

Resolução do exame ANPEC de microeconomia para 2014

Roberto Guena de Oliveira

12 de fevereiro de 2014

QUESTÃO 1

A respeito das funções utilidades e seus vários formatos, podemos afirmar:

- ① Para um consumidor individual com uma função utilidade na forma $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$; $\alpha + \beta = 1$ a participação dos bens no orçamento individual muda sempre que ocorrer variações nos preços relativos de x e y ;
- ② Um consumidor que assume uma função utilidade na forma $U(x, y) = (x - x_0)^\alpha \cdot (y - y_0)^\beta$; $\alpha + \beta = 1$ sempre vai adquirir no mínimo a quantidade (x_0, y_0) dos dois bens;
- ③ Na função utilidade $U(x, y) = (x - x_0)^\alpha \cdot (y - y_0)^\beta$; $\alpha + \beta = 1$ a participação de um dos bens no orçamento doméstico independe da quantidade mínima requerida de cada bem;
- ④ Supondo-se uma função utilidade na forma $U(x, y) = \frac{x^\theta}{\theta} + \frac{y^\theta}{\theta}$, então sempre que a elasticidade de substituição for nula os bens x e y são considerados substitutos perfeitos.

Solução

- ① Falso. Trata-se de uma função de utilidade Cobb-Douglas. Nesse caso, a participação de cada um dos bens no orçamento individual, isto é, a razão entre o gasto com a aquisição desse bem e a renda do consumidor, será constante e igual à razão entre o expoente desse bem e a soma dos expoentes de todos os bens. Assim, levando em conta que $\alpha + \beta = 1$, a participação do bem x no orçamento do consumidor será constante e igual a $\alpha/(\alpha + \beta) = \alpha$ e a participação do bem y nesse orçamento será constante e igual a $\beta/(\alpha + \beta) = \beta$.

- ① Falso, se x_0 e y_0 forem grandezas positivas, então sempre haverá a possibilidade de que a renda do consumidor seja insuficiente para adquirir essa cesta de bens, isto é, denotando por m a renda do consumidor, por p_x o preço do bem x e por p_y o preço do bem y , há a possibilidade de que $m < p_x x_0 + p_y y_0$. Nesse caso, o consumidor não teria como adquirir as quantidades x_0 e y_0 dos dois bens. O gabarito considera, todavia, o item verdadeiro. Eu consigo pensar em duas razões pelas quais alguém seria levado a concordar com o gabarito.

A primeira delas é que essa função de utilidade é usada como função de utilidade subjacente a um modelo empírico, conhecido como “sistema linear de dispêndio” (*linear expenditure system*), apresentado no apêndice A, que pressupõe que os consumidores sempre irão adquirir as quantidades mínimas x_0 e y_0 dos dois bens, pressupondo também, por vezes implicitamente, que a renda do consumidor é suficiente para isso. Assim, por exemplo, Stone 1954, p. 512, autor frequentemente identificado com esse modelo, diz que (x_0, y_0) “pode ser identificado com um vetor de quantidades com o qual o consumidor está em algum sentido comprometido.” Mais enfaticamente, Samuelson 1947, p. 88, citado pelo próprio Stone, diz que, uma das hipóteses restritivas desse modelo é que assume-se sempre que o consumidor compra “um conjunto necessário de bens”, isto é, a cesta (x_0, y_0) . O importante a ressaltar aqui é que o consumo mínimo de bens (x_0, y_0) é uma restrição adicional à escolha do consumidor que não pode ser inferida da função de utilidade. Portanto, não me parece que tenhamos aqui um bom argumento para justificar que o item deva ser considerado verdadeiro.

A segunda razão pela qual o item poderia ser eventualmente considerado verdadeiro é que a função de utilidade $U(x, y) = (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$, com $\alpha + \beta = 1$ sempre tem valor definido caso $x > 0$ e $y > 0$, independentemente do valor de α . Isso deixa de ser verdadeiro caso tenhamos $x \leq x_0$ ou $y \leq y_0$ pois:

- Se $\alpha < 0$, então a função de utilidade não é definida para $x = x_0$ e, se $\alpha > 1$, de tal sorte que $\beta < 0$, a função de utilidade não é definida para $y = y_0$;
- se α é um número irracional, o que implica que $\beta = 1 - \alpha$ também é irracional, a função de utilidade não retorna qualquer valor real caso $x < x_0$ ou $y < y_0$; e
- se α é um número racional com forma reduzida $\alpha = r/s$, na qual r e s são dois inteiros primos entre si, então, a função de utilidade só retorna valores reais para $x < x_0$ ou $y < y_0$ caso s seja um número ímpar.¹

¹ Assumimos aqui a convenção, frequentemente empregada segundo a qual, se x é um número positivo, s é um inteiro positivo e ímpar e $r < s$ é um inteiro positivo coprimo de s , podemos calcular

$$(-x)^{\frac{r}{s}} = (-1)^{\frac{r}{s}} (x)^{\frac{r}{s}} = (\sqrt[s]{-1})^r (\sqrt[s]{x})^r = (-1)^r x^{\frac{r}{s}}.$$

Nesse caso, por exemplo, $(-1)^{2/3} = (-1)^2 \times 1^{2/3} = 1$ e $(-32)^{3/5} = (\sqrt[5]{-1})^3 \times 32^{3/5} = -8$, mas $(-8)^{3/2}$ não é

Diante disso, poder-se-ia argumentar que a pressuposição de que haverá um consumo mínimo das quantidades x_0 e y_0 dos dois bens é uma consequência direta do domínio, irrestrito em relação aos valores de α e β , da função de utilidade. Não obstante, poder-se-ia argumentar em sentido contrário, que a função de utilidade apresentada, só é compatível com o conjunto de consumo habitualmente pressuposto (\mathbb{R}_+^n) caso α e, consequentemente, β sejam racionais maiores do que zero e menores do que 1 com a forma reduzida com denominadores ímpares e que, portanto, ela pressupõe implicitamente que esses parâmetros possuem essa característica.

Assim, não me parece possível sustentar a afirmação do gabarito de que o item seja verdadeiro.

② Falso. Considere, por exemplo o caso bem comportado no qual

- a) $0 < \alpha < 1$ e, como $\beta = 1 - \alpha$, $0 < \beta < 1$.
- b) $\alpha = r/s$ sendo r e s dois números inteiros primos entre com s ímpar. Consequentemente $\beta = (s - r)/s$. Note que, nesse caso, visto que $s (= r + (s - r))$ é ímpar e dado que a soma de dois números ímpares, assim como a soma de dois números pares, é sempre par, necessariamente, ou r é ímpar ou $s - r$ é ímpar, mas não ocorre de r e $s - r$ serem simultaneamente ímpares. Assumiremos aqui, sem perda de generalidade que r seja um inteiro ímpar.
- c) $x_0, y_0 > 0$.
- d) O conjunto de consumo corresponde ao conjunto das cestas (x, y) para as quais os dois bens são consumidos em quantidades não negativas.

Para encontrar a função de demanda pelos dois bens, procediremos nas seguintes etapas: inicialmente, investigaremos as propriedades de uma cesta de bens que atende às condições de máximo de primeira ordem; após isso, investigaremos sob que condições essa cesta de bens é, efetivamente, um ponto de máximo local; finalmente, compararemos os eventuais máximos locais interiores com possíveis soluções de canto (com consumo nulo de um dos bens), para determinar a cesta de bens que constitui a escolha ótima do consumidor.

Comecemos por investigar as condições de primeira ordem para um máximo local. Como sabemos, estas são caracterizadas pela igualdade entre a razão entre as utilidades marginais dos dois bens e seu preço relativo e pela restrição orçamentária do consumidor. Para determinar a taxa marginal de substituição, encontramos inicialmente as utilidades marginais dos dois bens:

$$UMg_x = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \alpha(x - x_0)^{\alpha-1}(y - y_0)^\beta \quad (1)$$

um número real. Embora essa convenção não seja universal, ela é comumente aceita na computação de potências reais. Contrários a essa convenção, alguns autores preferem que se reserve o domínio da função potência exclusivamente para os números positivos.

e

$$UMg_y = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \beta(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^{\beta-1}. \quad (2)$$

A condição de primeira ordem, então pode ser resumida pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = m \end{cases} \quad (3)$$

Subtraindo $p_x x_0$ e $p_y y_0$ de ambos lados da segunda equação acima, chamando $x - x_0$ de ξ , $y - y_0$ de ψ e $m - p_x x_0 - p_y y_0$ de μ ,² o sistema de equações (3) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\psi}{\xi} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x \xi + p_y \psi = \mu \end{cases} \quad (4)$$

Resolvendo esse sistema de equações para ξ e ψ , obtemos

$$\xi = \alpha \frac{\mu}{p_x}$$

e

$$\psi = \beta \frac{\mu}{p_y},$$

ou, substituindo $\xi = x - x_0$, $\psi = y - y_0$ e $\mu = m - p_x x_0 - p_y y_0$,

$$x = x_0 + \frac{\alpha}{p_x} (m - p_x x_0 - p_y y_0) \quad (5)$$

e

$$y = y_0 + \frac{\beta}{p_y} (m - p_x x_0 - p_y y_0) \quad (6)$$

O ponto com as coordenadas descritas pelas equações (5) e (6) é um candidato a ponto de máximo local. Para verificar se ele efetivamente é um máximo local, precisamos averiguar o sinal, nesse ponto, do seguinte Hessiano orlado:

$$\tilde{H} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Se, no ponto que resolve (5) e (6), esse determinante for positivo e $\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} \neq 0$, então, a condição suficiente de máximo será atendida e esse ponto será

² μ é por vezes chamada “renda supernumerária” (*supernumerary income*).

certamente um ponto de máximo local. Se esse determinante for negativo, podemos ter certeza que não se trata de um ponto de máximo local.

Notemos que desde que $(x-x_0)^{\alpha-1}$ e $(y-y_0)^{\beta-1}$ sejam definidas, caso $x, y \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x} = \alpha\beta(x-x_0)^{\alpha-1}(y-y_0)^{\beta-1} \neq 0.$$

Calculando o hessiano orlado definido em (7), fazendo algumas simplificações e considerando que $\alpha + \beta = 1$, chegamos a

$$\bar{H} = \alpha\beta(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta \quad (8)$$

Dadas as hipóteses que assumimos sobre os parâmetros α e β , sempre que tivermos $x > x_0$, \bar{H} será positivo. Em particular, caso $m > p_x x_0 + p_y y_0$, as quantidades obtidas ao aplicarmos as equações (5) e (6) serão tais que $x > x_0$ e $y > y_0$. Assim, quando $m > p_x x_0 + p_y y_0$, a cesta de bens composta por essas quantidades consiste em um máximo local. Ao contrário, caso $m < p_x x_0 + p_y y_0$, a cesta de bens obtida aplicando-se as equações (5) e (6) será tal que $x < x_0$ e $y < y_0$ e, nesse caso, essa cesta não será uma cesta de utilidade máxima, mas sim de utilidade mínima. Assim, para que tenhamos uma solução de máximo interior, é preciso que $m > p_x x_0 + p_y y_0$. Caso contrário, a solução de utilidade máxima será uma solução de canto: dada nossa hipótese de que α é a razão entre dois números ímpares, primos entre si, o consumidor deverá adquirir m/p_x unidades do bem x e zero unidades do bem y .³ Mesmo que $m > p_x x_0 + p_y y_0$, ou seja, mesmo que exista uma solução interior de máximo local, é necessário compará-la com as possíveis soluções de canto para verificar se essa solução é também uma solução de máximo global.

Substituindo as equações (5) e (6) na função de utilidade, obtemos a utilidade do consumidor caso ele opte pela solução interior:

$$V_0(p_x, p_y, m) = \left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_y}\right)^\beta (m - p_x x - p_y x). \quad (9)$$

Caso o consumidor opte por consumir apenas o bem x , sua utilidade seria

$$V_1(p_x, p_y, m) = y_0^\beta \left(\frac{m - p_x x_0}{p_x}\right)^\alpha. \quad (10)$$

Comparando (9) e (10), concluímos que a condição para que a demanda pelos dois bens seja simultaneamente positiva é

$$(m - p_x x_0)^{1-\alpha} - \frac{p_y y_0}{(m - p_x x_0)^\alpha} > \left(\frac{y_0 p_y}{\beta \alpha^{\alpha/\beta}}\right)^\beta. \quad (11)$$

³Quando α é a razão entre dois ímpares, $\beta (= \alpha - 1)$ é a razão entre um ímpar e um par. Se, ao contrário, α fosse a razão entre um ímpar e um par, então, o consumidor deveria escolher consumir uma quantidade zero do bem x e m/p_y unidades do bem y .

Como o lado direito dessa desigualdade é uma constante e, como o lado esquerdo é crescente em m (lembre-se que estamos considerando $0 < \alpha < 1$) e ilimitado, podemos ter certeza que, para níveis de renda suficientemente elevados, o consumidor demandará a solução interior descrita pelas equações (5) e (6). Quando isso acontecer, a participação do bem x no orçamento do consumidor será

$$s_x = \frac{p_x x_0 + \alpha(m - p_x x_0 - p_y y_0)}{m} = \alpha + (1 - \alpha) \frac{p_x x_0}{m} - \alpha \frac{p_y y_0}{m} \quad (12)$$

Isso indica que a participação do bem x no orçamento do consumidor é tanto maior quanto maior for x_0 e tanto menor quanto maior for y_0 . Como exercício, você pode verificar que a participação do bem y no orçamento do consumidor é dada por

$$s_y = \beta + (1 - \beta) \frac{p_y y_0}{m} - \beta \frac{p_x x_0}{m} \quad (13)$$

o que indica que, para níveis suficientemente elevados de renda, a participação do bem y no orçamento do consumidor é tanto menor quanto menor for x_0 e tanto maior quanto maior for x_0 .

- ③ Falso. A quantidade do bem y que um consumidor está disposto a dar em troca de uma unidade adicional do bem x é tal que, após ceder essa quantidade do bem y e receber em troca uma unidade adicional do bem x , esse consumidor fica tão bem quanto estava antes de realizar essa troca. Em outros termos se R é a quantidade (máxima) do bem y da qual o consumidor está disposto a abrir mão para ter uma unidade adicional do bem x e se a função de utilidade do consumidor é $U(x, y)$, então R é definida por $U(x + 1, y - R) = U(x, y)$. Consideremos uma pessoa com a função de utilidade $U(x, y) = \min(\alpha x, \beta y)$. Assuma o caso em que $\alpha, \beta > 0$. Se essa pessoa consome uma cesta de bens inicial (x_0, y_0) com $\alpha x_0 \geq \beta y_0$, então, sua função de utilidade inicial será igual a βy_0 . Caso o consumo do bem x seja acrescentado de uma unidade, o valor dessa função de utilidade não será alterado, pois, como por hipótese $\beta y_0 \leq \alpha x_0$, deveremos ter $\beta y_0 < \alpha(x_0 + 1)$, ou seja $\min(\alpha(x_0 + 1), \beta y_0) = \beta y_0$. Nesse caso, a redução no consumo do bem y que essa pessoa aceita em troca de uma unidade adicional do bem x é zero. Suponha agora que a cesta de consumo original (x_0, y_0) seja tal que $\alpha x_0 < \beta y_0$. Nesse caso, a utilidade original dessa pessoa será $\min(\alpha x_0, \beta y_0) = \alpha x_0$, e caso receba uma unidade adicional do bem x sua utilidade irá aumentar. O máximo do bem y que essa pessoa estaria disposta a abrir mão para receber essa unidade adicional do bem x seria aquela quantidade que a devolvesse ao nível de utilidade inicial apesar do aumento no consumo do bem x de tal sorte que

$$\min(\alpha(x_0 + 1), \beta(y_0 - R)) = \min(\alpha x_0, \beta y_0) = \alpha x_0.$$

Como, assumindo-se $\alpha > 0$, $\alpha(x_0 + 1) > \alpha x_0$, para garantir a igualdade acima, é preciso fazer com que $\beta(y_0 - R) = \alpha x_0$, isto é, $R = y_0 - \frac{\alpha}{\beta} x_0$.

Portanto, no caso em que $\alpha, \beta > 0$, a quantidade que essa pessoa está disposta a dar do bem y em troca de uma unidade adicional do bem x depende do consumo inicial desses bens e é dada pela função

$$R(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{caso } \alpha x \geq \beta y \\ y - \frac{\alpha}{\beta} x & \text{caso } x < y \end{cases}.$$

- ④ Falso. A função de utilidade apresentada é uma transformação monotônica da função de utilidade

$$V(x, y) = (x^\theta y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$$

que conhecemos como uma função do tipo CES. Essa função de utilidade se reduz a $U(x, y) = x + y$ quando $\theta = 1$. Nesse caso, os dois bens são substitutos perfeitos. Sabemos, ademais, que a elasticidade de substituição para essa função de utilidade é

$$\sigma = \frac{1}{1 - \theta}.$$

No caso em que $\theta = 1$ essa elasticidade de substituição não é definida. Porém, considerando que seu limite quando θ tende a 1 pela esquerda é infinito, convencionou-se dizer que a elasticidade de substituição para bens substitutos perfeitos é infinita. Não há valor real de θ para o qual $\sigma = 0$, todavia, caso $\theta < 0$, quanto maior o seu valor absoluto, mais próxima de zero será a elasticidade de substituição. Como

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} (x^\theta y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} = \min(x, y),$$

convencionou-se dizer que preferências representadas pela função de utilidade $U(x, y) = \min(x, y)$ apresentam elasticidade de substituição igual a zero.⁴

⁴ Todavia, caso usemos a definição convencional de elasticidade de substituição, qual seja,

$$\sigma = \frac{d \frac{y}{x}}{d |TMS|} \frac{TMS}{\frac{y}{x}} \Big|_{U(x,y)=cte.},$$

tal elasticidade não tem valor definido para o caso de complementares perfeitos.

QUESTÃO 2

A respeito das relações de preferências da teoria do consumidor é possível afirmar:

- ① Se $x \geq y$ e $x \neq y$ então a cesta de bens x possui no mínimo as mesmas quantidades de cada bem da cesta y ;
- ② Relações binárias transitivas e reflexivas são relações de preferências;
- ③ Se a relação de preferência é transitiva, então necessariamente a relação de indiferença também é transitiva;
- ④ Relações de preferência simétricas e irreflexivas são transitivas;
- ⑤ A preferência lexicográfica é uma relação de preferência porque é completa, transitiva, contínua e reflexiva.

Solução

- ① Verdadeiro. Usualmente emprega-se a notação $x \geq y$ na qual x e y são dois vetores com o mesmo número n de elementos para dizer $x_i \geq y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Em português, se x e y são dois vetores representando cestas de consumo, $x \geq y$ significa que “a cesta x possui no mínimo as mesmas quantidades de cada bem da cesta y ”. Assim, a afirmação do enunciado nos parece uma tautologia lógica com a forma “se A e B, então A”: se $x \geq y$ e $x \neq y$, então $x \geq y$. A minha resposta difere da do gabarito. A única razão pela qual eu posso imaginar que alguém considere essa afirmação falsa é a seguinte: não é verdade que sempre, que x possua no mínimo as mesmas quantidades de cada bem comparativamente à cesta y ($x \geq y$), tenhamos $x \geq y$ e $x \neq y$, pois pode acontecer da cesta x ter a mesma quantidade de todos os bens quando comparada à cesta y , e, portanto, não ser verdade que $x \neq y$. Em outras palavras, embora seja verdade que “se $x \geq y$ e $x \neq y$ então a cesta de bens x possui no mínimo as mesmas quantidades de cada bem da cesta y ”, não podemos concluir que “se a cesta de bens x possui no mínimo as mesmas quantidades de cada bem da cesta y então $x \geq y$ e $x \neq y$. Mas não é isso que o enunciado afirma e não vejo como isso poderia ser inferido do enunciado, embora a única explicação que consegui encontrar para o examinador dizer que tal enunciado é falso seja que ele tenha feito erroneamente essa inferência.
- ② Falso. Mais uma vez, discordo do enunciado. Relações de preferências são relações binárias, usualmente supostas transitivas e reflexivas, *definidas sobre o conjunto de consumo de um consumidor*, ou seja, algum conjunto de

possíveis escolhas para um agente. Relações binárias transitivas e reflexivas definidas em outros conjuntos não podem ser consideradas relações de preferência. Considere, por exemplo, a relação binária de menor ou igual \leq definida no conjunto dos números reais. Ela é transitiva e reflexiva, mas não creio que alguém a definiria como uma relação de preferência.

- ② Verdadeiro. Considere três cestas de bens quaisquer x , y e z pertencentes ao conjunto de consumo de um consumidor. Suponha que $x \sim y$ e que $y \sim z$. Então $x \succsim y$, $y \succsim z$ e, sendo a relação de preferência \succsim transitiva, $x \succsim z$. Ao mesmo tempo, como $z \sim y$, $z \succsim y$ e, como $y \sim x$, $y \succsim x$ e, sendo a relação \succsim transitiva, $z \succsim x$. Assim, a transitividade da relação \succsim implica que, se $x \sim y$ e $y \sim z$, então, tanto é verdadeiro que $x \succsim z$ e que $z \succsim x$, isto é $x \sim z$.
- ③ Falso. Dizemos que a relação \succsim é simétrica caso, sempre que que $x \succsim y$, $y \succsim x$. Então, caso a relação \succsim seja simétrica e transitiva, $x \succsim y$ implicará $y \succsim x$ (simetria das preferências) e, conseqüentemente, por transitividade, teremos $x \succsim x$ e, assim a relação \succsim seria reflexiva. Portanto, não é possível que \succsim seja, ao mesmo tempo simétrica, transitiva e irreflexiva.
- ④ Falso. Relações de preferências lexicográficas são relações de preferências, mas não são contínuas.

QUESTÃO 3

Um consumidor tem uma função utilidade Cobb-Douglas convencional tal que

$$U(x, y) = x^\alpha y^\beta; \alpha + \beta = 1 \text{ Avalie as afirmações abaixo:}$$

- ① Esse consumidor sempre alocará um percentual α de sua renda para comprar o bem x ;
- ① Suponha que a renda do consumidor seja de $b = \text{R}\$2,00$ e que os preços vigentes dos bens no mercado sejam $p_x = 0,25$ e $p_y = 1$. Agora suponha que o consumidor aloca sua renda igualmente entre os dois bens, então sua escolha ótima deve ser $x = 1$ e $y = 4$;
- ② Para esse consumidor pequenas mudanças na renda recebida implicam mudanças da mesma magnitude na utilidade do consumidor;
- ③ Considerando a renda do consumidor como b , então o consumo ótimo do bem y é tal que $y^* = \beta \left(\frac{b}{p_y} \right)$;
- ④ Se a renda do consumidor aumentasse em 10%, o nível de utilidade do consumidor aumentaria em menos que 10%.

Solução

- ① Verdadeiro. Conforme sabemos, se a função de utilidade tem a forma $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$, então, notando o preço do bem x como p_x , o preço do bem y como p_y e a renda do consumidor como b (para seguir a notação do exercício) e lembrando que $\alpha + \beta = 1$, as funções de demanda dos bens x e y serão

$$x(p_x, p_y, b) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{b}{p_x} = \alpha \frac{b}{p_x} \quad (14)$$

e

$$y(p_x, p_y, b) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{b}{p_y} = \beta \frac{b}{p_y}. \quad (15)$$

Assim, o gasto com a aquisição do bem x será

$$p_x x(p_x, p_y, b) = \alpha b,$$

o que corresponde a uma razão

$$\frac{p_x x(p_x, p_y, b)}{b} = \frac{\alpha b}{b} = \alpha$$

da renda do consumidor.

- ① Falso. Caso ele gaste metade de sua renda, ou seja, R\$1,00, com cada um dos bens, ele irá adquirir

$$\frac{2/2}{p_x} = \frac{1}{0,25} = 4$$

unidades do bem x e

$$\frac{2/2}{p_y} = \frac{1}{1} = 1$$

unidade do bem y .

- ② A questão foi anulada. A rigor a afirmação está falsa pois a função de utilidade indireta será

$$\begin{aligned} V(p_x, p_y, b) &= U(x(p_x, p_y, b), y(p_x, p_y, b)) \\ &= \left(\alpha \frac{b}{p_x}\right)^\alpha \left(\beta \frac{b}{p_y}\right)^\beta = \left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_y}\right)^\beta b. \end{aligned} \quad (16)$$

Assim, uma variação Δb na renda do consumidor irá provocar uma variação de utilidade na magnitude

$$\Delta U = \Delta b \left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_y}\right)^\beta \neq \Delta b. \quad (17)$$

- ③ Verdadeiro. Essa é a função de demanda representada pela expressão (15), que, como vimos corresponde à função de demanda para a função de utilidade do exercício.
- ④ Falso. De acordo com (16) e (17)

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta b \left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_y}\right)^\beta}{\left(\frac{\alpha}{p_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_y}\right)^\beta b} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Portanto, uma variação na renda do consumidor provoca uma variação percentualmente igual na utilidade do consumidor.

QUESTÃO 4

Com relação ao comportamento do consumidor, indique quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras:

- ① Se o bem é sempre normal, a Curva de Engel é positivamente inclinada;
- ② Se o bem é sempre inferior em todos os níveis de renda, a Curva de Engel pode apresentar qualquer inclinação;
- ③ Se o efeito-renda é positivo, o bem é normal;
- ④ O efeito-substituição mede a variação no consumo de um bem em função de seu preço e de seu nível de utilidade;
- ⑤ Se o efeito-renda é negativo e não excede o efeito-substituição, então o bem é um bem de Giffen.

Solução

- ① Verdadeiro. Se um bem é normal, a quantidade demandada do mesmo cresce quando a renda do consumidor cresce. Como a curva de Engel descreve exatamente a relação entre a quantidade demandada de um bem (normalmente representada no eixo horizontal) e a renda do consumidor (normalmente representada no eixo vertical), ela deve ser positivamente inclinada.⁵
- ② Falso. Primeiramente, cumpre observar que um bem não pode ser inferior para todos os níveis de renda, pois, quando a renda sobe de zero para qualquer valor positivo, o consumo desse bem não pode diminuir. Negligenciando isso, se o bem é inferior para todos os níveis de renda, a curva de Engel não pode ser positivamente inclinada em qualquer um dos seus pontos, pois, nesse caso, para algum nível de renda, o bem seria um bem normal e não inferior.
- ③ Falso. Para responder a essa pergunta, consideraremos que os efeitos substituição e renda são avaliados em termos de taxas de variação de acordo com a equação de Slutsky:

$$\frac{\partial x_i(p_1, \dots, p_n, m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i(p_1, \dots, p_n, m)}{\partial m} x_i(p_1, \dots, p_n, m).$$

⁵Cumpre observar que essa conclusão depende de considerarmos que um bem normal seja um bem cuja demanda é estritamente crescente em relação à renda, definição que encontramos em Varian 2012. Se considerarmos que um bem normal é aquele cuja demanda é não decrescente em relação à renda, como, por exemplo, o fazem, por exemplo, Mas-Collel, Whinston e Green 1995, então a curva de Engel poderia ter trechos verticais e, portanto, sem inclinação definida.

na qual $x_i(p_1, \dots, p_n, m)$ é a demanda pelo bem i , p_1, \dots, p_n são os preços dos n bens consumidos pelo consumidor, m é a renda do consumidor e $h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ é a função de demanda compensada pelo bem i calculada para o nível de utilidade $u = V(p_1, \dots, p_n, m)$ (V é a função de utilidade indireta). O efeito substituição é dado pelo termo $\frac{\partial}{\partial p_i} h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ e é sempre negativo ou nulo. O efeito renda é dado por $-\frac{\partial x_i(p_1, \dots, p_n, m)}{\partial m} x_i(p_1, \dots, p_n, m)$ e é positivo caso se trate de um bem inferior, isto é, caso $\frac{\partial x_i}{\partial m} < 0$.

- ③ Falso. O efeito-substituição mede a variação (ou a taxa de variação) no consumo de um bem como resposta a uma variação de preço supondo que a renda do consumidor seja ajustada de modo a manter seu nível de utilidade constante.
- ④ Falso. Um bem de Giffen é um bem para o qual a soma dos efeitos substituição e renda é sempre positivo. Como o efeito substituição é sempre negativo, para que se tenha um bem de Giffen, é necessário que o efeito renda seja positivo, o que só ocorre quando o bem é inferior.

QUESTÃO 5

Suponha que a tecnologia de produção do bem Y é dada por

$$f(K, L) = 600K^2L^2 - K^3L^3,$$

supondo que a quantidade disponível do insumo K é igual a 10 unidades. Nessas circunstâncias, podemos afirmar:

- Ⓐ O ponto de produção máxima ocorre quando o nível de utilização do fator L é igual a 40 unidades;
- Ⓑ A produtividade marginal do L é decrescente;
- Ⓒ No ponto de produto médio máximo temos o ponto de produção máxima;
- Ⓓ O nível de produção máxima do bem Y alcançável é $q_y^* = 32$;
- Ⓔ O produto médio máximo ocorre quando empregamos $L = 38$ unidades.

Solução

- Ⓐ Verdadeiro. Se a quantidade do insumo K é mantida fixa em $K = 10$, a função de produção de curto prazo passa a ser

$$f_c(L) = f(10, L) = 60\,000L^2 - 1000L^3.$$

A produtividade marginal do fator L é a derivada dessa função de produção em relação a L , isto é,

$$PMg_L = 120\,000L - 3000L^2.$$

O produto máximo é alcançado quando $df_c/dL = 0$ e $d^2f_c/dL^2 < 0$. A primeira condição estabelece que

$$PMg_L = 120\,000L - 3000L^2 = 0 \Rightarrow L = 0 \text{ ou } L = 40.$$

Usamos a segunda condição para testar em quais desses valores efetivamente ocorre produção máxima.

$$\frac{d^2f_c}{dL^2} = 120\,000 - 6000L,$$

de sorte que,

$$\frac{d^2f_c(0)}{dL^2} = 120\,000 > 0.$$

e

$$\frac{d^2 f_c(40)}{dL^2} = 120\,000 - 6000 \times 40 = -120\,000 < 0.$$

Portanto, a função de produção é máxima quando $L = 40$.

- ① Falso. A inclinação da curva de produtividade marginal do fator L é dada pela segunda derivada da função de produção de curto prazo:

$$\frac{d^2 f_c}{dL^2} = 120\,000 - 6000L,$$

Apenas para valores de L para os quais essa segunda derivada é negativa, a produtividade marginal desse fator é decrescente. Assim a produtividade marginal de L só é decrescente caso

$$120\,000 - 6000L < 0 \Rightarrow L > 20.$$

Ou seja, a produtividade marginal do fator L só é declinante para $L > 20$.

- ② Falso. Sabemos que, quando o produto médio é máximo, este é igual ao produto marginal. Sendo o produto médio máximo positivo, no ponto de produto médio máximo, o produto marginal (igual, nesse ponto, ao produto médio) também é positivo, o que indica que é possível aumentar ainda mais a produção contratando-se mais do insumo variável. Alternativamente, podemos chegar à mesma conclusão calculando o ponto de produto médio máximo:

O produto médio é dado por

$$PM = \frac{f_c(L)}{L} = \frac{60\,000L^2 - 1000L^3}{L} = 60\,000L - 1000L^2.$$

A primeira derivada do produto médio em relação a L é

$$\frac{dPM}{dL} = 60\,000 - 2000L.$$

A segunda derivada é

$$\frac{d^2 PM}{dL^2} = -3000.$$

Como a segunda derivada é sempre negativa, para encontrar o ponto de produto médio máximo basta igualar sua primeira derivada a zero para obter

$$L = 30.$$

Conforme já vimos o produto máximo é atingido com $L = 40$.

- ③ Falso. Vimos que a produção é máxima quanto $L = 40$. Com esse nível de emprego do fator L o produto será igual a

$$f_c(40) = 60\,000(40)^2 - 1000(40)^3 = 32 \times 10^6.$$

- ④ Falso. Conforme vimos ao responder o item 2, o produto médio é máximo quando $L = 30$.

QUESTÃO 6

A curva de demanda de mercado para o bem X é dada por $q^d = 200p^{-1,2}$. A curva de oferta para esse mesmo bem X assume a forma $q^o = 1,3p$. Suponha ainda que o governo resolve intervir nesse mercado, por razões ambientais, e define uma cota de produção máxima de $q = 11$ unidades de X no mercado. Podemos afirmar:

- Ⓐ O preço de equilíbrio de X no mercado sem intervenção é $p^* = 9,87$;
- Ⓑ A intervenção do governo provoca um ganho de bem-estar para todos no mercado;
- Ⓒ Apenas os produtores do bem X sofrem perdas de bem-estar decorrentes da intervenção do governo;
- Ⓓ Uma curva de demanda por X mais preço elástica induziria uma perda de bem-estar menor para os consumidores do bem X ;
- Ⓔ A perda líquida de excedente dos consumidores é maior do que a perda líquida de excedente dos produtores e isso ocorre porque a elasticidade-preço da demanda é menor do que a elasticidade-preço da oferta.

Solução

- Ⓐ A questão foi anulada pois não poderia ser respondida sem o auxílio de uma calculadora. Vamos resolvê-la ainda assim. A condição de equilíbrio sem intervenção governamental é aquela que iguala as quantidades demandas e ofertadas. Assim, ele pode ser encontrado resolvendo-se a equação:

$$\begin{aligned}q^d &= q^o \\200p^{-1,2} &= 1,3p \\p^{\frac{11}{5}} &= \frac{2000}{13} \\p &= \left(\frac{2000}{13}\right)^{\frac{5}{11}}.\end{aligned}$$

Com o uso de uma calculadora, determinamos a aproximação decimal

$$p \approx 9,86575423156,$$

Ou seja, calculando com uma aproximação de duas casas decimais teríamos

$$p \approx 9,87.$$

Felizmente a questão foi anulada e não somos forçados a adivinhar se o valor $p^* = 9,87$ deve ser entendido como uma aproximação, de tal sorte que o item seria verdadeiro, ou um valor exato, caso em que o item seria falso.

- ① Falso. Caso a definição de uma cota de produção máxima seja efetiva, isto é, a cota máxima de produção esteja abaixo da quantidade de equilíbrio de mercado, os compradores do bem seriam prejudicados pois teriam que pagar um preço mais elevado e comprariam uma menor quantidade do bem. Caso essa cota fosse definida acima da quantidade de equilíbrio, ela não afetaria o equilíbrio de mercado e nem os produtores nem os consumidores seriam beneficiados.
- ② Falso. Conforme dito, ou a cota é inoperante por ser estabelecida acima da quantidade de equilíbrio de mercado ou ela implicará um preço de mercado mais elevado, o que certamente prejudicaria os consumidores. Eventualmente, os produtores poderiam ser beneficiados com esse preço mais elevado.
- ③ Verdadeiro, desde que a curva de demanda mais preço elástica cruze a curva de oferta no mesmo ponto que a curva de demanda inicial, menos preço elástica, de tal sorte que o equilíbrio inicial (antes do estabelecimento da cota máxima de produção) seja o mesmo para as duas curvas de demanda, que as duas curvas seja continuamente diferenciáveis e que por “curva de demanda mais preço elástica” entenda-se uma curva de demanda cuja elasticidade-preço no ponto é, em módulo, maior do que a elasticidade-preço da demanda da curva de demanda original para qualquer quantidade entre a quantidade de equilíbrio inicial e a quantidade definida pela cota máxima de produção estabelecida pelo governo. Nesse caso, podemos garantir que a curva de demanda mais preço elástica esteja abaixo da curva de demanda original para todas as quantidades entre a quantidade de equilíbrio original e a quantidade fixada como cota máxima de produção, conforme explica-se a seguir:

- a) Notando por x^d a quantidade demandada de acordo com a curva de demanda mais preço-elástica, devemos ter, no ponto de cruzamento das duas curvas com a curva de oferta no qual $x^d = q^d$,

$$\left| \frac{dx^d}{dp} \frac{p}{x^d} \right| > \left| \frac{dq^d}{dp} \frac{p}{q^d} \right|,$$

e, portanto,

$$\left| \frac{dx^d}{dp} \right| > \left| \frac{dq^d}{dp} \right|.$$

Isso significa que a curva de demanda mais preço elástica é menos inclinada (em relação ao eixo das quantidades) do que a curva de demanda original no ponto em que as duas cruzam a curva de oferta.

- b) Consequentemente, se as duas curvas forem contínuas, na vizinhança à esquerda do ponto de cruzamento das duas curvas de demanda com a curva de oferta, a curva de demanda mais preço elástica é também menos inclinada do que a curva de demanda inicial. Para ver isso, notemos por q' uma quantidade na vizinhança à esquerda da quantidade correspondente ao ponto de cruzamento das curvas de demanda com a curva de oferta. Notemos também por p'_q e p'_x os preços sobre as curvas de demanda original e mais elástica, respectivamente, associados a essa quantidade. Então a condição de maior elasticidade da nova curva de demanda requer que, quando a quantidade é q' ,

$$\left| \frac{dx^d}{dp} \frac{p'_x}{q'} \right| > \left| \frac{dq^d}{dp} \frac{p'_q}{q'} \right|,$$

O que, levando em consideração que, por estar a curva de demanda mais preço elástica abaixo da curva de demanda original, $p'_x < p'_q$, implica novamente, agora em um ponto à esquerda do cruzamento das duas curvas com a curva de oferta,

$$\left| \frac{dx^d}{dp} \right| > \left| \frac{dq^d}{dp} \right|.$$

Isso garante que a curva de demanda mais preço-elástica continue menos inclinada em relação ao eixo das quantidades na vizinhança à esquerda do ponto de cruzamento das duas curvas com a curva de oferta e que, consequentemente, na vizinhança à esquerda da quantidade q' a curva mais preço elástica esteja abaixo da curva de demanda original.

- c) Extendendo esse raciocínio para um quantidade q'' na vizinhança à esquerda de q' e, posteriormente para uma quantidade q''' na vizinhança à esquerda de q'' e assim sucessivamente, podemos concluir que, se a curva de demanda dita mais preço elástica cruzar a curva de oferta no mesmo ponto de cruzamento da curva de oferta com a curva de demanda original e, se para todas as quantidades entre a quantidade de equilíbrio original e a quantidade fixada como cota máxima de produção a curva de demanda mais preço elástica tiver elasticidade-preço no ponto maior em valor absoluto do que a elasticidade-preço no ponto da curva de demanda original, então a curva de demanda mais preço-elástica fica abaixo da curva de demanda original para as quantidades entre a quantidade de equilíbrio original e a quantidade fixada como cota máxima de produção.

Sejam \bar{p}_x e \bar{p}_q o preço de demanda associado à quantidade da cota máxima de produção para a curva de demanda mais preço-elástica e a curva de demanda original. Seja também p^* o preço de equilíbrio original. Então, por ser a primeira menos inclinada (em relação ao eixo das quantidades do que

a segunda) e notando por $x^d(p)$ a função de demanda associada à curva mais preço elástica e por $q^d(p)$ a função de demanda associada à curva de demanda original, devemos ter

$$\bar{p}_x < \bar{p}_q$$

e, para qualquer $p^* < p \leq \bar{p}_x$,

$$x^d(p) < q^d(p).$$

A perda de bem-estar do consumidor é medida pela perda de excedente do consumidor dada pela área compreendida entre os preços de equilíbrio inicial e final, o eixo dos preços e a curva de demanda. Isso significa que, para a curva de demanda original, a perda de bem-estar do consumidor é medida por

$$\int_{p^*}^{\bar{p}_q} q^d(p) dp,$$

e, para a curva de demanda mais preço-elástica, tal perda de bem-estar será dada por

$$\int_{p^*}^{\bar{p}_x} x^d(p) dp,$$

Ora a segunda integral apresenta um integrando menor ($x^d(p) < q^d(p)$ no intervalo de integração), o mesmo limite inferior de integração e um limite de integração superior menor ($\bar{p}_x < \bar{p}_q$). Assim ela será, necessariamente menor, o que nos permite concluir que, dadas as hipóteses que assumimos, uma curva de demanda mais preço-elástica induziria uma perda de bem-estar menor para os consumidores.

Nossa conclusão é facilmente visualizada na Figura 1. Nela são mostradas duas curvas de demanda. A primeira delas, em verde, corresponde à curva de demanda do enunciado e tem elasticidade-preço constante igual a (em módulo) 1,2. A segunda delas, em vermelho, possui elasticidade-preço constante igual (em módulo) a 2. A quantidade e o preço de equilíbrio iniciais (sem intervenção do governo) são os mesmos para as duas curvas de demanda: $q^* \approx 12,8$ e $p^* \approx 9,9$. Caso o governo estabeleça que a produção máxima será de 11 unidades, o preço de equilíbrio passa para $\bar{p}_q \approx 11,2$ caso a função de demanda seja a original ou para $\bar{p}_x \approx 10,7$ caso a função de demanda tenha elasticidade-preço igual a 2. A área na figura à esquerda mostra a perda de excedente do consumidor associada à curva de demanda original e a área à direita, a perda de bem-estar do consumidor associada à curva de demanda mais preço-elástica. Claramente, o fato de a segunda curva de demanda ser menos inclinada que a primeira acarreta uma menor perda de bem-estar para os consumidores.

- ④ Falso. Basta ver que a elasticidade-preço da demanda é, em módulo, igual a 1,2⁶ é maior e não menor do que a elasticidade-preço da oferta, igual a

⁶Lembre-se que, caso a função de demanda tenha a forma $x = ap^e$, na qual x é a quantidade demandada, a elasticidade-preço da demanda é igual a e (usualmente, um número negativo). O mesmo se aplica à função de oferta: caso ela tenha a forma $y = bp^k$, em que y é a quantidade ofertada, sua elasticidade-preço é k .

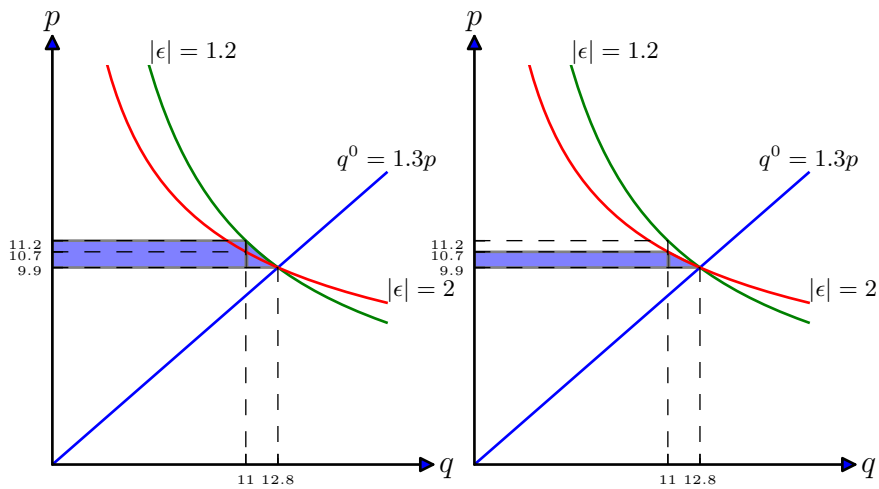


Figura 1: Perda de bem-estar do consumidor em consequência da introdução de uma cota máxima de produção de 11 unidades. À esquerda, supondo que a função de demanda tem elasticidade preço igual a 1,2 (curva de demanda verde) e, à direita, supondo que a curva de demanda tenha elasticidade-preço igual a 2 (curva de demanda vermelha).

1. Assim, ainda que a adoção de uma quota máxima de produção levasse a uma perda no excedente dos produtores superior à perda no excedente dos consumidores, isso não poderia ser consequência da elasticidade-preço da demanda ser inferior à elasticidade-preço da oferta.

QUESTÃO 7

Com relação à competição monopolística, indique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

- ① Uma das hipóteses do modelo de competição monopolística é a existência de barreiras à entrada e à saída significativas;
- ① No modelo convencional de competição monopolística a empresa apresenta lucros extraordinários no curto prazo;
- ② No longo prazo a empresa continua com poder de monopólio;
- ③ No longo prazo o preço de equilíbrio é maior do que o custo marginal;
- ④ No longo prazo as empresas não operam com excesso de capacidade.

Solução

- ① Falso. O modelo de concorrência monopolística pressupõe a inexistência de barreiras à entrada.
- ① Falso. Novamente, discordamos do gabarito. Estaria correto se o texto fosse “No modelo convencional de competição monopolística a empresa *pode* apresentar lucros extraordinários no curto prazo.” Porém, nada no modelo impede que exista uma situação de curto prazo no qual as empresas tenha lucro negativo ou nulo. De fato, quando o equilíbrio de longo prazo é atingido, o lucro, de curto e de longo prazo das empresas será nulo.
- ② Verdadeiro. Usualmente dizemos que uma empresa tem poder de monopólio quando cobra por seu produto um preço médio superior a seu custo marginal. Embora a empresa em concorrência monopolística tenha lucro de longo prazo nulo, isso se dá com um preço superior ao seu custo marginal.
- ③ Verdadeiro. Veja a resposta ao item anterior.
- ④ Falso. No equilíbrio de longo prazo, a empresa opera no ramo declinante de sua curva de custo médio de longo prazo e, portanto, também no ramo declinante da curva de custo médio de curto prazo associada à(s) quantidade(s) do(s) fator(es) fixo que ela emprega. Assim, ela está produzindo aquém de sua escala eficiente tanto de curto quanto de longo prazos. Produzir aquém da escala que minimiza o custo de curto prazo pode ser interpretado como produzir com excesso de capacidade.

QUESTÃO 8

Com relação à análise do equilíbrio geral e eficiência econômica, indique verdadeiro ou falso para as afirmações a seguir:

- ① Poder de mercado não é uma razão para falhas em mercados competitivos;
- ② A eficiência na produção exige que todas as alocações estejam situadas na curva de contrato;
- ③ Se as preferências dos indivíduos são convexas, então cada alocação eficiente é um equilíbrio competitivo para alguma alocação inicial de recursos;
- ④ Em uma Caixa de Edgeworth com dois insumos e duas mercadorias, o uso eficiente dos insumos ocorre quando as isoquantas para as duas mercadorias são tangentes;
- ⑤ A fronteira de possibilidades de produção é côncava porque a produtividade dos insumos diminui no bem cuja quantidade produzida aumentou e aumenta no bem cuja quantidade produzida diminuiu.

Solução

- ① Falso. Uma empresa com poder de mercado tende a produzir quantidade aquém da eficiente, pois vende seu produto a um preço superior a seu custo marginal de produção. Uma excessão seria o caso de discriminação perfeita de preços.
- ② Falso, se entendermos como eficiência na produção eficiência técnica, esta requer apenas que os fatores de produção sejam alocados na curva de contrato na produção, mas não é necessário que as alocações de consumo sejam alocadas sobre a curva de contrato no consumo.
- ③ Verdadeiro, em uma economia de trocas, caso as preferências dos consumidores sejam convexas, qualquer alocação eficiente é uma alocação de equilíbrio para um remanejamento adequado das dotações iniciais. Esse resultado é conhecido como “segundo teorema do bem-estar social”. Poder-se-ia fazer uma ressalva para esse exercício, pois no caso de um modelo de equilíbrio geral com produção, o segundo teorema do bem-estar social requer, além da convexidade das preferências, a convexidade dos conjuntos de produção.

- ③ O gabarito dá verdadeiro, mas, a rigor, isso só é verdadeiro caso as curvas de isoquanta sejam convexas em relação à origem. Caso contrário, é possível que um ponto de tangência entre duas curvas de isoquanta não corresponda necessariamente a uma alocação eficiente de insumos.
- ④ Falso. Mais uma vez, me vejo forçado a discordar do gabarito que considera o item verdadeiro. Todavia, no momento do exame, creio que esse item tem características que fazem com que a melhor estratégia seja deixá-lo em branco. Isso porque a frase é pouco clara em alguns aspectos. Um deles é o uso da expressão “produtividade dos insumos”. Ora o termo “produtividade” aplica-se aos conceitos de “produtividade marginal”, “produtividade média”, ou mesmo “produtividade total dos fatores”, conceito empregado na literatura sobre crescimento econômico. Se com “produtividade” o examinador que dizer “produtividade média” ou “produtividade marginal”, então não faz sentido falar em “produtividade dos insumos” visto que há uma produtividade média ou marginal diferente para cada insumo. Nesse caso, o item deveria ser reescrito como “A fronteira de possibilidades de produção é côncava porque a produtividade marginal [ou média] de cada um dos insumos diminui no bem cuja quantidade produzida aumentou e aumenta no bem cuja quantidade produzida diminuiu.” Um segundo problema é como devemos interpretar que para um bem “a quantidade produzida diminuiu” e, para outro bem, “a quantidade produzida aumentou”. Isso se refere a qualquer variação factível na produção dos dois bens ou apenas a variações sobre a fronteira de possibilidades de produção? Adicionalmente, tratam-se de variações específicas ou de qualquer variação possível? Essa falta de clareza no enunciado desse item torna muito provável que a interpretação que um candidato faça do mesmo seja diferente daquilo que o examinador quis dizer.

Feita essa ressalva, parece-me, que o significado que o examinador queria dar para essa frase vaga seria melhor capturado pela seguinte frase: “A fronteira de possibilidades de produção é côncava porque, para qualquer deslocamento sobre essa fronteira, para cada um dos insumos empregados na produção dos dois bens, sua produtividade marginal diminui na produção do bem cuja quantidade aumenta e aumenta no bem cuja quantidade diminui.”

Ainda assim, afirmação é falsa por duas razões: a primeira delas é que a fronteira de possibilidades de produção não é necessariamente côncava. A segunda delas é que, caso a fronteira de possibilidades de produção seja côncava, isso não é necessariamente decorrência do fato de que uma deslocamento sobre a mesma faça com que haja uma queda na produtividade marginal de cada fator empregado na produção dos dois bens na produção do bem cuja quantidade produzida aumentou e um aumento na produtividade marginal do mesmo fator no bem cuja quantidade produzida diminuiu.

Seguem três exemplos simples que ilustram que a fronteira de possibilida-

des de produção não é necessariamente côncava, exemplo a), e que, mesmo que a fronteira de possibilidades de produção seja côncava, não necessariamente, um deslocamento sobre a mesma implica, para cada um dos insumos empregado na produção dos dois bens, queda na produtividade marginal para o bem cuja quantidade produzida aumentou e elevação de produtividade marginal para o bem cuja quantidade produzida diminuiu, exemplos b) e c).

- a) Suponha uma economia com um único fator de produção e dois bens, o bem 1 e o bem 2. Sejam y_1 e y_2 as quantidades produzidas dos dois bens, x_1 e x_2 as quantidades empregadas dos dois fatores de produção nas produções dos bens 1 e 2, respectivamente e X a dotação inicial total dessa economia do único insumo de produção. Imagine também que as funções de produção sejam

$$y_1 = x_1^2$$

e

$$y_2 = x_2^2.$$

Como as duas funções de produção são crescentes, ao longo da fronteira de possibilidades de produção a dotação inicial do único insumo de produção deve ser completamente empregada na produção dos dois bens, isto é, $x_1 + x_2 = X$. Invertendo a primeira função de produção, ficamos com $x_1 = \sqrt{y_1}$ aplicando esse resultado conjuntamente com $x_1 + x_2 = X$ na segunda equação, ficamos com a expressão da fronteira de possibilidades de produção dessa economia:

$$y_2 = (X - \sqrt{y_1})^2.$$

Sendo que a fronteira de possibilidades de produção é descrita por essa expressão para níveis factíveis de y_1 , isto é $0 \leq y_1 \leq X^2$. Derivando essa expressão duas vezes em relação a y_1 ficamos com

$$\frac{d^2 y_2}{d y_1^2} = \frac{X - \frac{\sqrt{y_1}}{2}}{y_1}.$$

Essa expressão é positiva para qualquer y_1 factível e, portanto, a fronteira de possibilidades de produção é, nesse caso convexa.

- b) Considere uma economia semelhante à do exemplo anterior, mas com as seguintes funções de produção:

$$y_1 = x_1$$

e

$$y_2 = x_2.$$

Novamente, fazendo $x_1 + x_2 = X$, invertendo a primeira função de produção e substituindo na segunda função de produção, chega-se à seguinte expressão para a fronteira de possibilidades de produção:

$$y_2 = X - y_1.$$

Essa fronteira de possibilidades de produção é uma linha reta e, portanto, côncava, embora não estritamente côncava. Todavia, as produtividades marginais do fator de produção na produção de cada um dos bens não se altera quando ocorre um deslocamento sobre a fronteira de possibilidades de produção, vistos que tais produtividades marginais são constantes e iguais a 1.

- c) Finalmente, considere a mesma economia com as seguintes mudanças: a quantidade disponível do único fator de produção é $X = 10$ e as funções de produção são:

$$y_1 = \sqrt{x_1}$$

e

$$y_2 = 100x_2 + \frac{x_2^2}{10}.$$

Novamente, invertendo a primeira função de produção, usando $x_1 + x_2 = X = 10$ e substituindo na segunda função de produção, obtemos a seguinte expressão para a fronteira de possibilidades de produção:

$$y_2 = 100(10 - y_1^2) + \frac{(10 - y_1^2)^2}{10}.$$

Derivando duas vezes em relação a y_1 obtém-se

$$\frac{d^2 y_2}{d y_1^2} = -204 + \frac{6y_1^2}{5}.$$

Como o valor máximo para y_1 é $\sqrt{X} = \sqrt{10}$ e o valor mínimo é zero,

$$-204 \leq \frac{d^2 y_2}{d y_1^2} \leq -92.$$

Portanto, a fronteira de possibilidades de produção é côncava. Todavia, para qualquer deslocamento ao longo da fronteira de possibilidades de produção, a produtividade marginal do único insumo relativamente ao bem tem a mesma variação de sua produtividade marginal relativa ao bem 2. Para ver isso, note que a produtividade marginal do único insumo na produção do bem 1 é

$$PMg_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

e a produtividade marginal na produção do produto 2 quando calculada para um ponto sobre a fronteira de possibilidades de produção, no qual $x_1 + x_2 = 10$ é

$$PMg_2 = 100 + \frac{x_2}{5} = 98 + \frac{-x_1}{5}.$$

Um deslocamento ao longo da fronteira de possibilidades de produção com aumento na produção do bem 1 e redução na produção do bem 2 ocorre quando x_1 aumenta. Nesse caso, tanto a produtividade marginal na produção do bem 1, o bem cuja quantidade produzida aumentou, quanto a produtividade marginal na produção do bem 2, o bem cuja quantidade produzida diminuiu, decrescem. Inversamente, caso x_1 diminua e x_2 aumente de modo a manter $x_1 + x_2 = 10$, haverá um deslocamento para a esquerda sobre a fronteira de possibilidades de produção com aumento na produção do bem 2 e redução na produção do bem 1, mas tanto a produtividade marginal na produção do bem cuja quantidade aumentou, o bem 2, quanto a produtividade marginal na produção do bem cuja quantidade diminuiu, o bem 1, aumentam.

QUESTÃO 9

Suponha uma fronteira de possibilidade de produção para os bens X e Y que é representada pela equação $X^2 + 4Y^2 = 100$. Considere ainda que é possível definir uma função utilidade da coletividade dada por $U(X, Y) = \sqrt{XY}$. Nessas condições é adequado afirmar:

- ① Em mercados competitivos o ponto de lucro máximo ocorre quando as firmas igualam os custos marginais relativos aos preços relativos (P_X, P_Y);
- ② Nessa economia a quantidade de X no equilíbrio será $X^2 = 4Y^2$;
- ③ A razão de preços de equilíbrio será de $\frac{P_X}{P_Y} = \frac{1}{3}$;
- ④ os níveis de produção de equilíbrio dos dois bens é dado por $X^* = 7,07$ e $Y^* = 3,54$;
- ⑤ Se uma mudança repentina muda o formato da função utilidade da comunidade para $U(X, Y) = X^{3/4}Y^{1/4}$, induziria um aumento no preço do bem Y.

Solução

- ① Falso, embora o gabarito dê Verdadeiro. É verdade que, com exceção dos casos em que uma firma maximiza seu lucro ao não produzir nada ou em, em virtude de uma possível não diferenciabilidade da função de custo, o custo marginal não é definido, as empresas tomadoras de preço, ao maximizarem seus lucros igualam o custo marginal de produção de um produto a seu preço marginal. Assim, denotando por p_x e p_y os preços dos bens x e y, respectivamente, e por CMg_x e CMg_y os custos marginais de produção desses dois produtos, quando maximizam seus lucros, as empresas fazem

$$CMg_x = p_x$$

e

$$CMg_y = p_y.$$

Na hipótese de que os dois custos marginais e os dois preços sejam positivos, é possível dividir uma igualdade pela outra, obtendo-se a igualdade entre preço e custo marginal relativos.

Todavia, essa igualdade pode ser obtida também fora do ponto de lucro máximo. Por exemplo, se a produção de x e y é elevada até o ponto em que os

custos marginais de produção de cada um dos bens seja igual ao dobro do preço desse bem, embora as empresas não estejam mais operando com lucro máximo, ainda assim, há igualdade entre preço relativo e custo marginal relativo. Portanto, nem sempre que as firmas igualam custos marginais relativos a preços relativos, ocorre uma situação de lucro máximo.

- ① Verdadeiro. Mais um item complicado. Para chegarmos ao gabarito devemos interpretar que o examinador queria dizer “Nessa economia as quantidades de X e Y no equilíbrio serão tais que $X^2 = 4Y^2$. A candidadta ou o candidato não tinha nenhuma obrigação de fazer tal interpretação. Feita essa ressalva, o item é verdadeiro.

Assumiremos que a “função de utilidade da coletividade” é uma função de utilidade de um consumidor representativo dessa economia. Nesse caso, as quantidades produzidas dos dois bens no equilíbrio geral dessa economia serão aquelas correspondentes ao ponto sobre a fronteira de possibilidades de produção no qual a taxa marginal de transformação se iguala, em módulo, ao preço relativo ao qual também se iguala, em módulo, a taxa marginal de substituição. Assim, no equilíbrio geral dessa economia deveremos ter a igualdade entre a taxa marginal de substituição e a taxa marginal de transformação.

A taxa marginal de substituição é dada por

$$TMS = -\frac{\frac{\partial \sqrt{XY}}{\partial X}}{\frac{\partial \sqrt{XY}}{\partial Y}} = -\frac{Y}{X}.$$

A taxa marginal de transformação pode ser obtida usando-se o teorema da função implícita para calcular dy/dx a partir da expressão que descreve a fronteira de possibilidades de produção:

$$\frac{d}{dX}(X^2 + 4Y^2) = \frac{d}{dX}(100) \Rightarrow 2X + 8Y \frac{dY}{dX} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{X}{4Y}.$$

Igualando a taxa marginal de substituição à taxa marginal de transformação, obtemos, então

$$-\frac{Y}{X} = -\frac{X}{4Y} \Rightarrow X^2 = 4Y^2$$

- ② Falso. No equilíbrio, o preço relativo é igual ao módulo da taxa marginal de substituição. Vimos que esta é igual a $-Y/X$. Adicionalmente, no item anterior, vimos que, no equilíbrio, $X^2 = 4Y^2$, ou seja $X = 2Y$. Substituindo esse resultado na fórmula da taxa marginal de substituição, obtemos:

$$\frac{p_x}{p_y} = |TMS| = \frac{Y}{X} = \frac{Y}{2Y} = \frac{1}{2}.$$

- ③ Verdadeiro, desde que consideremos os valores como valores aproximados. Vimos que, no equilíbrio devemos ter $X = 2Y$. Adicionalmente, a produção

de equilíbrio deve estar sobre a fronteira de possibilidades de produção, isto é, $X^2 + 4Y^2 = 100$. Substituindo a primeira equação na segunda vem

$$2X^2 = 100 \Rightarrow X = \sqrt{50} \approx 7,07.$$

Combinando esse resultado com $X = 2Y$, chegamos a

$$Y = \frac{\sqrt{50}}{2} \approx 3,54.$$

O cálculo dos valores aproximados pode ser feito sem o auxílio de uma calculadora caso lembremos que $\sqrt{2} \approx 1,414$ e notemos que

$$\sqrt{50} = \sqrt{\frac{100}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx \frac{10}{1,414} \approx 7,07.$$

- ④ Falso, embora o gabarito considere verdadeiro. Com a nova função de utilidade, a taxa marginal de substituição passa a ser:

$$TMS = -\frac{\frac{\partial \sqrt{X^{3/4} Y^{1/4}}}{\partial X}}{\frac{\partial \sqrt{X^{3/4} Y^{1/4}}}{\partial Y}} = -3 \frac{Y}{X}.$$

A condição de igualdade entre taxa marginal de substituição e taxa marginal de transformação passa a ser então

$$-3 \frac{Y}{X} = -\frac{X}{4Y}.$$

Isso implica $X = 2\sqrt{3}Y$. Substituindo no módulo da taxa marginal de substituição, encontramos o novo preço relativo de equilíbrio:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esse valor é superior ao antigo preço relativo (1/2) e indica que o preço do bem y caiu em relação ao preço do bem x .

QUESTÃO 10

Com relação à teoria dos bens públicos, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

- ① Para determinar o nível eficiente de oferta de um bem público é necessário igualar a soma dos benefícios marginais dos usuários do bem público ao custo marginal de sua produção;
- ② Um bem é não exclusivo quando as pessoas não podem ser impedidas de consumi-lo;
- ③ Um bem é dito não disputável ou não rival quando para qualquer nível de produção o custo marginal de se atender um consumidor adicional é zero;
- ④ Um carona é um indivíduo que não paga por um bem não disputável ou não rival, na expectativa de que outros o façam;
- ⑤ O uso do imposto de Clarke para determinar a oferta de bens públicos exige preferências quase lineares.

Solução

- ① Verdadeiro. Essa é, efetivamente a condição necessária para a provisão eficiente do bem público.
- ② Verdadeiro. Um bem é não exclusivo ou não excludente quando ou não é possível impedir que as pessoas tenham acesso a seu consumo ou é muito caro fazê-lo.
- ③ Verdadeiro. Caso um bem seja não rival, dada a quantidade existente desse bem, a inclusão de um consumidor adicional não implicará aumento no custo de produção, pois sua quantidade é dada, nem perda de bem estar (que poderia ser pensada como um custo) dos outros consumidores, exatamente por se tratar de um bem de consumo não rival.
- ④ Falso. Para que o indivíduo seja caracterizado como carona, é preciso que os outros efetivamente paguem pelo bem não rival. Além disso, se o bem for não rival e excludente, não haverá caronas, pois será possível fazer com que quem não tenha pago pelo bem não tenha acesso a ele.
- ⑤ Verdadeiro. Para que o mecanismo de Clarke funcione, levando à escolha ótima da quantidade ofertada do bem público, é preciso que a disposição a pagar por este não seja afetada pelo valor do imposto pago. Para que isso ocorra, precisamos pressupor preferências quase-lineares.

QUESTÃO 11

Com relação a externalidades é possível afirmar:

- ① A quantidade de externalidades gerada na solução eficiente independe da definição e distribuição dos direitos de propriedade na sociedade;
- ② Se a curva de indiferença dos indivíduos assume a forma $x_2 = k - v(x_1)$, então toda solução eficiente terá a mesma quantidade de externalidades;
- ③ Segundo Coase, a quantidade eficiente de um determinado bem, na presença de externalidades, independe, em alguns casos, da distribuição dos direitos de propriedade entre os indivíduos;
- ④ Mesmo numa situação na qual os custos privados e os custos sociais são distintos a solução de mercado alcança eficiência no sentido de Pareto;
- ⑤ Do ponto de vista social a produção de externalidades negativas deveria ter preço positivo.

Solução

- ① Falso. Salvo em casos especiais, como no modelo de externalidades envolvendo duas empresas, a alocação eficiente atingida após a definição dos direitos de propriedade e a livre negociação entre os agentes depende de como foram distribuídos os direitos de propriedade.
- ② O item deveria ter sido anulado pois não provê as informações necessárias para que o candidato possa avaliá-lo com segurança. Em especial, não é informado o consumo de qual bem está relacionado à geração de externalidade. Ao contrário, como os dois consumidores têm as mesmas curvas de indiferença, aparentemente, não há nenhum consumo envolvendo externalidades. Se for esse o caso, a resposta do gabarito está correta, pois, não havendo externalidades, a solução eficiente envolveria zero de externalidades para qualquer alocação eficiente.

Ao que parece, todavia, a intenção do examinador era escrever algo como: “Suponha uma economia com dois indivíduos denominados A e B na qual os dois possuem uma dotação inicial de um bem privado denominado x_2 e o consumidor A pode consumir um bem x_1 até o limite \bar{x}_1 gerando uma externalidade negativa para o consumidor B . As curvas de indiferença do consumidor A tem a forma $x_2^A = k - v(x_1^A)$ na qual k é nível de utilidade de A e x_1^A e x_2^A são as quantidades que ele consome dos bens x_1 e x_2 respectivamente. As curvas de indiferença do consumidor B têm a forma $x_2^B = k - v(x_1^B)$ nas

quais k é o nível de utilidade de B , $x_1^B = \bar{x}_1 - x_1^A$ a quantidade do bem x_1 não consumida por A e x_2^A é a quantidade consumida do bem x_2 por parte do consumidor A . Nessa economia, toda alocação eficiente terá a mesma quantidade de externalidade.” Nesse caso, como as preferências são quase lineares, as alocações eficientes interiores à caixa de Edgeworth corresponderão a uma linha reta vertical caso a quantidade consumida do bem x_1 seja representada no eixo horizontal e a quantidade consumida do bem x_2 , no eixo vertical. Porém isso só é verdade para as soluções interiores. Para as alocações eficientes no “canto” da caixa de Edgeworth, o consumo de x_1 por parte do consumidor A varia. Assim, quando desconsideramos a possibilidade de soluções de canto, é verdade que “toda solução eficiente terá a mesma quantidade de externalidades”, porém, quando as soluções de canto são consideradas (e por quê não deveriam ser?), isso deixa de ser verdade.

- ② Verdadeiro. Em seu famoso artigo sobre externalidades, Coase 1960 dá exemplos de situações nas quais a quantidade eficiente do uso de determinado bem envolvendo externalidade obtida após a negociação sem custo de transação entre as partes não é afetada pela distribuição dos direitos de propriedade entre os indivíduos.
- ③ Falso. Uma condição essencial para se ter a garantia de que a alocação de mercado seja eficiente é que os custos privados de uma atividade de consumo ou produção reflitam *todos* os custos sociais dessa atividade.
- ④ Falso. A produção de uma externalidade negativa deveria ter um preço negativo, isto é, o produtor dessa externalidade deveria pagar para produzi-la.

QUESTÃO 12

Considere a teoria da informação assimétrica ao indicar quais entre as afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

- ① O problema da seleção adversa é um problema de ação oculta;
- ② O perigo moral é um problema de informação oculta;
- ③ Mercados com informação oculta envolvem algum tipo de racionamento;
- ④ Em um mercado com assimetrias de informação sobre a qualidade dos produtos a garantia dos produtos oferecida por vendedores é um mecanismo de sinalização;
- ⑤ O investimento em sinais é sempre eficiente do ponto de vista público, mas um desperdício do ponto de vista privado.

Solução

- ① Falso. O problema da seleção adversa ocorre quando uma das partes de uma transação não é capaz de identificar o tipo de outra parte. Trata-se portanto de um fenômeno ligado a situações em que há *tipo oculto* ou informação oculta e não ação oculta.
- ② Falso. Problemas de *moral hazard* ocorrem quando uma das partes não é capaz de observar as ações da outra parte. Tais problemas são relacionados a situações em que há *ação oculta*.
- ③ O gabarito dá Verdadeiro, mas eu considero falso. De fato, como o item é muito vago, é uma ótima ideia deixá-lo em branco. De acordo com Peter Neary 2008, “racionamento refere-se a qualquer situação na qual agentes econômicos se defrontam com restrições de quantidade em sua demanda por ou oferta de uma mercadoria particular, contrariamente à situação padrão na qual eles são livres para comprar quantidades ilimitadas sujeitos apenas a preços fixos e restrição orçamentária linear.”⁷ Tipicamente, os mercados com informações ocultas não implicam qualquer tipo de restrição quantitativa. Talvez o examinador queira referir-se a situações como as

⁷Esse é o uso corriqueiro que se dá ao termo “racionamento” na literatura econômica. Qualquer extensão desse conceito deve ser esclarecida. Por exemplo, Varian 2012 usa a afirmação que “o equilíbrio num mercado em que haja ação oculta [não informação oculta] tipicamente envolve alguma forma de racionamento” (p. 766, o texto entre colchetes é meu comentário) e explica o que quer dizer com isso na sequência: “as empresas gostariam de prover mais do que o fazem mas não estão dispostas a fazê-lo porque isso alterará os incentivos de seus clientes.”

descritas por Stiglitz e Weiss 1981 em que, em decorrência de problemas de tipo oculto e de moral hazard, bancos oferecem empréstimos a uma taxa de juros abaixo daquela que igualaria quantidades ofertada e demandada no mercado de crédito, racionando a oferta do mesmo. Todavia, esse resultado não é uma regra geral para modelos de informação assimétrica.

- ③ Verdade. O oferecimento de garantias pode ser um sinal escolhido pelos detentores de produtos de boa qualidade caso não valha a pena para os vendedores de produtos de má qualidade oferecerem a mesma garantia, mesmo que com isso consigam um preço mais elevado por seu produto.
- ④ Falso. O investimento em sinais pode gerar ganho privado, sem gerar benefício social algum. Considere por exemplo um mercado de automóveis usados no qual todos os compradores são iguais e, embora haja automóveis de diferentes qualidades, a quantidade de automóveis ruins é pequena o bastante para evitar o fenômeno da seleção adversa. Nesse mercado, o equilíbrio sem sinalização é eficiente. A introdução de um mecanismo de sinalização que implique algum custo para os ofertantes dos bons automóveis, pode melhorar o bem-estar destes por viabilizar a venda de seus veículos a um preço mais elevado, mas não produz qualquer valor social. Portanto, nesse caso, como o uso do mecanismo de sinalização implica um custo, do ponto de vista social, há perda de bem-estar.

QUESTÃO 13

Duas empresas estão decidindo se adotam campanhas publicitárias agressivas, em que buscam roubar clientes da concorrente, ou moderadas, em que apenas divulgam seus produtos. Suas recompensas se encontram descritas no jogo abaixo:

		Empresa B	
		Campanha Agressiva	Campanha Moderada
Empresa A	Campanha Agressiva	−100, −100	10, −10
	Campanha Moderada	−10, 10	0, 0

Com relação ao jogo acima, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

- Ⓐ Trata-se de um jogo estritamente competitivo;
- Ⓑ No equilíbrio em estratégias mistas, a empresa B faz campanha agressiva com 10% de probabilidade;
- Ⓒ Há dois equilíbrios em estratégias puras;
- Ⓓ Não há nenhum equilíbrio em estratégias mistas;
- Ⓔ A recompensa esperada da empresa B é -1 .

Solução

- Ⓐ Falso. Jogos estritamente competitivos ou jogos de soma zero são jogos de dois jogadores nos quais o payoff de cada jogador é tanto maior quanto menor o payoff do outro jogador. Assim, nesses jogos o payoff de um jogador é máximo quando o payoff do outro jogador é mínimo. Isso claramente não acontece nesse jogo, pois quanto o payoff da empresa B é mínimo (quando as duas empresas escolhem campanha agressiva) o payoff da empresa A também é mínimo.
- Ⓑ Verdadeiro. No equilíbrio em estratégias mistas, a empresa B deve escolher jogar Campanha Agressiva com uma probabilidade tal que o ganho esperado da empresa A jogando Campanha Agressiva seja igual ao seu ganho esperado quando joga Campanha Moderada. Assim chamando de π_B a probabilidade com a qual a empresa B escolhe Campanha Agressiva, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas devemos ter:

$$-100\pi_b + 10(1 - \pi_b) = -10\pi_b$$

sendo que o lado direito dessa equação representa o ganho esperado da empresa A quando joga Campanha Agressiva e o lado esquerdo, esse ganho esperado quando A joga Campanha Moderada. Resolvendo essa equação, obtemos $\pi_B = 0,1 = 10\%$.

- ② Verdadeiro. Esses equilíbrios são (Campanha Agressiva, Campanha Moderada) e (Campanha Moderada, Campanha Agressiva). Nos dois casos, não é possível para qualquer empresa melhorar o seu payoff mudando unilateralmente sua estratégia.
- ③ Falso. Vimos na resposta ao item 1 que caso a empresa B escolha jogar Campanha Agressiva com probabilidade de 10%, a empresa A terá o mesmo payoff esperado independentemente de jogar Campanha Agressiva ou Campanha Moderada. Consequentemente, ao misturar essas duas estratégias, o ganho esperado de A também deve permanecer inalterado. Sendo o jogo simétrico, resultado similar deve valer para a empresa B caso a empresa A jogue Campanha Agressiva com 10% de probabilidade. Assim, quando as duas jogam Campanha Agressiva com 10% de probabilidade, nenhuma pode melhorar seu payoff esperado mudando sua estratégia e, portanto ocorre um equilíbrio de Nash.
- ④ Verdadeiro caso a afirmação se refira ao equilíbrio em estratégias mistas. Nesse equilíbrio, conforme vimos, a empresa A joga Campanha Agressiva com probabilidade de 10%, o mesmo ocorrendo com a empresa B . Assim, o ganho esperado da empresa B será a média ponderada entre seu ganho esperado quando joga Campanha Agressiva ($0,1 \times (-100) + 0,9 \times 10 = -1$) e seu ganho esperado quando joga Campanha Moderada ($0,1 \times (-10) + 0,1 \times 0 = -1$), ou seja, uma média entre -1 e -1 que, evidentemente, será igual a -1 .

QUESTÃO 14

Considere um modelo de Bertrand com diferenciação de produtos e duas empresas. A demanda da empresa 1 é dada por $q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$ e a demanda da empresa 2 é dada por $q_2 = 100 - 2p_2 + p_1$, sendo p_1 o preço do produto da empresa 1 e p_2 o preço do produto da empresa 2. Suponha que o custo total da empresa 1 seja $C_1 = q_1$ e o custo total da empresa 2 seja $C_2 = q_2$. Determine o preço ao qual a empresa 1 irá vender o seu produto.

Solução

Quaisquer que sejam p_1 e p_2 , o lucro da empresa 1 será dado por

$$\pi_1 = q_1 \times p_1 - q_1 = (100 - 2p_1 + p_2)p_1 - (100 - 2p_1 + p_2),$$

e o lucro da empresa 2 será dado por

$$\pi_2 = q_2 \times p_2 - q_2 = (100 - 2p_2 + p_1)p_2 - (100 - 2p_2 + p_1).$$

No equilíbrio de Nash/Bertrand, cada empresa escolhe um preço que maximiza seu lucro dado o preço praticado pela outra empresa. Nesse caso, devem valer as condições necessárias de lucro máximo

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow 102 - 4p_1 + p_2 = 0$$

e

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0 \Rightarrow 102 - 4p_2 + p_1 = 0.$$

Os preços praticados nesse equilíbrio são os que resolvem o sistema formado por essas duas equações:

$$p_1 = p_2 = 34.$$

Assim o preço ao qual a empresa 1 vende seu produto no equilíbrio de Bertrand é 34.

QUESTÃO 15

Suponha que em uma região de florestas com madeiras nobres foi concedido livre acesso à extração da madeira. Suponha que o preço do metro cúbico de madeira é \$1, e que a produção de madeira em metros cúbicos pode ser expressa como $f(n) = 40n - 2n^2$, em que n é o número de madeireiros que se dedicam à extração. Suponha que o custo da serra e demais ferramentas de cada madeireiro seja de \$ 4. Calcule a diferença entre o número efetivo de madeireiros e o número ótimo.

Solução

O número ótimo de madeireiros é aquele que maximiza o excedente gerado pela atividade, ou seja, a diferença entre o valor da madeira extraída, $1 \times (40n - 2n^2)$, e o custo da extração, $4n$. Isso ocorre quando esses dois valores são igualados na margem. Assim, chamando de \tilde{n}^* o número ótimo de madeireiros, esse número deve ser tal que

$$\frac{d}{dn}(40n^* - 2n^{*2}) = \frac{d}{dn}(4n^*) \Rightarrow 40 - 4n^* = 4 \Rightarrow n^* = 9.$$

O número efetivo de madeireiros será aquele que iguala a produtividade média do madeireiro a seu custo marginal. Assim chamando de \tilde{n} esse número efetivo, temos

$$\frac{40\tilde{n} - 2\tilde{n}^2}{\tilde{n}} = \frac{d}{dn}(4n^*) \Rightarrow 40 - 2\tilde{n} \Rightarrow \tilde{n} = 18.$$

Desse modo a diferença entre o número efetivo e o número ótimo de madeireiros é

$$\tilde{n} - n^* = 18 - 9 = 9.$$

A O sistema linear de dispêndio

Imagine que se queira estimar os parâmetros das demandas por dois bens, x e y , tendo por base a as seguintes formas específicas para as funções de demanda:

$$x_1(p_1, p_2, m) = a_1 + b_1 \frac{p_2}{p_1} + c_1 \frac{m}{p_1} \quad (18)$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = a_2 + b_2 \frac{p_2}{p_1} + c_2 \frac{m}{p_2} \quad (19)$$

nas quais $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são parâmetros a serem estimados. Caso se assuma que o consumo dos dois bens exaure a renda do consumidor, ou considere-se m como o dispêndio com a aquisição dos dois bens, então deveremos ter

$$p_1 x_1(p_1, p_2, m) + p_2 x_2(p_1, p_2, m) = m$$

ou ainda,

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m - p_1 x_1(p_1, p_2, m)}{p_2} = -b_1 - a_1 \frac{p_1}{p_2} + (1 - c_1) \frac{m}{p_2} \quad (20)$$

Ou seja, $a_2 = -b_1, b_2 = -a_1$ e $c_2 = 1 - c_1$. Com algumas manipulações algébricas, é possível transformar as expressões (18) e (20) em

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{a_1}{1 - c_1} + \frac{c_1}{p_1} \left(m - p_1 \frac{a_1}{1 - c_1} + p_2 \frac{b_1}{c_1} \right) \quad (21)$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = -\frac{b_1}{c_1} + \frac{1 - c_1}{p_2} \left(m - p_1 \frac{a_1}{1 - c_1} + p_2 \frac{b_1}{c_1} \right) \quad (22)$$

Façamos agora $\bar{x}_1 = a_1/(1 - c_1), \bar{x}_2 = -b_1/c_1$ e $\beta = c_1$. Com isso, as equações (21) e (22) assumem a forma

$$x_1(p_1, p_2, m) = \bar{x}_1 + \frac{\beta}{p_1} (m - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) \quad (23)$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = \bar{x}_2 + \frac{1 - \beta}{p_2} (m - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) \quad (24)$$

Esse modelo de demanda é conhecido como “sistema de despesas linear” e é empregado principalmente em estudos empíricos. Todavia, sem o acréscimo de algumas restrições adicionais, ele não é inteiramente compatível com a teoria do consumidor. Para ver isso, calculemos o efeito substituição para o bem x_1 empregando a equação de Slutsky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1 &= -\frac{\beta}{p_1^2} (m - p_2 \bar{x}_2) + \frac{\beta}{p_1} \left[\bar{x}_1 + \frac{\beta}{p_1} (m - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) \right] \\ &= -\frac{\beta(1 - \beta)}{p_1^2} (m - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2). \end{aligned}$$

De acordo com a teoria do consumidor, esse efeito deve ser não positivo. Para que isso ocorra, é necessário assumir que ou $0 \leq \beta \leq 1$ e $m \geq p_2 x_2 + p_1 x_1$ ou que $\beta \notin$

$[0, 1]$ e $m \leq p_2 x_2 + p_1 x_1$. Usualmente, assume-se que $0 \leq \beta \leq 1$ e que o consumidor consome sempre $x_1 \geq \bar{x}_1$ e $x_2 \geq \bar{x}_2$, o que só é possível caso $m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2$. Essa última hipótese é inofensiva para o caso em que \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são negativos, pois, nesse caso, quaisquer valores não negativos de x_1 e x_2 estarão em conformidade com ela. Porém, caso \bar{x}_1 e \bar{x}_2 sejam quantidade positivas, a restrição só será atendida com um nível mínimo de dispêndio. Isso implica uma pressuposição implícita de que a renda do consumidor seja compatível com esse nível mínimo.

Racionalizando o sistema linear de dispêndio.

Assumamos que $0 \leq \beta \leq 1$. Nesse caso, as equações de demanda desse sistema são, conforme vimos, compatíveis com a teoria do consumidor para $m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2$, o que significa que há uma função de utilidade que geraria, para esses níveis de renda exatamente as mesmas funções de demanda. Conforme vimos na resposta ao item ② da questão 1, a função

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - \bar{x}_1)^\beta (x_2 - \bar{x}_2)^{1-\beta} \quad (25)$$

é uma candidata, pois para valores de m suficientemente elevados, as funções de demanda são as descritas pelas equações 23 e 24, ou seja as funções de demanda do sistema linear de dispêndio.⁸ Todavia, essa função de utilidade não racionaliza perfeitamente o sistema linear de demanda pois a) nos casos em que β é um número irracional ou β é racional com forma reduzida com denominador par, a função não é definida para $x_1 < \bar{x}_1$ ou para $x_2 \leq \bar{x}_2$ ou ambos, b) a função não é definida no ponto (\bar{x}_1, \bar{x}_2) caso β seja um inteiro negativo ou maior do que 1, c) mesmo que β seja um número racional com denominador ímpar, e que $m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2$, a demanda do consumidor pode não ser a descrita pelas equações 23 e 24, pois há a possibilidade, para níveis de renda não muito elevados, de que a cesta que maximiza a utilidade do consumidor seja uma cesta com consumo nulo de um dos bens (solução de canto).

Essa última ressalva decorre do fato de que a função de utilidade 25 é mal comportada mesmo que β seja um número racional entre zero e 1 com forma reduzida com denominador ímpar. A Figura 2 ilustra esse fato. Nela são descritas as curvas de indiferença da função de utilidade 25 para o caso em que $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$ e $\beta = 1/3$. A figura teve sua superfície colorida de modo que áreas com cores mais quentes correspondem a áreas nas quais o valor da função de utilidade é mais elevado e áreas com cores mais frias correspondem a áreas nas quais o valor da função de utilidade é mais baixo, conforme é indicado na barra de cores à direita.

Embora, nesse caso, a função de utilidade seja definida para quaisquer valores de x_1 e x_2 , ela é quase-convexa caso $x_1 < \bar{x}_1$ e $x_2 < \bar{x}_2$ e x_2 é (localmente) um mal, caso $x_1 < \bar{x}_1$ e $x_2 > \bar{x}_2$ ou $x_1 > \bar{x}_1$ e $x_2 < \bar{x}_2$. Tais curvas de indiferença acabam fazendo com que, mesmo que $m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2$, de tal sorte que haja uma cesta de bens com quantidades positivas de x_1 e x_2 que maximize localmente a função

⁸É preciso fazer, todavia, alguns ajustes de notação. Em nossa resposta ao item ② da questão 1, α equivale ao que aqui notamos por β , β equivale ao que aqui notamos por $1 - \beta$, x equivale a x_1 , y equivale a x_2 , x_0 equivale a \bar{x}_1 , y_0 equivale a \bar{x}_2 , p_x equivale a p_1 e p_y equivale a p_2 .

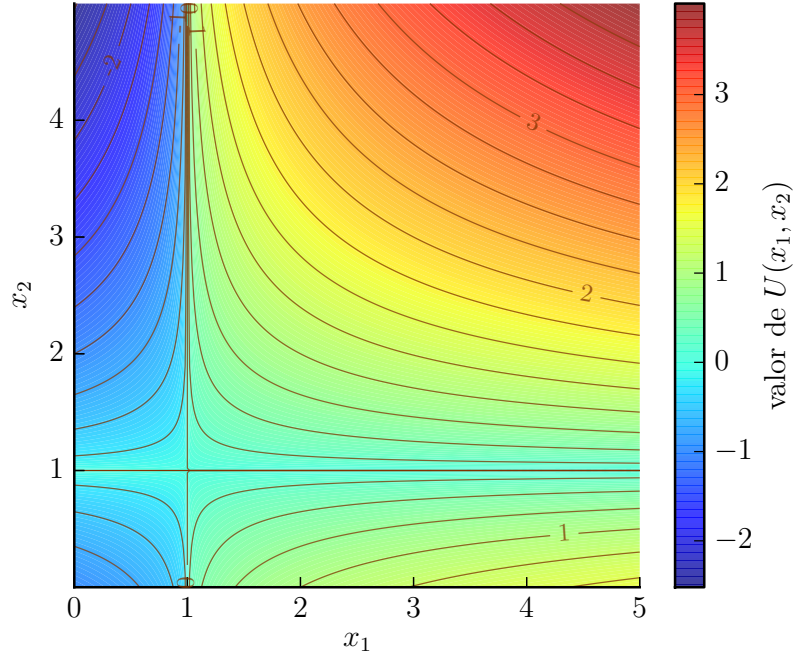


Figura 2: Curvas de nível da função $U(x_1, x_2) = (x_1 - \bar{x}_1)^\beta (x_2 - \bar{x}_2)^{1-\beta}$ com $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$ e $\beta = 1/3$.

de utilidade do consumidor, ainda assim, desde que m não seja suficientemente elevada, a cesta de bens que maximiza globalmente a função de utilidade do consumidor seja uma cesta de bens com consumo exclusivo do bem 1.

A Figura 3 ilustra o caso em que $\beta = 1/3$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$, $p_1 = p_2 = 1$ e $m = 3$. Nesse caso, o ponto $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$, é obtido pela aplicação das funções de demanda (23) e (24), é um ponto de utilidade máxima local no qual o valor da função de utilidade é de

$$\left(\frac{1}{3} - 1\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{3} - 1\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \approx 0,53.$$

Porém, quando o consumidor especializa-se no consumo do bem 1, adquirindo a cesta $(3, 0)$, ele consegue atingir uma curva de indiferença mais elevada, obtendo a utilidade máxima condicionada global de

$$(3 - 1)^{\frac{1}{3}} (0 - 1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$$

Duas estratégias podem evitar esse tipo de solução de canto. A primeira delas, usualmente empregada, consiste em simplesmente proibir esse tipo de solução de canto, assumindo-se que o consumidor, se sua renda permitir, jamais escolheria uma cesta de bens com $x_1 < \bar{x}_1$ ou $x_2 < \bar{x}_2$. Volto a enfatizar que é preciso fazer

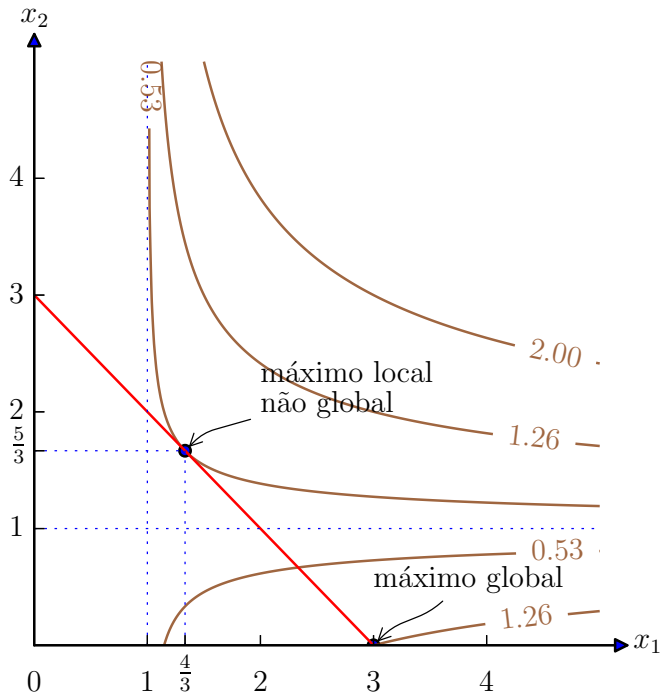


Figura 3: Caso $m = 3$, o consumidor com função de utilidade $U(x_1, x_2) = (x_1 - \bar{x}_1)^\beta (x_2 - \bar{x}_2)^{1-\beta}$ com $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$ e $\beta = 2/3$ maximiza sua utilidade consumindo apenas o bem 1.

essa hipótese. Ela não deriva automaticamente da função de utilidade (25). A segunda alternativa seria alterar a função de utilidade para valores de $x_1 < \bar{x}_1$ e/ ou $x_2 < \bar{x}_2$, de modo a torná-la mais bem comportada. Por exemplo, redefinamos a função de utilidade (25) para

$$U(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 - \bar{x}_1)^\beta (x_2 - \bar{x}_2)^\alpha & \text{caso } x_1 \geq \bar{x}_1 \text{ e } x_2 \geq \bar{x}_2 \\ \min \left\{ \frac{x_1}{\bar{x}_1}, \frac{x_2}{\bar{x}_2} \right\} - 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (26)$$

Com essa nova função, os dois bens se comportarão como complementares perfeitos caso $x_1 < \bar{x}_1$ e/ ou $x_2 < \bar{x}_2$, de tal modo que as preferências passam a ser convexas e fracamente monotônicas em todo o conjunto de consumo. A Figura 4 mostra o formato dessas curvas de indiferença para o caso em que $\beta = 1/3$. Além disso ela mostra a solução de maximização de utilidade para um consumidor com essa função de utilidade e renda $m = 3$ que se depara com os preços $p_1 = p_2 = 1$. Percebe-se que, diferentemente, do que se observa na Figura 3, o equilíbrio se dá em um ponto interior.

Supondo-se $0 < \beta < 1$, as funções de demanda passam a ser

$$x_1 = \begin{cases} \bar{x}_1 + \frac{\beta}{p_1}(m - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) & \text{caso } m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \frac{m}{p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2} & \end{cases} \quad (27)$$

e

$$x_2 = \begin{cases} \bar{x}_2 + \frac{\beta}{p_2}(m - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) & \text{caso } m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 \frac{m}{p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2} & \end{cases} \quad (28)$$

Esse sistema de demanda coincide com sistema linear de dispêndio caso $m \geq p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2$, e gera funções de demanda compatíveis com a teoria do consumidor para outros valores de m . Portanto, a função de utilidade (26) é preferível para racionalizar o sistema linear de dispêndio.

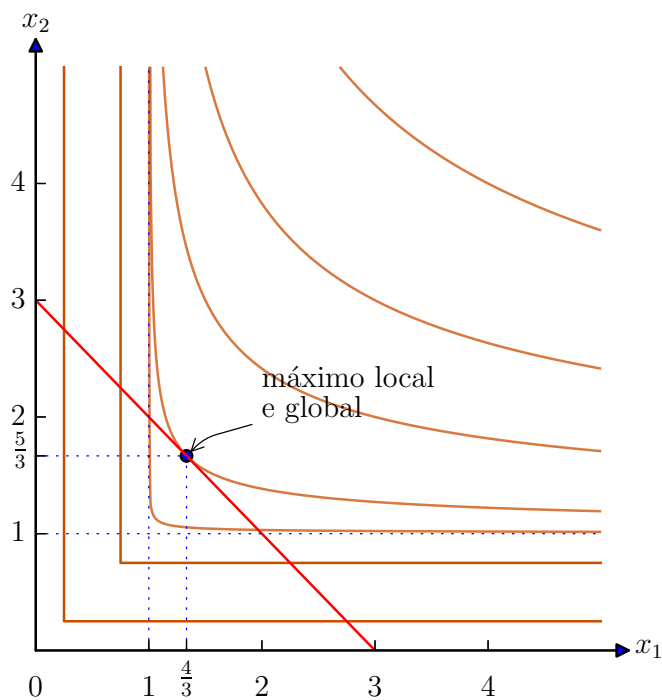


Figura 4: Curvas de nível da função e solução de maximização de lucro para uma função de utilidade tal qual descrita em 26 com $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$ e $\beta = 1/3$, e equilíbrio do consumidor quando $m = 3$, e $p_1 = p_2 = 1$.

Referências

- Coase, Ronald. 1960. "The Problem of Social Cost". *The Journal of Law and Economics* 3 (1): 1+. <http://sws.bu.edu/smhoran/coase.pdf>.
- Mas-Collel, Andrew, D. Whinston Michael e Jerry R. Green. 1995. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- Peter Neary, J. 2008. "rationing". Em *The New Palgrave Dictionary of Economics*, editado por Steven N. Durlauf e Lawrence E. Blume. Basingstoke: Palgrave Macmillan. http://www.dictionaryofeconomics.com/article?id=pde2008_R000034&edition=current&q=rationing&topicid=&result_number=2&authstatuscode=202.
- Samuelson, P. A. 1947. "Some Implications of "Linearity."". *The Review of Economic Studies* 15 (2): 88–90. ISSN: 00346527. <http://www.jstor.org/stable/2295997>.
- Stiglitz, Joseph E., e Andrew Weiss. 1981. "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information" [**inlang**English]. *The American Economic Review* 71 (3): 393–410. ISSN: 00028282. <http://www.jstor.org/stable/1802787>.
- Stone, Richard. 1954. "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand". *The Economic Journal* 64 (255): 511–527. ISSN: 00130133. <http://www.jstor.org/stable/2227743>.
- Varian, Hall R. 2012. *Microeconomia – princípios básicos*. Tradução da 8ª edição. Elsevier.