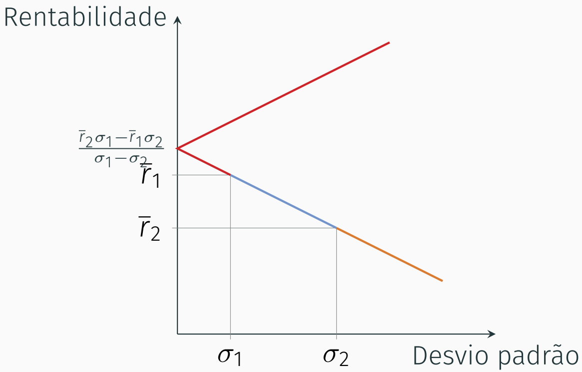
Havendo correlação linear positiva perfeita, $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$. Substituindo acima e simplificando vem

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_R$$

Correlação linear perfeita positiva com $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ e $\sigma_1 > \sigma_2$



Correlação linear perfeita positiva com $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$



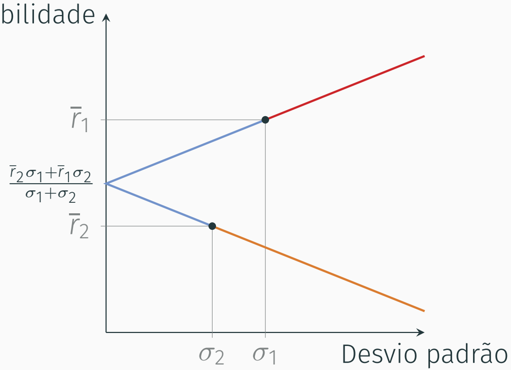
Correlação linear negativa perfeita

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\overline{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}\overline{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}$$

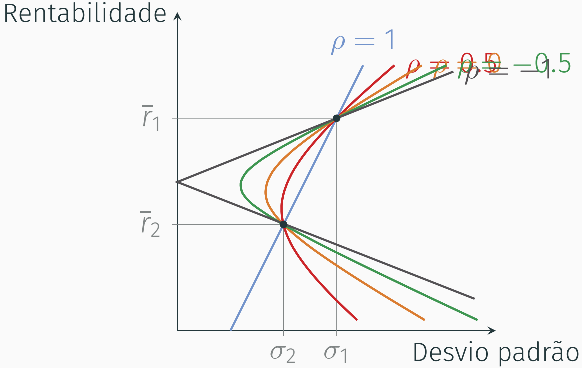
Havendo correlação linear negativa perfeita, $\sigma_{12} = -\sigma_1\sigma_2$. Substituindo acima e simplificando vem

$$\overline{R} = \frac{\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_R.$$

Correlação linear perfeita negativa



Desvio padrão, rentabilidade esperada e coeficiente de correlação linear



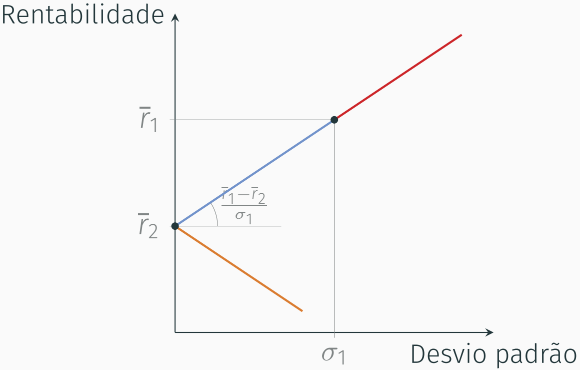
Um ativo livre de risco e um ativo com risco

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\overline{R}^2 - 2\frac{\bar{r}_2\sigma_{11} + \bar{r}_1\sigma_{22} - \sigma_{12}\left(\bar{r}_1 + \bar{r}_2\right)}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}\overline{R} + \frac{\bar{r}_2^2\sigma_{11} + \bar{r}_1^2\sigma_{22} - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\sigma_{12}}{\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)^2}$$

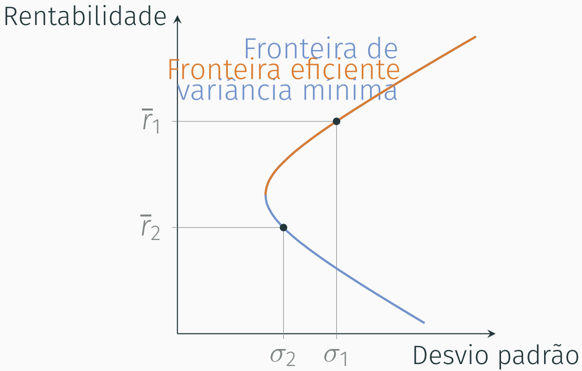
Se o ativo 2 é livre de risco, $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$. Substituindo acima e simplificando vem

$$\overline{R} = \bar{r}_2 \pm \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1}\sigma_R.$$

Um ativo livre de risco e um ativo com risco



O conjunto eficiente ou a fronteira eficiente



Rentabilidade e desvio padrão de uma carteira com diversos ativos

Carteira com diversos ativos: notação

$\tilde{r}_i$ rentabilidade do ativo i, $i = 1{,}2, \ldots, n$;

$\bar{r}_i$ rentabilidade esperada do ativo;

σ_i desvio padrão da rentabilidade do ativo i;

σ_{ij} covariância entre as rentabilidades dos ativos i e j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

w_i participação (em valor) do ativo i na carteira de investimentos;

$\tilde{R}$ rentabilidade da carteira de ativos;

$\overline{R}$ restabilidade esperada dessa carteira;

σ_R desvio padrão dessa rentabilidade.

Carteira com diversos ativos: indicadores de rentabiliade e risco

Rentabilidade esperada

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$$

Variância

$$\sigma_R^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1\,1} & \sigma_{1\,2} & \dots & \sigma_{1\,n} \\ \sigma_{2\,1} & \sigma_{2\,2} & \dots & \sigma_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n\,1} & \sigma_{n\,2} & \dots & \sigma_{n\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i\,j}$$

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\sigma_{RR} = & w_1^2\sigma_{1\,1} & + w_1w_2\sigma_{1\,2} & + \ldots + & w_1w_i\sigma_{1\,i} & + \ldots + & w_1w_n\sigma_{1\,n} \\
+ & w_2w_1\sigma_{2\,1} + & w_2^2\sigma_{2\,2} & + \ldots + & w_2w_i\sigma_{2\,i} & + \ldots + & w_2w_n\sigma_{2\,n} \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
+ & w_iw_1\sigma_{i\,1} & + w_iw_2\sigma_{i\,2} & + \vdots + & w_i^2\sigma_{i\,i} & + \vdots + & w_iw_n\sigma_{2\,n} \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
+ & w_nw_1\sigma_{n\,1} + & w_nw_2\sigma_{n\,2} & + \ldots + & w_nw_i\sigma_{n\,i} & + \ldots + & w_n^2\sigma_{n\,n}
\end{array}
$$

$$\frac{\partial\sigma_{RR}}{\partial w_i} = 2w_1\sigma_{1i} + 2w_2\sigma_{2i} \ldots + 2w_i\sigma_{ii} + \ldots + 2w_n\sigma_{ni} = 2\sum_{j=1}^{n} w_j\sigma_{ji}$$

A baixa informatividade da variância de um ativo

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial w_i} = 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} = 2\left(w_i \sigma_{ii} + \sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}\right)$$

Em uma carteira bem diversificada, w_i é pequeno e, portanto, a variância do ativo i explica muito pouco do impacto desse ativo sobre a variância da carteira de investimentos. Já o termo $\sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}$ tem impacto mais significativo, pois, apesar de os w_j's também serem pequenos, eles aparecem $n-1$ vezes.

Isso indica que o impacto de um ativo sobre o risco de uma carteira bem diversificada depende fundamentalmente de como esse ativo covaria com os outros e muito pouco da variância desse ativo.

O problema
Minimizar

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sujeito à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)$$

Carteira de variância mínima

Condições de 1ª ordem

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_i} = 0 \Rightarrow 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Carteira de variância mínima

Condições de 1ª ordem em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{1\,1} & 2\sigma_{1\,2} & \dots & 2\sigma_{1\,n} & 1 \\ 2\sigma_{2\,1} & 2\sigma_{2\,2} & \dots & 2\sigma_{2\,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n\,1} & 2\sigma_{n\,2} & \dots & 2\sigma_{n\,n} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathsf{z}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{b}_m}$$

Solução

$$\mathsf{z}_m = \mathsf{A}_m^{-1}\mathsf{b}_m$$

O problema

Minimizar

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{R}$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{R}\right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)$$

Condições de 1ª ordem

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_i} = 0 \Rightarrow 2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \overline{R} + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i - \overline{R} = 0 \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Condições de 1ª ordem em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & \bar{r}_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & \bar{r}_n & 1 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{R} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{b}}$$

Solução

$$\mathsf{z} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{b}.$$

Propriedades da fronteira de variância mínima

Se o vetor de pesos $\mathbf{w}^*$ resolve o problema de minimizar a variância da carteira de ativos com rentabilidade esperada $\overline{R}^*$ e $\mathbf{w}^{**}$ resolve o problema de minimizar a variância da carteira de ativos com rentabilidade esperada $\overline{R}^{**}$, então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $a\mathbf{w}^* + (1 - a)\mathbf{w}^{**}$ resolve o problema de minimizar a variância da carteira de ativos com rentabilidade esperada $a\overline{R}^* + (1 - a)\overline{R}^{**}$.

No plano $\sigma \times \overline{R}$, o gráfico da fronteira de variância mínima corresponde ao lado direito de uma hiperbole com eixo principal horizontal e centro no eixo $\sigma = 0$.

Carteira ótima

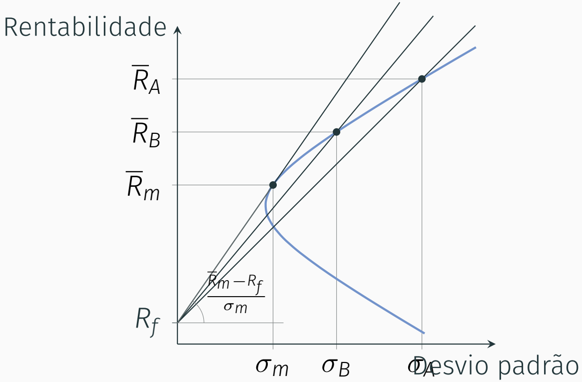
Um ativo livre de risco e vários ativos com risco

Vamos dividir a escolha do investidor em duas etapas:

Na primeira, ele escolhe em que proporções quer investir nos ativos com risco. Em outras palavras, ele compõe uma carteira de ativos composta apenas de ativos com risco.

Na segundo etapa, ele monta uma carteira de investimento combinando a carteira de ativos com risco com o ativo livre de risco.

Um ativo livre de risco e vários ativos com risco



Encontrando a carteira de risco ótima

Objetivo

Maximizar

$$\frac{\overline{R}(\mathrm{w}) - R_f}{\sigma(\mathrm{w})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}}$$

atendendo à restrição

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Lagrangeano

$$\mathscr{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right)$$

Encontrando a carteira de risco ótima

Condições de primeira ordem

$$\frac{\bar{r}_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i\,j}}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - R_f\right)\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_{i\,k}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} w_i w_i \sigma_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}} + \lambda = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Condições de primeira ordem em notação matricial

$$\bar{\mathrm{r}}(\mathrm{w}'\Upsilon\mathrm{w})^{-\frac{1}{2}} - (\mathrm{w}'\bar{\mathrm{r}} - R_f)(\mathrm{w}'\Upsilon\mathrm{w})^{-\frac{3}{2}}\Upsilon\mathrm{w} + \lambda\mathbf{1} = 0$$

$$\mathrm{w}'\mathbf{1} - 1 = 0$$

Em que

- $\bar{\mathrm{r}}$ é o vetor das rentabilidades esperadas dos ativos;
- w é o vetor de pesos dos ativos;
- Υ é a matriz de covariância dessas rentabilidades;
- $\mathbf{1}$ é um vetor com todos os n elementos iguais a 1.

Encontrando a carteira de risco ótima

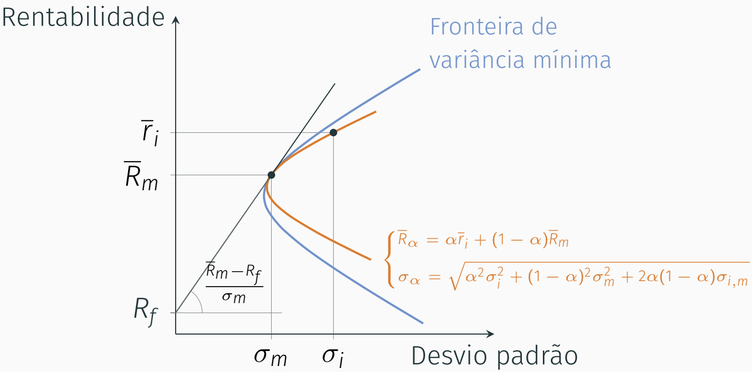
Solução

$$\mathbf{w} = \frac{\Upsilon^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - R_f \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Upsilon^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - R_f \cdot \mathbf{1})}$$

Ou, em outra notação,

$$w_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Upsilon_{kj}^{-1}(\bar{r}_j - R_f)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Upsilon_{ij}^{-1}(\bar{r}_j - R_f)}.$$

Condição de tangência



Condição de tangência

A inclinação da curva laranja é

$$\frac{\frac{d\overline{R}_\alpha}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}} = \frac{\frac{d}{d\alpha}\left[\alpha\overline{r}_i + (1-\alpha)\overline{R}_m\right]}{\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i,m}}}$$

O numerador dessa fração é

$$\frac{d\overline{R}_\alpha}{d\alpha} = \overline{r}_i - \overline{R}_m$$

O denominador é

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 - (1-\alpha)\sigma_m^2 + (1-2\alpha)\sigma_{i\,m}}{\sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i,m}}}.$$

Calculando no ponto de tangência ($\alpha = 0$), obtemos

$$\left.\frac{\frac{d\overline{R}_\alpha}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}}\right|_{\alpha=0} = \frac{\overline{r}_i - \overline{R}_m}{\frac{\sigma_{i\,m} - \sigma_m^2}{\sigma_m}}.$$

Condição de tangência

$$\frac{\overline{R}_m - R_f}{\sigma_m} = \left.\frac{\frac{d\overline{R}_\alpha}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}}\right|_{\alpha=0}$$

$$\frac{\overline{R}_m - R_f}{\sigma_m} = \frac{\bar{r}_i - \overline{R}_m}{\frac{\sigma_{i\,m} - \sigma_m^2}{\sigma_m}}.$$

$$\bar{r}_i = R_f + \frac{\sigma_{i\,m}}{\sigma_m^2}(\overline{R}_m - R_f)$$

$$\bar{r}_i = R_f + \beta_i(\overline{R}_m - R_f)$$

O modelo CAPM

O modelo CAPM — Hipóteses

1. Modelo de um único período;
2. Há um número definido de ativos perfeiramente divisíveis e ofertados em quantidades fixas;
3. Não arbitragem;
4. Há um ativo livre de risco;
5. Não há custos de transação, restrições de venda a descoberto ou qualquer outra regulação;
6. Os mercados são perfeitamente competivivos: todos investidores são tomadores de preço;

O modelo CAPM — Hipóteses

7. As preferências dos investidores podem ser representadas na forma de uma função de utilidade média variância;
8. Os investidores são maximizadores de utilidade;
9. As informações relevantes acerca das rentabilidades dos ativos são compartilhadas entre os consumidores (informações homogêneas) e, portanto, todos têm a estimativa da distribuição conjunta das rentabilidades dos ativos (expectativas homogêneas).

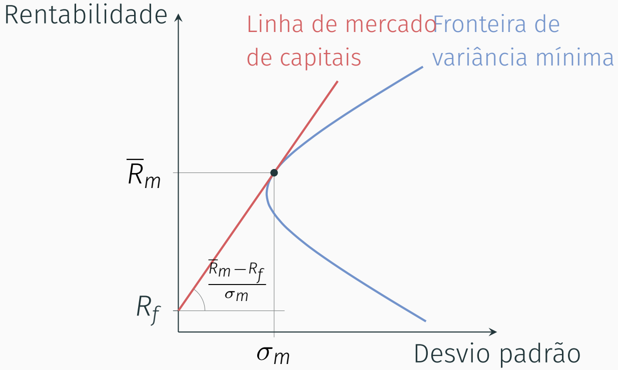
Todos investidores visualizam a mesma fronteira eficiente para os ativos com risco.

Todos investidores demandam a mesma carteira de ativos com risco, embora possam combinar essa carteira com o ativo livre de risco em proporções diferentes — todos investidores estimam a mesma fronteira eficiente conhecida com linha de mercado de capitais;

No equilíbrio, a carteira de risco demandada pelos investidores é a carteira de mercado, isto é, se q_i e p_i são respectivamente a quantidade existente no mercado e o preço do ativo i, o peso desse ativo na carteira de equilíbrio será

$$w_i = \frac{p_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}.$$

Linha de mercado de capitais



Significado do β

Considere uma carteira que combine o ativo *i* com a carteira de mercado, com pesos α para o ativo *i* e $1 - \alpha$ para a carteira de mercado. Seu variância é

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i\,m}.$$

O impacto marginal do ativo *i* sobre a variância da carteira de mercado é dado pela derivada dessa variância em relação a α calculada em $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left[2\alpha\sigma_i^2 - 2(1-\alpha)\sigma_m^2 + (2-4\alpha)\sigma_{i,m}\right]_{\alpha=0} = 2(\sigma_{i,m} - \sigma_m^2)$$
$$= 2\sigma_m^2 \left(\frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} - 1\right) = 2(\beta_i - 1)$$

Portanto, na margem, o ativo *i* aumenta, diminui ou não afeta o risco de mercado caso, respectivamente $\beta_i > 1$, $\beta_i < 1$ ou $\beta_i = 1$.

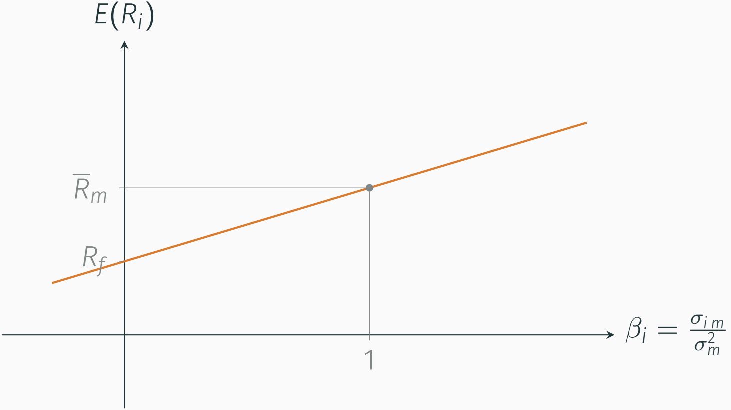
Significado do β

Se $\beta_i > 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma redução da participação do ativo i. Para que essa redução não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser maior que a rentatibilidade esperada da carteira de mercado.

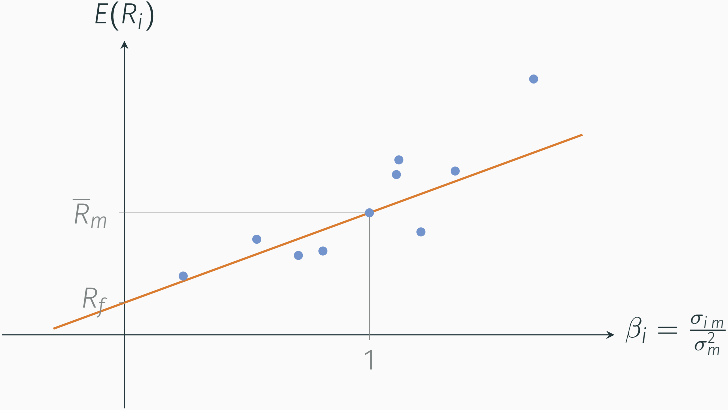
Se $\beta_i < 1$, a carteira de mercado tem seu risco reduzido com uma maior participação do ativo i. Para que esse aumento de participação não ocorra, a rentabilidade esperada desse ativo precisa ser menor que a rendatibilidade esperada da carteira de mercado.

Se $\beta_i = 1$, a carteira de mercado tem seu risco inalterado com variações marginais da participação do ativo i. Para que a demanda desse ativo são seja superior à sua oferta, é necessário que sua rentabilidade esperada seja igula à rentabilidade esperada da carteira de mercado.

A linha de mercado (de títulos)



Uma linha de mercado empírica



Ajustes nos preços

Se P_e é o preço de um ativo ao final do período, P é o preço de ativo desse mercado no início do período, podemos definir a rentabilidade esperada de um ativo como

$$E(R) = \frac{E(P_e) - P}{P}$$

Se $E(R) > R_f + \beta(\overline{R}_m - R_f)$, haverá uma demanda pelo ativo superior à quantidade de mercado, o preço P do ativo deve subir e, consequentemente sua rentaiblidade esperada $E(R)$ diminui.

Se $E(R) < R_f + \beta(\overline{R}_m - R_f)$, haverá uma demanda pelo ativo inferior à quantidade de mercado, o preço P do ativo deve diminuir e, consequentemente sua rentaiblidade esperada $E(R)$ aumenta.

Ajuste nos preços