

Resolução do exame ANPEC de microeconomia para 2012

Roberto Guena de Oliveira

2 de junho de 2014

QUESTÃO 1

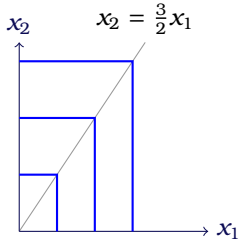
As afirmativas abaixo se referem à teoria do consumidor. Denomine de R a renda monetária exógena do consumidor, x_1 a quantidade consumida do bem 1, x_2 a quantidade consumida do bem 2, p_1 o preço do bem 1 e p_2 o preço do bem 2. Assinale Falso ou Verdadeiro:

- ① Se $U(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^2$, então a cesta ótima escolhida pelo consumidor é dada por: $x_1^* = \frac{1}{2} \frac{R}{p_1}$, $x_2^* = \frac{1}{2} \frac{R}{p_2}$.
- ② Se a função utilidade do consumidor é dada por: $U(x_1, x_2) = \max\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\right)$, $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$, então a cesta ótima escolhida pelo consumidor é dada por: $x_1^* = \frac{R}{2}$, $x_2^* = \frac{R}{3}$.
- ③ Se $U(x_1, x_2) = \min\{4x_1^2, 9x_2^2\}$, a cesta ótima é dada por: $x_1 = \frac{2R}{3p_1+2p_2}$, $x_2 = \frac{3R}{3p_1+2p_2}$.
- ④ Se $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$ e supondo solução interior, a cesta ótima escolhida pelo consumidor é dada por: $x_1^* = \frac{p_1}{p_2}$, $x_2^* = \frac{R-p_1}{p_2}$.
- ⑤ Se $U(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, então pode-se dizer que este consumidor substitui uma unidade do bem 1 por 2 unidades do bem 2.

Solução

- ① FALSO. Trata-se de uma função de utilidade do tipo Cobb-Douglas com coeficientes iguais para os bens 1 e 2. Sabemos, que nesse caso as funções de demanda serão

$$x_1^* = \frac{1}{2} \frac{R}{p_1} \quad \text{e} \quad x_2^* = \frac{1}{2} \frac{R}{p_2}.$$



- ① FALSO. As curvas de indiferença para a função de utilidade $U(x_1, x_2) = \max\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\right)$ são ângulos retos com os lados cruzando os eixos, tal como ilustra a figura ao lado.

Tratam-se, portanto de preferências côncavas. Consequentemente, nosso consumidor deve especializar-se no consumo de apenas um bem o que contradiz o enunciado. Com isso, já respondemos a questão. Se quisermos saber, entretanto, que bem nosso consumidor vai consumir, basta comparar sua função de utilidade quando ele consome apenas o bem 1 com sua função de utilidade quando ele consome apenas o bem 2. No primeiro caso, teremos $x_1 = R/p_1$, $x_2 = 0$ e, portanto, $U(R/p_1, 0) = \frac{R}{2p_1}$. No segundo caso, teremos $x_1 = 0$, $x_2 = R/p_2$ e $U(0, R/p_2) = \frac{R}{3p_2}$. Assim, caso $\frac{R}{2p_1} > \frac{R}{3p_2}$, isto é, caso $p_1 < \frac{3}{2}p_2$, nosso consumidor deverá consumir apenas o bem 1. Caso, inversamente, $\frac{R}{2p_1} < \frac{R}{3p_2}$, ou, em outros termos, caso, $p_2 < \frac{2}{3}p_1$, nosso consumidor deverá consumir apenas o bem 2. Caso $p_1 = \frac{3}{2}p_2$, nosso consumidor estará indiferente entre especializar-se no consumo do bem 1 ou especializar-se no consumo do bem 2. Desse modo, a cesta ótima escolhida por nosso consumidor será

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \left(\frac{R}{p_1}, 0\right) & \text{caso } p_1 < \frac{3}{2}p_2 \\ \left(0, \frac{R}{p_2}\right) & \text{caso } p_2 < \frac{2}{3}p_1 \\ \left(\frac{R}{p_1}, 0\right) \text{ ou } \left(0, \frac{R}{p_2}\right) & \text{caso } p_1 = \frac{3}{2}p_2. \end{cases}$$

- ② FALSO. Como $x_1, x_2 \geq 0$, $U(x_1, x_2) = \min\{4x_1^2, 9x_2^2\} = (\min\{2x_1, 3x_2\})^2$. Tal função de utilidade é, portanto, uma transformação monotônica da função de utilidade $V(x_1, x_2) = \min\{2x_1, 3x_2\}$. Sabemos que as curvas de indiferença para preferências representadas por essa função de utilidade são ângulos retos voltados para fora da origem e com vértice caracterizados por $2x_1 = 3x_2$. Em equilíbrio, o consumidor deverá escolher o ponto sobre sua linha de restrição orçamentária que também é vértice da curva de indiferença mais elevada que ainda toca essa linha. Esse ponto é determinado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x_1 = 3x_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos

$$x_1 = \frac{3R}{3p_1 + 2p_2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2R}{3p_1 + 2p_2}.$$

- ③ FALSO. Desde que as preferências sejam passíveis de serem representadas por uma função de utilidade diferenciável, o que é o caso do exercício, pois a função de utilidade apresentada é diferenciável, uma solução interior será caracterizada por

$$\begin{cases} \frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R \end{cases}$$

No nosso caso,

$$UMg_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} (\ln x_1 + x_2) = \frac{1}{x_1} \quad \text{e} \quad UMg_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} (\ln x_1 + x_2) = 1.$$

Assim, nossa solução interior será caracterizada por

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \end{cases}$$

O que implica,

$$x_1 = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{R - p_2}{p_2}$$

Haveria, ao menos, outros dois caminhos para se concluir que esse item é falso. No primeiro caminho, basta observar que o valor da cesta ótima proposta pelo enunciado é

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = \frac{p_1^2}{p_2} + R - p_1 = R + p_1 \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right).$$

Esse valor só é igual a R quando $p_1 = p_2$. Mas, sendo a função de utilidade monotônica, esse valor deveria ser igual a R para qualquer solução ótima.

O segundo caminho consistiria em notar que a função de demanda pelo bem 1 apresentada no enunciado faria deste bem um bem de Giffen, pois tal função é crescente em relação a p_1 . Como todo bem de Giffen também é um bem inferior, essa função de demanda teria que ser decrescente em relação a R , coisa que ela não é. Portanto, tal função de demanda não pode existir.

- ④ FALSO. Para a função de utilidade do enunciado, as utilidades marginais dos bens 1 e 2 são, respectivamente, $UMg_1 = 1$ e $UMg_2 = 2$. Assim, o módulo da taxa marginal de substituição é $|TMS| = UMg_1/UMg_2 = 1/2$. Isso indica que uma unidade do bem 1 substitui meia unidade do bem 2.

QUESTÃO 2

Com relação à racionalidade das escolhas dos consumidores e seus impactos sobre o nível de bem estar, observa-se que (assinale falso ou verdadeiro):

- ① Suponha que o consumidor só pode consumir quantidades não negativas dos bens e possui preferências representadas pela seguinte função utilidade: $U(x_1, x_2) = -x_1 x_2$. Pode-se afirmar que as preferências desse consumidor satisfazem às propriedades de monotonicidade e convexidade.

- ① Se a Taxa de Dispendio (medida pela relação entre os respectivos gastos) com a aquisição de 2 bens, em dois momentos no tempo, for superior ao Índice de Preços de Laspeyres, os consumidores se defrontam com uma melhoria do bem estar no final do período.
- ② Se o Índice de Quantidade de Laspeyres for inferior à unidade, os consumidores estão em melhor posição (maior utilidade) no período base comparado ao período corrente.
- ③ O Excedente do Consumidor corresponde exatamente à medida em unidades monetárias do ganho de utilidade obtido em razão do consumo do bem 1, quando a função utilidade do consumidor é quase-linear em relação ao bem 2.
- ④ Considerando os impactos de variações dos preços, a Variação Equivalente (VE) é medida pela renda que deve ser transferida ao consumidor para que, aos preços finais, ele alcance a mesma utilidade daquela inicial.

Solução

- ① FALSO. Tais preferências nem são monotônicas nem tampouco convexas. Não são monotônicas pois, se $x_2 > 0$, $x_1^0 > x_1^1 \Rightarrow U(x_1^0, x_2) = -x_1^0 x_2 < -x_1^1 x_2 = U(x_1^1, x_2)$ e, portanto, pela definição da função de utilidade $x_2 > 0, x_1^0 > x_1^1 \Rightarrow (x_1^1, x_2) > (x_1^0, x_2)$. Sabendo que se tratam de preferência não monotônicas, você não precisaria saber que também se tratam de preferências não convexas para deduzir que o enunciado é falso. Porém, para completar a resposta, é fácil ver que as preferências desse exercício também são não convexas. Lembre-se que as preferências são convexas se, e somente se, qualquer função de utilidade que as representem forem quase-côncavas. Tais preferências serão estritamente convexas se, e somente se, as funções de utilidade que a representam forem estritamente quase-côncavas. Lembre-se também que o negativo de uma função quase-côncava é uma função quase-convexa e que o negativo de uma função estritamente quase-côncava é uma função estritamente quase-convexa e, conseqüentemente, não quase-côncava. Sabemos que as preferências Cobb-Douglas são estritamente convexas e que, portanto, funções de utilidade Cobb-Douglas são estritamente quase-côncavas. A função de utilidade apresentada no enunciado é o negativo de uma função de utilidade Cobb-Douglas. Portanto, ela é estritamente quase-convexa e, por conseqüência, não quase-côncava, o que implica que as preferências apresentadas não são convexas.
- ① VERDADEIRO, desde que o índice Laspayres de preço seja calculado para cada consumidor, com base em suas escolhas de consumo. O

índice Laspeyres de preço é dado pela relação entre o valor da cesta de bens consumida no primeiro momento de tempo aos preços do segundo momento e o valor dessa mesma cesta de bens aos preços do primeiro momento. Se a razão entre a renda final e a renda inicial é superior ao índice Laspeyres de preço, isso indica que a renda de nosso consumidor subiu mais do que seria preciso para fazer com que ele pudesse continuar consumindo a cesta de bens que consumia inicialmente, isto é, a cesta de bens consumida no momento inicial está abaixo da linha de restrição orçamentária do momento final. Logo, desde que as preferências de nosso consumidor sejam localmente não saciáveis, ele está melhor no momento final.

- ② VERDADEIRO, desde que o índice seja calculado para cada consumidor com base em suas escolhas de consumo. O índice Laspeyres de quantidade é a razão entre os valores, medidos aos preços do momento inicial, da cesta de bens consumida no momento final e a cesta de bens consumida no momento inicial. Se ele é menor do que uma unidade, isso indica que, aos preços do momento inicial, a cesta de bens consumida no momento final é mais barata do que a cesta de bens consumida no momento inicial, isto é, que a linha de restrição orçamentária do momento inicial passa acima da linha de restrição orçamentária do momento final. Logo, desde que as preferências de nosso consumidor sejam localmente não saciadas, ele estará melhor no momento inicial do que no momento final.
- ③ VERDADEIRO. Se a função de utilidade é quase linear em relação ao bem 2 ela admite, assumindo-se que o preço do bem 2 seja dado, uma transformação monotônica que a faça assumir a forma

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + p_2 x_2$$

na qual x_1 e x_2 são as quantidades consumidas do e p_2 é o preço do bem 2 e $v(0) = 0$. Note que, uma vez que $p_2 x_2$ é um valor monetário, essa função de utilidade possui métrica monetária, ou seja, sua grandeza é expressa em unidades monetárias. O preço de demanda para o bem 1 pode ser inferido a partir da condição de igualdade, em módulo, entre a taxa marginal de substituição e o preço relativo:

$$\frac{v'(x_1)}{p_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow p_1 = v'(x_1)$$

A área abaixo da curva de demanda do bem 1 entre $x_1 = 0$ e $x_1 = \bar{x}_1$ para qualquer $\bar{x}_1 \geq 0$ é o excedente bruto do consumidor associado ao consumo da quantidade \bar{x}_1 do bem 1. Este será igual a

$$\int_0^{\bar{x}_1} v'(x) dx = v(\bar{x}_1) = v(\bar{x}_1) + p_2 x_2 - [v(0) + p_2 x_2] = U(\bar{x}_1, x_2) - U(0, x_2).$$

- ④ FALSO. Essa variação é o negativo da variação compensatória. A variação equivalente, é a medida da renda que deve ser transferida ao consumidor para que, aos preços iniciais, ele alcance o nível de utilidade da situação final.

QUESTÃO 3

Com relação às escolhas ótimas dos consumidores, constata-se que:

- ① Se as preferências do indivíduo estão representadas pela função utilidade $U(x, y) = 2x + y$ e os preços dos bens são $p_x = p_y = 2$, então uma redução de p_x para $p_x = 1$ resulta num Efeito Substituição igual a zero.
- ② Se dois bens x e y são complementares perfeitos e o preço do bem x decresce, então o Efeito Renda é zero e o Efeito Total se iguala ao Efeito Substituição.
- ③ A negatividade do Efeito Substituição decorre diretamente do Axioma Forte da Preferência Revelada.
- ④ No caso de preferências do tipo Cobb-Douglas, a Elasticidade-Preço Cruzada da demanda por bens é nula, enquanto a Elasticidade-Preço da demanda por cada um deles é unitária (em módulo).
- ⑤ Nas funções demandas geradas a partir de uma função utilidade do tipo $U(X, Y) = X^2 + Y^2$ as demandas individuais por cada bem são independentes do preço do outro.

Solução

- ① VERDADEIRO. Lembre-se que, para uma função de utilidade do tipo $U(x, y) = ax + y$ na qual a é uma constante positiva, a cesta de bens demandada será $(x, y) = \left(\frac{R}{p_x}, 0\right)$ caso $p_x < ap_y$, $(x, y) = \left(0, \frac{R}{p_y}\right)$ caso $p_x > ap_y$ e $(x, y) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : p_x x + p_y y = R\right\}$ caso $p_x = ap_y$, sendo R a renda do consumidor. Lembre-se também que a função de demanda compensada pelos bens x e y é, no caso da mesma função de utilidade tal que $(h_x(p_x, p_y, u), h_y(p_x, p_y, u)) \left(\frac{u}{ap_x}, 0\right)$ caso $p_x < ap_y$, $(h_x(p_x, p_y, u), h_y(p_x, p_y, u)) = \left(0, \frac{u}{p_y}\right)$ caso $p_x > ap_y$ e

$$(h_x(p_x, p_y, u), h_y(p_x, p_y, u)) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : ax + by = u\right\},$$

sendo u o nível de utilidade.

No caso desse item, como, na situação inicial $p_x < ap_y$, pois $p_x = 2 = p_y$ e $a = 2$, a quantidade inicialmente demandada do bem x é $x_0 = \frac{R}{p_x^0} = \frac{R}{2}$ e a quantidade inicialmente demandada do bem y é $y_0 = 0$. Substituindo esses valores na função de utilidade, obtemos a utilidade inicial do consumidor $u_0 = R$. Quanto o preço varia para $p_x^1 = 1$, tal quantidade passa a $x_1 = \frac{R}{p_x^1} = R$, de tal sorte que o efeito preço total é $R - R/2 = R/2$. O efeito substituição ES é a diferença entre a demanda compensada pelo bem x calculada ao preço final e ao nível de utilidade inicial $h_x(p_x^1, u_0) = h_x(1, R) = R/2$ e a demanda inicial x_0 : $ES = h_x(1, R) - x_0 = R/2 - R/2 = 0$.

- ① FALSO. Se os dois bens são complementares perfeitos, as preferências de nosso consumidor podem ser representadas por uma função de utilidade com a forma $U(x, y) = \min\{ax, y\}$ na qual a é uma constante positiva. Nesse caso, as funções de demanda pelos dois bens serão dadas por

$$x(p_x, p_y, R) = \frac{R}{p_x + ap_y} \quad \text{e} \quad y(p_x, p_y, R) = \frac{aR}{p_x + ap_y}.$$

A função de utilidade indireta será

$$V(p_x, p_y, R) = \frac{aR}{p_x + ap_y}.$$

E as funções de demanda compensada serão

$$h_x(p_x, p_y, u) = \frac{u}{a} \quad \text{e} \quad h_y(p_x, p_y, u) = u.$$

Suponha um variação no preço do bem x de p_x^0 para p_x^1 . Então, a quantidade de x demandada inicialmente será $x_0 = x(p_x^0, p_y, R) = \frac{R}{p_x^0 + ap_y}$ e a utilidade inicial será $u_0 = V(p_x^0, p_y, R) = \frac{aR}{p_x^0 + ap_y}$. O efeito substituição será então

$$ES = h_x(p_x^1, p_y, u_0) - x_0 = \frac{u_0}{a} - x_0 = \frac{R}{p_x^0 + ap_y} - \frac{R}{p_x^0 + ap_y} = 0.$$

Assim, o efeito substituição é nulo e o efeito preço total coincide com o efeito renda.

- ② FALSO. O efeito substituição não é necessariamente negativo, mas sim, não positivo.
- ③ VERDADEIRO. As funções de demanda para preferências Cobb-Douglas são

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1} \quad \text{e} \quad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2}$$

nas quais $a, b > 0$ são parâmetros da função de utilidade. Claramente, a função de demanda do bem 1 não depende do preço do bem 2, p_2 , e

a função de demanda pelo bem 2 não depende de p_1 , o preço do bem 1. Assim, as elasticidades preço cruzadas são nulas. Além disso, como em cada uma das funções de demanda, o preço do bem aparece elevado a menos um, essas funções de demanda têm elasticidade preço unitária.

- ④ FALSO. As curvas de indiferença geradas por essa função de utilidade são quartos de circunferência centradas na origem e com raio igual à raiz quadrada da utilidade. As preferências são, portanto, côncavas. Logo, o consumidor deverá consumir apenas um dos bens. Se ele optar por consumir apenas o bem X, teremos $X = m/p_X$, $Y = 0$ e $U(m/p_X, 0) = (x/p_X)^2$. Se ele optar por consumir apenas o bem Y, teremos $X = 0$, $Y = m/p_Y$ e $U(0, m/p_Y) = (m/p_Y)^2$. Portanto ele deve preferir consumir apenas X, apenas Y ou ser indiferente entre consumir apenas X e apenas Y caso, respectivamente, $p_X < p_Y$, $p_X > p_Y$ ou $p_X = p_Y$. Desse modo, as funções de demanda são

$$(X(p_X, p_Y, m), Y(p_X, p_Y, m)) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_X}, 0\right) & \text{caso } p_X < p_Y \\ \left(0, \frac{m}{p_Y}\right) & \text{caso } p_X > p_Y \\ \left\{\left(\frac{m}{p_X}, 0\right), \left(0, \frac{m}{p_Y}\right)\right\} & \text{caso } p_X = p_Y \end{cases}$$

Dessa forma, a demanda de cada um dos bens depende do preço do outro: ela será nula se o preço do outro bem for menor do que o preço próprio e positiva, caso contrário.

QUESTÃO 4

No que se refere à teoria da produção, avalie a validade das seguintes afirmações:

- ① Se a função de produção de uma empresa é dada por $F(L, K) = L + \sqrt{LK}$, então a empresa opera com rendimentos de escala decrescentes.
- ② Se uma empresa opera com economias de escala, então seu custo médio é decrescente e maior que seu custo marginal.
- ③ Se a função de produção de uma firma é dada por $F(L, K) = L\sqrt{K}$ e os mercados de fatores são competitivos, então a mesma opera com custos marginais decrescentes.
- ④ Uma função de produção Cobb-Douglas apresenta uma Elasticidade-Substituição de Fatores decrescente.
- ⑤ Uma empresa cuja função custo total é dada por $CT(Q) = 5Q + 7$ opera com economias de escala.

Solução

- ① FALSO. $t > 0 \Rightarrow F(tL, tK) = tL + \sqrt{(tL)(tK)} = tL + t\sqrt{LK} = t(L + \sqrt{LK}) = tF(L, K)$. Portanto, a função de produção $F(L, K) = L + \sqrt{LK}$ apresenta rendimentos constantes de escala.
- ② VERDADEIRO. Economias de escala são caracterizadas por custo médio decrescente. Adicionalmente, sempre que o custo marginal seja definido, o custo médio é decrescente se, e somente se, ele for maior que o custo marginal.
- ③ FALSO. Como essa função de produção apresenta rendimentos constantes de escala (item ①), ela deve apresentar, para empresas tomadoras de preço, custo médio constante igual ao custo marginal.
- ④ FALSO. A elasticidade de substituição entre os fatores para as funções de produção Cobb-Douglas é constante e igual a 1.
- ⑤ VERDADEIRO. O custo médio para essa empresa é

$$CM = 5 + \frac{7}{Q}.$$

Assim, esse custo médio é decrescente em relação a Q .

QUESTÃO 5

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo:

- ① Suponha a seguinte função utilidade que representa as preferências dos indivíduos sobre loterias monetárias: $U(W) = a + bW + cW^{\frac{1}{2}}$, em que W é o nível de riqueza do indivíduo, e a , b e c são parâmetros. Nesse caso, pode-se afirmar que o indivíduo é mais avesso ao risco quanto mais elevada for sua riqueza W .
- ② Suponha um modelo de escolha sob incerteza no qual existem dois estados da natureza com probabilidade p e $(1 - p)$ de ocorrerem e mercados completos de ativos. Especificamente, suponha que existam dois ativos contingentes do tipo $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nesse caso, a razão dos preços relativos desses ativos é exatamente igual à razão das probabilidades de ocorrência dos estados da natureza.

- ② Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, indivíduos avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total.
- ③ A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente.
- ④ O grau de aversão ao risco dos indivíduos pode ser medido pelo seu equivalente de certeza. Quanto mais avesso ao risco é o indivíduo maior é o equivalente de certeza.

Solução

- ① Falso. Podemos medir as aversões absoluta e relativas ao risco usando os coeficientes de Arrow-Pratt de aversão absoluta e relativa ao risco, respectivamente. O coeficiente de aversão absoluta ao risco é $-U''(W)/U'(W)$ e o coeficiente de aversão relativa ao risco é $-WU''(W)/U'(W)$. Para função de utilidade apresentada temos, então que o coeficiente de aversão absoluta ao risco é

$$-\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{-\frac{2}{9}cW^{-\frac{4}{3}}}{b + \frac{2}{3}cW^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2c}{3bW^{\frac{4}{3}} + 6cW},$$

e o coeficiente de aversão relativa ao risco é

$$-W\frac{U''(W)}{U'(W)} = -W\frac{-\frac{2}{9}cW^{-\frac{4}{3}}}{b + \frac{2}{3}cW^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2c}{3bW^{\frac{1}{3}} + 6c},$$

Os dois coeficientes são claramente decrescentes em relação a W . E, independentemente de considerar-se a aversão relativa ou a aversão absoluta ao risco, o indivíduo é tanto *menos* averso ao risco quanto mais elevada for a sua riqueza.

- ① Falso, embora o gabarito dê verdadeiro. O enunciado não é muito claro. Por exemplo, o que significa dizer que os dois bens contingentes são $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$? Parece-nos que a única explicação plausível é a seguinte: pressupõe-se uma economia com um único bem. O ativo A_1 paga uma unidade desse bem caso o estado de natureza 1 ocorra e nada caso ocorra o estado de natureza 2. O ativo 2, ao contrário, não paga nada caso ocorra o estado de natureza 1 e paga uma unidade do bem caso o estado de natureza 2 ocorra. Nesse caso, temos efetivamente mercados completos. Um agente pode construir qualquer cesta de consumo contingente possível nessa economia a partir dos ativos A_1 e A_2 : caso queira por exemplo, consumir uma quantidade x_1 do bem caso o estado

de natureza 1 ocorra e consumir uma quantidade x_2 caso o estado de natureza 2 ocorra, basta que ele tenha x_1 unidades do ativo A_1 e x_2 unidades do ativo A_2 . Façamos agora as seguintes hipóteses:

- a) Todos agentes atribuem a mesma probabilidade p de que o estado de natureza 1 ocorra e, portanto, a mesma probabilidade $1 - p$ de que ocorra o estado de natureza 2.
- b) Para cada agente, o único fator relevante para seu bem-estar é a quantidade consumida do único bem, independentemente do estado de natureza, isto é, ele considera igualmente bom ter acesso a uma quantidade x do único bem no estado de natureza 1 ou ter acesso a mesma quantidade do bem no estado de natureza 2. Assim, caso tenha x_1 unidades do ativo A_1 e x_2 unidades do ativo A_2 , isso equivale para ele a ter uma loteria que paga x_1 com probabilidade p e x_2 com probabilidade $1 - p$.
- c) Todos os agentes tem aversão ao risco e preferências que podem ser representada por uma função de utilidade de von Neumann-Morgenstern, sendo que a função de utilidade do agente i é denotado por $u_i(x)$. Desse modo, caso tenha x_1 unidades do ativo A_1 e x_2 unidades do ativo A_2 , a utilidade do agente i será

$$U_i^E = pu_i(x_1) + (1 - p)u_i(x_2).$$

Seja q o preço relativo do ativo A_1 em relação ao ativo A_2 . Diante desses preços, cada agente deverá demandar as quantidades de cada ativo de modo a igualar, em módulo, sua taxa marginal de substituição a esse preço relativo:

$$\frac{\frac{\partial U_i^E}{\partial x_1}}{\frac{\partial U_i^E}{\partial x_2}} = q \Rightarrow \frac{p}{1 - p} \frac{u_i'(x_1)}{u_i'(x_2)} = q$$

Assuma agora que, que a razão entre os preços dos ativos, q , seja igual a razão entre as probabilidades de ocorrência dos estados de natureza, $p/(1 - p)$. Nesse caso, a consição de equilíbrio acima se reduz a

$$u_i'(x_1) = u_i'(x_2).$$

Como os agentes são aversos ao risco $u_i'(x)$ deve ser estritamente decrescente, o que implica que a igualdade acima só ocorre caso $x_1 = x_2$. Concluimos, portanto que, caso o preço relativo dos ativos seja igual à razão entre as probabilidades de ocorrência dos estados de natureza, os agentes irão demandar quantidades iguais de cada um dos ativos. Em outras palavras, eles irão segurar-se completamente. Para que isso constitua efetivamente um equilíbrio, é necessário que os dois ativos sejam também ofertados em quantidades iguais. Nada garante que isso ocorra. Assim, o enunciado só seria correto caso introduzisse a hipótese de que os dois ativos são ofertados em quantidades iguais.

Possivelmente, esse exercício foi inspirado em um exemplo de Mas-Collel, Whinston e Green 1995, pp. 692-693, exemplo 19.C.1. Nesse exemplo, a hipótese de que a oferta de consumo contingente nos dois estados de natureza é a mesma é explícita. no exemplo seguinte (p. 693, exemplo 19.C.2)

- ② Verdadeiro. Por definição, o prêmio de seguro atuarialmente justo é aquele que não afeta o valor esperado da riqueza do segurado, independentemente do valor segurado. Assim, se o indivíduo segura todo o valor em risco, ele passa a uma situação em que seguramente ficará com a riqueza igual a sua riqueza esperada caso não faça seguro. Qualquer outro valor segurado fará com que ele fique em uma loteria com a mesma riqueza esperada, porém com algum nível de risco. Como indivíduos aversos ao risco aceitam qualquer redução de risco que não implique perda de valor esperado, podemos concluir que indivíduos aversos ao risco segurarão todo valor em risco caso o prêmio de seguro seja atuarialmente justo.
- ③ Falso. Primeiramente, nenhuma função é invariante a qualquer transformação. Por definição, uma transformação é algo que altera ou faz variar. Ainda que se interprete que o enunciado realmente queria dizer que “a propriedade de utilidade esperada de uma função de utilidade não é afetada por qualquer transformação monotônica crescente”, a afirmação cotinuaria falsa, pois sabemos que apenas as transformações monotônicas afim não afetam a propriedade de utilidade esperada de uma função de utilidade.

QUESTÃO 6

Sobre a Teoria da Produção analise as afirmativas abaixo:

- ① Se uma firma apresenta função de produção dada por $f(z) = z_1 + z_2$, em que z_1 e z_2 são, respectivamente, a quantidade utilizada do insumo 1 e 2, então a função custo será dada por $C(w, q) = \min\{w_1, w_2\} \cdot q$, em que w_1 e w_2 são, respectivamente, os preços do insumo 1 e 2, e q é a quantidade produzida.
- ② A função de produção indica a menor quantidade de produto que pode ser obtida a partir de determinada quantidade de insumos.
- ③ Se uma firma apresenta tecnologia de produção com rendimentos constantes de escala, então ela não poderá apresentar produto marginal decrescente para cada fator.

- ③ Se uma empresa apresenta tecnologia de produção representada por uma função Cobb-Douglas, $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$, sendo a e b parâmetros, então ela apresentará rendimentos constantes de escala.
- ④ Na função de produção $f(z) = \min\{z_1, z_2\}$, a demanda condicional do fator z_1 será igual a demanda condicional do fator z_2 .

Solução

- ① Verdadeiro. Como os dois insumos são substitutos perfeitos na função de produção, para obter uma quantidade q de produto, a empresa irá empregar q unidades do insumo 1 e nada do insumo 2 caso $w_1 < w_2$, nada do insumo 1 e q unidades do insumo 2 caso $w_1 > w_2$ e quaisquer quantidades z_1 do insumo 1 e z_2 do insumo 2 tais que $z_1 + z_2 = y$ caso $w_1 = w_2$. Desse modo o custo de produzir a quantidade q do produto será

$$C(w_1, w_2, q) = \begin{cases} w_1 q & \text{caso } w_1 < w_2 \\ w_1 q = w_2 q & \text{caso } w_1 = w_2 \\ w_2 q & \text{caso } w_1 > w_2 \end{cases}.$$

Ou, expressando de um modo mais sucinto,

$$C(w_1, w_2, q) = \min\{w_1, w_2\} q.$$

- ② Falso. A função de produção indica a *maior* quantidade de produto que pode ser obtida a partir de determinada quantidade de insumos.
- ③ Falso. Considere, como contra exemplo, a seguinte função de produção:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Trata-se de uma função de produção homogênea de grau 1 e, portanto, apresenta rendimentos constantes de escala. A produtividade marginal do fator 1 é

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.$$

Esta é decrescente em relação a x_1 .

- ④ Verdadeiro. Como os dois insumos são complementares perfeitos na produção na razão de 1 para 1, eles sempre serão demandados em quantidades iguais. No caso, para obter a quantidade q ao menor custo, a empresa deverá contratar

$$x_1(w_1, w_2, q) = x_2(w_1, w_2, q) = q.$$

QUESTÃO 7

No que se refere ao equilíbrio de mercados competitivos:

- ① Em um mercado competitivo que opera com “custos crescentes” no longo prazo e livre entrada/saída, o preço de equilíbrio é independente da demanda do mercado.
- ② Na existência de custos fixos positivos, o “excedente do produtor” é sempre superior ao lucro total da firma.
- ③ Se os Custos Totais de uma firma competitiva são dados por $C(Q) = 2Q^3 - 12Q^2 + 38Q$ e o preço de equilíbrio do mercado é dado por $P = 20$, então a empresa deve produzir $Q = 1$.
- ④ Se a função de produção da firma é dada por $Q = f(L, K) = (L(K - 2))^{1/3}$, então a oferta agregada da indústria, supondo que a mesma opere com 10 empresas, é dada por $S(p) = (1/36)p^2$, sendo p o preço do produto.
- ⑤ Se o produtor apresenta as seguintes escolhas (Y , L e K), em termos de preços do bem (P_y) e dos fatores (P_l e P_k), em dois momentos no tempo (t e s), então as escolhas apresentadas na tabela abaixo não satisfazem o Axioma Fraco da Rentabilidade Revelada.

Momento	Y	L	K	P_y	P_l	P_k
T	5	4	4	10	2	3
S	4	2	2	8	4	5

Solução

- ① Ambíguo. Em uma abordagem estrita de equilíbrio parcial, a afirmação está correta, pois, nessa abordagem pressupõe-se que os preços dos insumos são mantidos constantes e que, no longo prazo haverá entrada ou saída de empresas até o momento em que o preço se iguale ao custo médio mínimo de produção de longo prazo de tal sorte que o lucro de todas as empresas nesse mercado seja igual a zero. Porém, em uma abordagem de equilíbrio geral, há que se considerar que variações na produção total do mercado podem afetar os preços dos insumos. Nesse caso, as condições de demanda podem afetar o custo médio mínimo de longo prazo e o preço de equilíbrio do produto.
- ② Verdadeiro. O excedente do produtor é soma do lucro mais o custo fixo. Portanto, se o custo fixo é positivo, o excedente do produto é maior que o lucro.

② Falso. O lucro máximo é obtido quando:

- a) caso o preço do produto seja inferior ao custo variável médio mínimo, $Q = 0$;
- b) caso o preço do produto seja maior do que o custo variável médio mínimo, Q é tal que iguala o custo marginal de produção ao preço do produto no ramo ascendente da curva de custo marginal; e
- c) caso o preço do produto seja igual ao custo variável médio mínimo, $Q = 0$ ou Q é a quantidade que minimiza o custo variável médio.

O custo variável médio de produção é

$$CVM(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = 2Q^2 - 12Q + 38.$$

Para calcular a quantidade que minimiza esse custo, notemos que a função de custo variável médio é convexa, pois $d^2CVM(Q)/dQ = 4 > 0$, e que, portanto, quando $dCVM(Q)/dQ = 0$ tem-se um ponto de custo variável médio mínimo. Assim fazemos

$$\frac{dCVM(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow 4Q - 12 = 0 \Rightarrow Q = 3.$$

Assim, o custo variável médio mínimo é

$$CVM_{\min} = CVM(3) = 20.$$

Como o preço do produto é igual a 20, o maior excedente que a empresa pode obter é zero. Ela obtém esse excedente fazendo $Q = 0$ ou, indiferentemente, fazendo $Q = 3$.

③ A oferta agregada é dada pela soma das ofertas das empresas individuais. Para definir quanto irá produzir, cada empresa escolhe quanto vai empregar de cada insumo e quanto vai produzir de modo a maximizar seu lucro, dado pela diferença entre sua receita e seu custo. A primeira é dada pela multiplicação do preço do produto pela quantidade produzida, a segunda é dada pela soma dos produtos do preço de cada insumo vezes a quantidade empregada do mesmo. Assim, as funções de oferta individuais dependem tanto do preço do produto quanto dos preços dos insumos. O mesmo deve ocorrer, portanto com a oferta agregada da indústria, ou seja, ela deve ser função não apenas do preço do produto, como afirma o enunciado, mas também dos preços de K e de L .

Para encontrar a verdadeira função de oferta, observe que, ao maximizar seu lucro, cada empresa iguala o custo de cada insumo ao valor de seu produto marginal. Assim, notando por r o preço do capita e por w o preço do trabalho, as condições de lucro máximo de primeira ordem são:

$$PMg_L = \frac{w}{p} \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{K-2}{L^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{w}{p} \quad \text{e} \quad PMg_K = \frac{r}{p} \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{L}{(K-2)^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{r}{p}.$$

Multiplicando a primeira igualdade pela segunda e elevando ao quadrado, obtemos

$$\frac{1}{(K-2)^3} = \left(\frac{3}{p}\right)^9 w^3 r^6.$$

Resolvendo para K encontramos a função de demanda de cada empresa individual por capital:

$$K(p, w, r) = \frac{p^3}{27} \frac{1}{wr^2} + 2.$$

Substituindo esse resulta em qualquer equação acima, obtém-se a demanda por trabalho:

$$L(p, w, r) = \frac{p^3}{27} \frac{1}{w^2 r}.$$

Substituindo as funções de demanda na função de produção, obtemos a função de oferta que será válida desde que os preços sejam suficientes para garantir a produção sem prejuízo:

$$y(p, w, r) = \frac{1}{9} \frac{p^2}{wr}.$$

O lucro da empresa será o maior valor entre zero, caso ela opte por não produzir e

$$p \frac{1}{9} \frac{p^2}{wr} - r \left[\frac{p^3}{27} \frac{1}{wr^2} + 2 \right] - w \frac{p^3}{27} \frac{1}{27w^2 r} = \frac{1}{27} \frac{p^3}{wr} - 2r.$$

Assim, a condição para que ela tenha lucro não negativo ao optar por produzir uma quantidade positiva é

$$\frac{1}{27} \frac{p^3}{wr} - 2r \geq 0 \Rightarrow p \geq 3 \sqrt[3]{2wr^2}.$$

Desse modo a função de oferta de uma empresa individual será

$$y(p, w, r) = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{p^2}{wr} & \text{caso } p \geq 3 \sqrt[3]{2wr^2} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E a função de oferta da indústria, assumindo-se que haja dez empresas, será

$$Y(p, w, r) = 10y(p, w, r) = \begin{cases} \frac{10}{9} \frac{p^2}{wr} & \text{caso } p \geq 3 \sqrt[3]{2wr^2} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ④ Segundo o referido axioma, as escolhas das firmas em cada situação não poderiam gerar lucro inferior a outro plano de produção sob os preços prevalentes na situação original. No caso, deveremos ter a obediência dessa duas desigualdades:

$$10 \times 5 - 2 \times 4 - 3 \times 4 \geq 10 \times 4 - 2 \times 2 - 3 \times 2$$

e

$$8 \times 4 - 4 \times 2 - 5 \times 2 \leq 8 \times 5 - 4 \times 4 - 5 \times 4.$$

Como essas condições se reduzem a, respectivamente, $30 \geq 30$ e $14 \leq 4$, elas são verdadeiras e não há violação do axioma fraco da rentabilidade revelada.

QUESTÃO 8

Avalie as seguintes situações representadas por meio do instrumental da Teoria dos Jogos:

- ① Em um jogo sequencial que representa uma situação genérica de dupólio, a seleção da estratégia ótima pela firma que comanda o jogo necessariamente conduz a um equilíbrio semelhante ao de Cournot.
- ② Maria perdeu uma carteira com \$ 500 em dinheiro e \$ 500 em outros valores pessoais (fotos, cartas, etc). Para tentar reaver sua carteira, Maria tem duas alternativas: (1a) oferecer uma recompensa de \$ 600; (2a) aguardar a devolução sem oferecer qualquer recompensa. Por outro lado, Joana, que achou a carteira perdida, também se defronta com duas alternativas: (1b) manter a carteira com ela; (2b) devolver a carteira para a sua dona. Dadas estas circunstâncias, observa-se que o equilíbrio perfeito em sub-jogos não é eficiente.
- ③ Suponha que as empresas *A* e *B* vendam produtos concorrentes e estejam avaliando o retorno oferecido por diferentes canais alternativos para divulgação de seus produtos. O Quadro 1 abaixo representa estas alternativas na matriz de um jogo, em que os *pay-offs* representam os percentuais de participação de mercado ganhos (valores positivos) ou perdidos (valores negativos) pela firma *A*. Considere o tamanho do mercado constante e que apenas estas empresas operem neste mercado. Neste caso, observa-se que o jogo não tem uma solução de equilíbrio baseada em “estratégias puras”.
- ④ Um jogo simultâneo que apresenta múltiplos equilíbrios não apresenta uma solução de equilíbrio em sua forma sequencial.
- ⑤ Uma firma avalia a possibilidade de entrada em determinado mercado a partir da expectativa de reação da firma estabelecida, conforme ilustrado pelo Quadro 2 abaixo. Nestas condições, há evidências de que a possibilidade de retaliação (ou “luta”) constitui uma ameaça crível.

Quadro 1

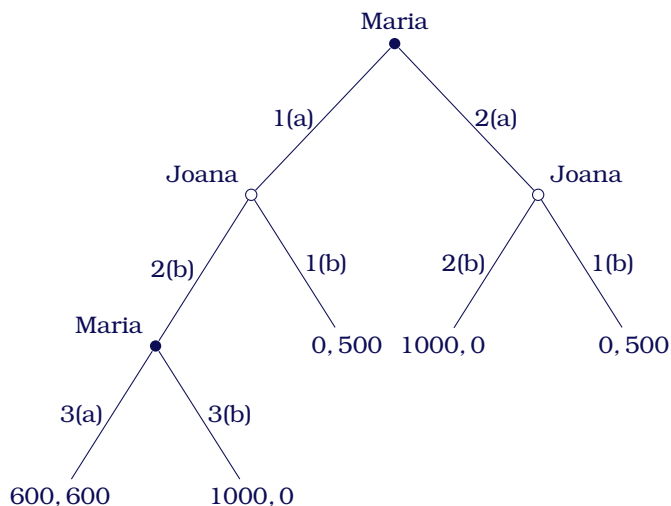
A\B	B1	B2	B3	B4
A1	7	-3	8	-4
A2	5	4	5	7
A3	-3	3	-10	4

Quadro 2

Entrante	Estabelecida	
	Luta	Não Luta
Entra	0, 4	4, 2
Não Entra	2, 8	2, 10

Solução

- Ⓒ Falso. O equilíbrio de Cournot é obtido em um jogo de decisões simultâneas. Se o jogo é sequencial, não há como afirmar que haverá semelhanças entre o equilíbrio desse jogo e o de Cournot.
- Ⓓ Verdadeiro. Para chegarmos a essa resposta, é preciso assumir que não existe qualquer mecanismo que force Maria a cumprir sua promessa de pagar a recompensa pela devolução da carteira, de tal modo que, após Joana eventualmente devolver a carteira, Maria teria ainda que escolher entre duas alternativas: cumprir sua promessa e pagar a recompensa, 3(a), ou não cumprir a promessa 3(b). A representação do jogo na forma extensiva é mostrada abaixo:



Resolvendo esse jogo por indução retroativa, encontramos dois equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos. No primeiro deles Maria joga 2(a), 4(a) e Joana joga 1(b), 1(b) e, no segundo, Maria joga 1(a), 4(a) e Joana 1(b), 1(b). Nos dois casos, os payoffs finais são (0, 1.000). Nos dois casos, o resultado final é Pareto dominado pelo resultado que ocorreria caso Maria jogasse 1(a), 3(a) e Joana respondesse com 2(b), 2(b) ou 2(b), 1(b).

- ② Falso. Como trata-se de um jogo de soma zero, o equilíbrio de Nash é obtido quando cada empresa escolhe a estratégia para a qual o seu pior resultado é o melhor (estratégia maxmin). Isso ocorre quando a empresa A escolhe a estratégia A2 (pois com essa estratégia, o pior resultado é um ganho de 4% na participação de mercado enquanto escolhendo as estratégias A1 e A3 seus piores resultados seriam, respectivamente, perdas de mercado de 4% e de 10%) e a empresa B escolhe a estratégia B2 (pois, com essa estratégia seu pior resultado é uma perda de mercado de 4%, enquanto com as estratégias, B1, B3 e B4, os piores resultados corresponderiam a perdas de mercado de, respectivamente, 7%, 8% e 7%). Portanto, há um equilíbrio de Nash em estratégias puras no qual a empresa A joga a estratégia A2 e a empresa B joga a estratégia B2.
- ③ Falso. Considere, por exemplo, o jogo do tipo Batalha dos Sexos abaixo:

		Ele	
		A	B
Ela	A	2, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 2

Caso esse jogo seja jogado simultaneamente, haverá dois equilíbrios de Nash: um no qual ambos escolhem A e outro no qual ambos escolhem B. Se esse jogo for transformado em um jogo sequencial com, por exemplo, ela se movendo primeiro, a solução desse jogo é dada pelo equilíbrio de Nash perfeito em subjogos no qual ambos escolhem A.

- ④ Verdadeiro. Se a entrante de fato entrar, o ganho da estabelecida ao lutar é maior (4) do que se não lutar (2), de modo que existe incentivo a lutar. Não seria ameaça crível se a luta prejudicasse a estabelecida, como costuma acontecer na representação tradicional desse problema.

QUESTÃO 9

Duas empresas operam no mercado de iogurtes, podendo optar entre produzir um iogurte de alta qualidade (A) ou um iogurte de baixa qualidade (B). As escolhas das firmas são simultâneas. Os lucros resultantes de cada estratégia encontram-se apresentados na matriz de *pay-off* a seguir:

		Empresa 2	
		Baixa	Alta
Empresa 1	Baixa	-10, -25	600, 300
	Alta	90, 500	40, 40

É correto afirmar que:

- ① Existe apenas um equilíbrio de Nash possível nesse jogo.
- ② Se ambas as empresas optassem por uma estratégia maxmin, o equilíbrio seria (Alta, Alta).
- ③ Num equilíbrio de conluio, a Empresa 1 produzirá iogurte de baixa qualidade e a Empresa 2 produzirá iogurte de alta qualidade.
- ④ O jogo acima é do tipo Dilema dos Prisioneiros.
- ⑤ Trata-se de um jogo de informação imperfeita.

Solução

- ⑥ Em estratégias puras, o jogo possui dois equilíbrio de Nash: um no qual a empresa 1 escolhe Alta e a empresa 2 escolhe Baixa e outro no qual a Empresa 1 escolhe Baixa e a empresa 2 escolhe Alta. Além disso, ha um equilíbrio de Nash em estratégias mistas no qual a empresa 1 escolhe Baixa com probabilidade $92/157$ e a empresa 2 escolhe Baixa com probabilidade $28/33$.
- ① Verdadeiro. Escolher Alta resulta no maior mínimo resultado para a empresa 1 visto que, com a escolha dessa estratégia seu pior resultado é um ganho igual a 40 e, caso ela escolhesse a estratégia Baixa, seu pior resultado seria -10 . Escolher Alta também maximiza o pior resultado para a empresa 2, visto que, com essa estratégia seu pior resultado é um ganho de 40 e caso, escolha Baixa, seu pior resultado seria -25 .
- ② Verdadeiro. De fato, essa é a combinação de estratégias que maximiza o ganho conjunto.
- ③ Falso. Um jogo do tipo dilema dos prisioneiros é um jogo no qual os dois jogadores tem estratégias dominantes e o equilíbrio de Nash, que ocorre quando os dois jogadores jogam suas estratégias dominantes, é Pareto dominado por um possível resultado que não configura equilíbrio. No presente caso, não há estratégias dominantes e nenhum dos equiíbrios de Nash em estratégias puras é Pareto dominado por qualquer outro possível resultado do Jogo.
- ④ Verdadeiro. Informação perfeita denota situação na qual os jogadores conhecem as escolhas prévias dos demais jogadores. Isso só pode ocorrer em um jogo sequencial. Como o jogo em questão é simultâneo, não temos o caso de informação perfeita.

QUESTÃO 10

Um trabalhador pode realizar dois níveis de esforço quando contratado por uma fábrica, alto ou baixo. A probabilidade de ocorrerem erros de produção é condicional ao nível de esforço do trabalhador. Se o trabalhador realiza o esforço alto a probabilidade de erro é 0,25 e se o trabalhador realiza o esforço baixo a probabilidade de erro se eleva para 0,75. A função de utilidade do trabalhador é dada por: $U(w, e) = 100 - \frac{10}{w} - e$, em que w é o salário do trabalhador e e o nível de esforço, que assume o valor $e = 2$, no caso do trabalhador realizar o esforço alto, e $e = 0$ no caso do trabalhador realizar esforço baixo. A única oportunidade de trabalho existente no mercado é dada por este posto na fábrica. O valor do produto depende de seu estado, ou

seja, se o produto estiver perfeito o fabricante consegue vendê-lo a R\$ 20,00 a unidade e se o produto apresentar algum defeito, devido aos erros de produção, o produto não é vendido e, portanto, seu valor é zero. Sabendo que o fabricante é neutro ao risco e maximiza o lucro esperado conhecendo as restrições do trabalhador, assinale falso ou verdadeiro:

- Ⓐ O trabalhador irá sempre preferir realizar o nível de esforço baixo.
- Ⓑ O fabricante irá sempre preferir que o trabalhador realize o esforço baixo, pois o contrato que induz o trabalhador a realizar o esforço alto é muito desfavorável.
- Ⓒ Caso o fabricante queira que o trabalhador realize o esforço baixo deverá pagar salários distintos para cada estado da natureza, mas inferiores ao contrato proposto no caso de induzir o esforço alto.
- Ⓓ O salário pago para que o trabalhador realize o esforço baixo é dado por $w = \frac{10}{100}$.
- Ⓔ O vetor de salários ofertado ao trabalhador para que este realize o esforço alto é dado por: $w_1 = \frac{10}{97}$, $w_2 = \frac{10}{101}$ em que w_1 é o salário no estado da natureza em que não ocorrem erros de produção e w_2 é o salário no estado da natureza em que ocorrem erros de produção.

Solução

Para resolver os itens desse exercício, convém determinar:

1. Se o empregador deseja contratar o trabalhador dando o incentivo adequado para que ele se esforce, qual deve ser o esquema de remuneração que maximiza o seu (do empresário) ganho esperado e qual será esse ganho?
2. Se o empregador deseja contratar o trabalhador sem dar incentivo para que ele se esforce, qual deve ser o esquema de remuneração e qual será o ganho esperado máximo do empresário?

Começamos com a primeira pergunta. Embora o enunciado não tenha deixado claro, para chegarmos às respostas do gabarito precisaremos supor que o empresário não é capaz de observar o nível de esforço do trabalhador, de tal sorte que a única forma que ele tem para incentivar o esforço é oferecendo um salário mais elevado caso não ocorram erros de produção. Sejam w_1 e w_2 , portanto, a remuneração do trabalhador caso, respectivamente, não ocorram ou ocorram erros de produção. Esse esquema de remuneração deve ser suficiente para fazer com que, caso aceite trabalhar para o empresário, o trabalhador prefira esforçar-se a não se esforçar (restrição de incentivo) e

também com que o trabalhador prefira aceitar a proposta do empresário a não aceitar (restrição de participação).

A restrição de participação requer que a utilidade esperada do trabalhador ao esforçar-se seja maior ou igual à sua utilidade esperada quando não se esforça, isto é:

$$\frac{3}{4} \left(100 - \frac{10}{w_1} - 2 \right) + \frac{1}{4} \left(100 - \frac{10}{w_2} - 2 \right) \geq \frac{1}{4} \left(100 - \frac{10}{w_1} \right) + \frac{3}{4} \left(100 - \frac{10}{w_2} \right)$$

Simplificando essa inequação encontramos a restrição de incentivo

$$w_2 \leq \frac{5w_1}{2w_1 + 5}. \quad (1)$$

A restrição de participação requer que o trabalhador tenha maior utilidade esperada caso aceite o trabalho comparativamente à utilidade esperada que teria caso não aceitasse o trabalho. Aqui surge mais um problema com o enunciado da questão. Ele diz que não há oportunidades alternativas de trabalho. Assim, poderíamos concluir que, caso não aceite trabalhar, o salário do trabalhador seria igual a zero. Todavia, nesse caso, não podemos calcular sua utilidade, pois função de utilidade enunciada não é definida para $w = 0$, e quando $w \rightarrow 0$, $U(w, e) \rightarrow -\infty$. Ocorre que, para chegar-se à resposta do gabarito é necessário supor que o trabalhador obtenha utilidade igual a zero caso opte por não trabalhar. Nesse caso, a restrição de participação, supondo que a restrição de incentivo seja atendida, requer que

$$\frac{3}{4} \left(100 - \frac{10}{w_1} - 2 \right) + \frac{1}{4} \left(100 - \frac{10}{w_2} - 2 \right) \geq 0$$

Simplificando, obtemos

$$\frac{15}{w_1} + \frac{5}{w_2} \leq 196. \quad (2)$$

Para encontrar o esquema de remuneração que maximiza o lucro esperado com o incentivo correto para o trabalhador esforçar-se devemos maximizar a diferença entre o ganho esperado da empresa e o pagamento esperado para o trabalhador. Como o ganho esperado é, desde que o trabalhador se esforce, independente do esquema de remuneração. O problema se reduz a minimizar o pagamento esperado do trabalhador dadas as restrições (1) e (2). Poderíamos encontrar a solução desse problema empregando as condições de Kuhn-Tucker. Porém, podemos usar o que sabemos sobre teoria da escolha envolvendo risco para tomar um atalho. Como a função $U(w, e)$ é côncava em relação a w (sua segunda derivada parcial em relação a w é $-5/w^2 < 0$), o trabalhador tem aversão ao risco. Isso significa que quanto maior for a diferença $w_1 - w_2$, maior deverá ser a remuneração esperada do trabalhador para satisfazer a condição de participação. Dessa maneira, a empresa deve oferecer a menor diferença possível entre w_1 e w_2 que ainda respeite a restrição de incentivo (1), ou seja a empresa deverá escolher

$$w_2 = \frac{5w_1}{2w_1 + 5}. \quad (3)$$

Substituindo na restrição de participação, ficamos com

$$\frac{15}{w_1} + \frac{5}{\frac{5w_1}{2w_1+5}} \leq 196.$$

Resolvendo para w_1 , obtemos

$$w_1 \geq \frac{10}{97}.$$

Como, em virtude da condição (3), w_2 é crescente em relação a w_1 , para minimizar o pagamento esperado ao trabalhador respeitando as condições de participação e de incentivo, a empresa deve escolher o menor valor de w_1 que atende a desigualdade acima, ou seja,

$$w_1 = \frac{10}{97}. \quad (4)$$

Substituindo em (3), encontramos o valor de w_2 :

$$w_2 = \frac{10}{101}. \quad (5)$$

Assim, caso queira contratar o trabalhador induzindo-o a realizar o esforço, a solução que maximiza o ganho esperado da empresa será oferecer a remuneração $w_1 = \frac{10}{97}$ caso o produto não tenha defeitos e $w_2 = \frac{10}{101}$ caso ele tenha defeitos. Com isso, o trabalhador deve esforçar-se, de tal sorte que a probabilidade de que o produto não tenha defeitos é de $3/4$ e seu ganho esperado será de

$$\frac{3}{4} \frac{10}{97} + \frac{1}{4} \frac{10}{101} = \frac{4000}{9797}.$$

Já o ganho esperado da empresa será

$$\frac{3}{4} \left(20 - \frac{10}{97}\right) + \frac{1}{4} \left(0 - \frac{10}{101}\right) = \frac{142955}{9797} \quad (6)$$

Passemos agora à pergunta 2. Caso não queira incentivar o trabalhador a esforçar-se a empresa não deve oferecer uma remuneração variável com a quantidade pois esta implica a necessidade de pagar um prêmio pelo risco assumido pelo trabalhador. Assim, ela oferecerá uma remuneração constante notada por w . O valor dessa remuneração deve ser tal que a utilidade do trabalhador ao recebê-la sem realizar o esforço seja maior ou igual a sua utilidade de reserva que supomos igual a zero, isto é

$$100 - \frac{10}{w} \geq 0.$$

Desse modo, a menor remuneração possível que ainda faz com que o trabalhador aceite o trabalho e não se esforce é

$$w = \frac{1}{10}. \quad (7)$$

Nesse caso, o ganho esperado da empresa, lembrando que, quando o trabalhador não se esforça, a probabilidade de que não ocorram defeitos de fabricação é de apenas $1/4$, é

$$\frac{1}{4} \times 20 - \frac{1}{10} = \frac{49}{10}. \quad (8)$$

Estamos agora em condições de avaliar os itens da questão.

- ⓐ Falso. Caso a empresa ofereça um esquema de remuneração compatível com as restrições de incentivo (1) e participação (2), o trabalhador preferirá realizar o nível de esforço alto.
- ⓑ Falso. O ganho esperado quando a empresa induz o esforço de modo a maximizar seu ganho esperado, dado pela expressão (6), é superior a 14. Já o maior ganho esperado quando a empresa não induz o esforço, dado pela expressão (8), é de apenas 4,9.
- ⓒ Falso. Já que o fabricante não quer induzir o trabalhador a realizar esforço baixo, ele não deve pagar salários distintos, visto que isso faz com que, dado que o trabalhador tem aversão ao risco, seja necessário oferecer um salário esperado maior para que o trabalhador aceite o emprego.
- ⓓ Verdadeiro. $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Esse foi o salário a que chegamos em (7).
- ⓔ Verdadeiro. Esses salários coincidem com os resultados (4) e (5).

QUESTÃO 11

Uma economia é formada por um consumidor, duas empresas idênticas e dois bens, x_1 e x_2 . As preferências do consumidor são representadas pela função de utilidade $U(x) = x_1 x_2$ e as dotações iniciais são $(100, 0)$. O bem x_1 não é produzível. O bem x_2 é produzido pelas duas empresas e a tecnologia é representada pela função de produção $x_2^i = 0,5x_1^i$, para $i = 1, 2$, em que x_1 é a quantidade de bem 1 utilizado como insumo pela empresa i -ésima e x_2 é a quantidade de bem 2 produzida pela mesma empresa. A partir da análise do equilíbrio competitivo, identifique a soma das quantidades produzidas ($x_1 + x_2$) no caso da alocação ótima de Pareto.

Solução

Primeiramente notemos a contradição do enunciado que, primeiramente, diz que “o bem x_1 não é produzível” e mais adiante pede “a soma das quantidades produzidas $x_1 + x_2$ no caso da solução ótima de Pareto.” Possivelmente, a

intensão do examinador era requerer “a soma das quantidades *consumidas* $x_1 + x_2$ no caso da alocação ótima de Pareto”.

As condições de produção são tais que a quantidade total produzida do bem x_2 é

$$x_2 = \frac{x_1^1}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{100 - x_1}{2}$$

sendo que aqui x_1 denota a quantidade consumida do bem x_1 . Como em uma economia com um único consumidor, a alocação ótima de Pareto é aquela que maximiza sua utilidade, para encontrar essa alocação, basta resolver o problema de maximizar

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

dada a restrição

$$x_2 = \frac{100 - x_1}{2}.$$

Substituindo essa restrição na função objetivo ficamos com o problema não condicionado de maximizar

$$x_1 \frac{100 - x_1}{2}.$$

Derivando e igualando a zero, encontramos a condição de máximo de primeira ordem:

$$50 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 50.$$

Substituindo na restrição de produção obtemos

$$x_2 = \frac{100 - 50}{2} = 25.$$

Portanto a soma das quantidades consumidas é $x_1 + x_2 = 75$.

QUESTÃO 12

Num mercado com uma função de demanda $x = 8 - 2p$, sendo x a quantidade demandada e p o preço de mercado, existem 10 empresas idênticas que formam um cartel e que tem custos médios e marginais constantes e iguais a 3. Se um dos agentes abandona o cartel sem ser detectado, consegue elevar seus lucros no curto prazo. Suponha que o agente que rompe o acordo enfrente o seguinte problema: se ele abandona o cartel, só obterá lucro durante um período ($t = 0$), porque será detectado e expulso do mercado. Para que taxa de juros o agente preferirá agir desta forma em lugar de permanecer durante toda sua vida fiel ao cartel? (OBS: em sua resposta multiplique o resultado obtido por 10).

Solução

Essa questão está mal elaborada pelas seguintes razões:

1. Se o agente escolhe abandonar o cartel para uma determinada taxa de desconto, ele também escolheria abandonar o cartel dada um taxa de desconto ainda mais elevada. Assim, não há uma única taxa de juros que fará o agente abandonar o cartel e, portanto, a resposta à questão colocada não é única. Possivelmente, o examinador queria perguntar qual é a taxa de juros mínima a partir da qual o agente estaria disposto a abandonar o cartel.
2. A resposta depende de se saber a forma pela qual o resultado de cartel será obtido, isto é, se as empresas anunciarão um único preço de cartel e atenderão as demandas por seus produtos de acordo com esse preço, ou se as empresas concordarão em limitar suas produções de acordo com a quantidade de cartel deixando as condições de demanda determinarem o preço do produto

Portanto, consideremos as respostas para duas hipóteses: a) no acordo de Cartel, todas as empresas se comprometem a vender seu produto pelo preço de cartel e b) no acordo de cartel, todas as empresas se comprometem a limitar sua produção de acordo com a quantidade que maximiza o lucro da indústria.

a) Cartel de preço:

Sejam p^m o preço de cartel e π^m o lucro obtido pelo conjunto das empresas quando todas elas praticam esse preço. Supondo-se que, quando todas as empresas praticam o mesmo preço, os consumidores escolhem aleatoriamente de que empresa comprarão o produto, o lucro esperado de cada empresa nesse contexto é $\pi_i^m = \pi^m/10$. Caso uma empresa decida abandonar o cartel, ela pode praticar um preço ligeiramente mais baixo do que p^m vendendo para todo o mercado e obtendo um lucro próximo a π^m . Assim, se r é a taxa que ela usa para descontar os lucros futuros, ela estará disposta a abandonar o cartel desde que o ganho em $t = 0$, $\pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9}{10}\pi$, compense a redução em seus lucros nos períodos remanescente de $\frac{\pi}{10}$ para 0, isto é

$$\frac{9}{10}\pi \geq \frac{1}{r} \frac{\pi}{10} \Rightarrow r \geq \frac{1}{9} \approx 11,11\%.$$

b) Cartel de quantidade:

Como todas as empresas apresentam custo médio, e portanto marginais, constantes. O custo marginal de produção do cartel também será igual ao custo marginal de cada empresa, ou seja 3. Para maximizar seu lucro, o cartel deve escolher uma quantidade produzida que iguale sua receita marginal a seu custo marginal. A função de demanda inversa é

$$p = 4 - \frac{x}{2}.$$

Assim, a receita do cartel pode ser expressa como

$$RT = x \times p = 4x - \frac{x^2}{2}$$

e, portanto, a receita marginal é

$$RMg = \frac{d}{dx}RT = 4 - x.$$

Igualando a receita marginal ao custo marginal, obtemos

$$4 - x = 3 \Rightarrow x = 1.$$

O preço de cartel é obtido substituindo-se essa quantidade na função de demanda:

$$p = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Como o lucro total é igual ao lucro unitário ($p - CM = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$) vezes o número de unidades produzidas (1), o lucro do cartel será

$$\pi^m = \frac{1}{2}.$$

Embora a produção total de cartel possa ser atingida através de incontáveis combinações de quantidades produzidas por empresa, é razoável imaginar que essa produção seja distribuída igualmente entre todas as empresas, de tal sorte que cada uma deverá produzir $1/10$ unidades de produto. Nesse caso, o lucro total será distribuído igualmente entre as firmas, cabendo a cada uma delas um lucro $\pi_i^m = 1/20$.

Imagine agora que uma empresa, digamos a empresa 1, cogite em abandonar o cartel. Nesse caso, sabendo que em $t = 0$ cada uma das outras empresas irá produzir $1/10$ unidades, ela deve escolher a quantidade a produzir de modo a maximizar seu lucro dado por

$$\pi_1 = \left[4 - \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{9}{10} \right) - 3 \right] x_1.$$

A condição de máximo de primeira ordem requer que

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{11}{20}.$$

Portanto, caso a empresa 1 abandone o cartel, seu lucro será

$$\pi_1^* = \left[4 - \frac{1}{2} \left(\frac{11}{20} + \frac{9}{10} \right) - 3 \right] \frac{11}{20} = \frac{121}{800}.$$

Para que ela abandone o cartel a diferença entre esse lucro e o lucro de cartel em cada período deve não inferior ao valor presente do fluxo de lucros de cartel nos períodos subsequentes:

$$\frac{121}{800} - \frac{1}{20} \geq \frac{1}{r} \times \frac{1}{20} \Rightarrow r \geq \frac{40}{81} \approx 49,38\%.$$

Note que, tanto no caso a) quanto no caso b), os valores encontrados para diferem dos 50% da resposta do gabarito. Em nossa opinião, essa questão deveria ter sido anulada.

QUESTÃO 13

Suponha uma economia com duas firmas competitivas, representadas por 1 e 2, que produzem o mesmo bem e tem as seguintes funções custo: $c_1(x_1) = x_1^2$, $c_2(x_2) = x_2^2$. A firma 1 exerce uma externalidade negativa sobre a firma 2 de modo que a função lucro da firma 2 é dada por: $\pi_2 = p_2x_2 - c_2(x_2) - e(x_1)$. Sabendo que $e(x_1) = x_1^2$ e que o preço do produto produzido é igual a 1, calcule a diferença entre a solução privada e a solução socialmente ótima na produção de bens da firma 1.

Solução

A questão foi anulada, possivelmente porque, caso as duas empresas sejam as únicas a produzir o bem, não é possível calcular a solução ótima sem conhecer as condições de demanda.

QUESTÃO 14

Considere que um aeroporto está localizado ao lado de um grande terreno que é propriedade de um incorporador imobiliário. O incorporador gostaria de construir moradias naquele terreno, mas o barulho do aeroporto reduz o valor das propriedades. Quanto maior for a intensidade do tráfego aéreo, menor o valor do montante de lucros que o incorporador pode obter com o terreno. Seja X o número de vôos diários e Y o número de moradias que o incorporador pretende construir. O Lucro Total do aeroporto (LA) é dado pela função $48 - X^2$ e o Lucro Total do incorporador (LI) é dado por $60Y - Y^2 - XY$. Identifique a diferença entre o Lucro Total dos dois agentes (LA + LI) em duas situações relativas às regras institucionais que regulam o comportamento dos agentes: (i) no caso da imposição de uma lei que responsabiliza o aeroporto por qualquer redução ocorrida no valor das propriedades; (ii) no caso em que os dois agentes optam pela formação de um conglomerado empresarial com o objetivo de maximizar o lucro conjunto.

Solução

Essa questão deveria ser anulada, visto que houve um erro na digitação da função que descreve o lucro do aeroporto. O correto seria $LA = 48X - X^2$.

Assumamos, portanto, que esse seja o caso. Entendendo-se que a “lei que responsabiliza o aeroporto por qualquer redução ocorrida no valor das propriedades” implica que o aeroporto deva indenizar o incorporador no valor de XY , teremos que, no caso (i), as funções de lucro de cada empresa, após a indenização passam a ser:

$$LI_i = 60Y - Y^2$$

e

$$LA_i = 49X - X^2 - XY.$$

Chamemos de Y_i o valor de Y que maximiza LI_i , ele deve satisfazer a condição de primeira ordem

$$60 - 2Y_i = 0 \Rightarrow Y_i = 30.$$

O aeroporto deve escolher um valor de X sabendo que o incorporador irá escolher $Y = Y_i = 30$. Chamando de X_i a escolha do aeroporto, esta deve satisfazer a condição de primeira ordem

$$48 - 2X_i - 30 = 0 \Rightarrow X_i = 9.$$

Com essas escolhas, o lucro da incorporadora será

$$LI_i = 60 \times 30 - 30^2 = 900$$

e o lucro do aeroporto será

$$LA_i = 48 \times 9 - 9^2 - 30 = 81.$$

O lucro conjunto será

$$LI_i + LA_i = 981.$$

No caso (ii), em que os dois agentes coordenam suas ações para maximizar o ganho comum, as escolhas dos valores ótimos de X e Y , que notaremos por X^* e Y^* , deverão maximizar a soma

$$L = LA + LI = 48X - X^2 + 60Y - Y^2 - XY.$$

As condições de máximo de primeira ordem são:

$$48 - 2X^* - Y^* = 0$$

e

$$60 - 2Y^* - X^* = 0.$$

Resolvendo essas duas equações, obtemos $X^* = 12$ e $Y^* = 24$. O lucro conjunto é obtido substituindo-se esses valores na expressão para a soma dos lucros das duas empresas:

$$L = LA + LI = 48X^* - X^{*2} + 60Y^* - Y^{*2} - X^*Y^* = 1008.$$

A diferença entre os dois lucros pedida pela questão é $L^* - L_i = 1008 - 981 = 27$.

QUESTÃO 15

Uma empresa é a única distribuidora de produtos alimentícios num mercado cuja demanda é dada pela função $P = 41 - Q$, sendo P o preço e Q a quantidade demandada. Os custos da empresa 1 seguem a função $C_1 = Q_1^2 + 2Q_1 + 6$. Se o governo fixa neste mercado um preço máximo de 30 unidades monetárias, identifique o valor da perda irrecuperável de eficiência.

Solução

Com o preço máximo igual a 30, o preço que efetivamente o monopolista pode cobrar para vender Q unidades de produto será o menor valor entre esse preço máximo e o preço de demanda $P = 41 - Q$. Este é maior, igual a, ou menor que 30, caso, respectivamente, $41 - Q > 30 \Rightarrow Q < 11$, $Q = 11$ e $Q < 11$. Desse modo, a receita do monopolista será

$$RT = \begin{cases} 30Q & \text{caso } Q \leq 11 \\ Q(41 - Q) & \text{caso } Q > 11 \end{cases}.$$

A receita marginal do monopolista será então

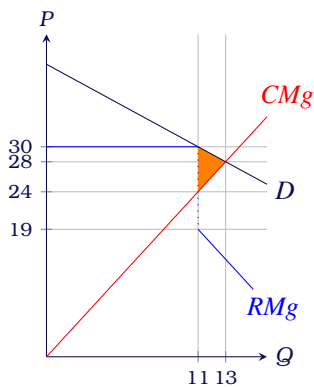
$$RMg = \frac{d}{dQ}RT = \begin{cases} 30 & \text{caso } Q < 11 \\ 41 - 2Q & \text{caso } Q > 11 \end{cases}.$$

Note que essa receita marginal não é definida para $Q = 11$. Nesse ponto, a curva de receita marginal apresenta uma quebra, pois quando Q se aproxima de 11 pela esquerda, a receita marginal se mantém constante igual a 30, mas quando Q se aproxima de 11 pela direita, a receita marginal tende a $41 - 2 \times 11 = 19$.

O monopolista deverá produzir todas as unidades para as quais a receita marginal seja superior ao custo marginal. Este é dado por

$$CMg = \frac{d}{dQ}C = 2Q + 2.$$

Para $Q = 11$, o custo marginal é $CMg(11) = 24$. Como o custo marginal é crescente, concluímos que o custo marginal é inferior a 30 para qualquer valor de Q menor ou igual a 11. Isso significa que para todas as unidades produzidas até a unidade 11 o custo marginal é inferior à receita marginal e, portanto, a empresa deve produzir, ao menos, 11 unidades. Novamente, como o custo marginal é crescente em Q , este é superior a 24 para qualquer valor de Q maior do que 11. Por outro lado, caso $Q > 11$, a receita marginal será inferior a 19. Assim, qualquer produção acima de $Q = 11$ implica custo marginal maior do que a receita marginal.



Isso é ilustrado na figura ao lado. Nela estão plotadas as curvas de demanda, de custo marginal e de receita marginal. A curva de custo marginal está abaixo da curva de receita marginal até o ponto em que $Q = 11$. A partir dessa quantidade, a curva de receita marginal dá um salto descontínuo para baixo e fica abaixo da curva de custo marginal. Desse modo, o monopolista maximiza seu lucro escolhendo $Q = 11$.

qualquer

O nível de produção eficiente ocorreria caso o monopolista igualasse seu custo marginal ao preço de demanda, ou seja, caso

$$2Q + 2 = 41 - Q \Rightarrow Q = 13.$$

A perda de eficiência é medida pela área abaixo da curva de demanda e acima da curva de custo marginal entre quantidade efetivamente produzida (11) e a quantidade eficiente (13), indicada pelo triângulo cor de laranja na figura ao lado. Sua área é

$$\frac{(30 - 24)(13 - 11)}{2} = 06.$$