Resolução do exame ANPEC de microeconomia para 2011

Roberto Guena de Oliveira

2 de junho de 2014

Questão 1

Com relação ao comportamento dos gastos do consumidor, pode-se afirmar que:

⓪ Um consumidor com uma função utilidade $U(X, Y) = X^4 Y$ gastará \$20 de cada renda \$100 na aquisição do bem Y.

① No processo de maximização da utilidade, o valor do Multiplicador de Lagrange equivale à utilidade marginal da renda.

② Considerando uma função utilidade $U(X, Y) = \min\{X, Y\}$, a Curva de Engel do bem 1 (X) é linear e crescente, com inclinação dada pelo preço correspondente (p_x).

③ No caso da função utilidade $U(X, Y) = -\frac{x^{-2}}{2} - \frac{y^{-2}}{2}$, as preferências do consumidor não permitem a agregação de demandas individuais para a definição da demanda do mercado (isto é, refletem uma função utilidade não homotética).

④ Pedro consome dois bens, x e y, cujos preços são $p_x = \$4$ e $p_y = \$2$, respectivamente, tem \$100 de rendimento e a sua função utilidade é $U(X, Y) = XY$. Então, para Pedro, a Curva de Engel tem a expressão (r representa um rendimento genérico) $X(r) = 0,125r$.

Solução

⓪ VERDADEIRO, caso entendermos que “gastará \$20 de cada renda \$100 na aquisição do bem Y” significa “gastará, para cada \$100 de sua renda, \$20 com a aquisição do bem Y”. Observe que a função de utilidade apresentada é do tipo Cobb-Douglas, isto é, tem a forma $U(X,Y) = X^a Y^b$, sendo que, no presente caso, $a = 4$ e $b = 1$. Também sabemos que as funções de demanda para essas preferências tem a forma

$$X(p_x, p_y, m) = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_x} \quad \text{e} \quad Y(p_x, p_y, m) = \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_y}$$

de tal sorte que os gastos com a aquisição de cada bem são:

$$p_x X(p_x, p_y, m) = \frac{a}{a+b} m \quad \text{e} \quad p_y Y(p_x, p_y, m) = \frac{b}{a+b} m.$$

No caso do presente exercício, em que $a = 4$ e $b = 1$, temos, portanto

$$p_y Y(p_x, p_y, m) = \frac{m}{5}.$$

Assim o consumidor gastará com a aquisição do bem Y um quinto de sua renda, ou, em outras palavras, \$20 para cada \$100 de renda.

① VERDADEIRO. Conforme vimos em sala de aula, o valor do multiplicador de Lagrange obtido ao se resolver o problema de maximização de utilidade é a utilidade marginal da renda do consumidor.

② FALSO. Se a função de utilidade é $U(X,Y) = \min\{X,Y\}$, então a função de demanda pelo bem X é

$$X(p_x, p_y, m) = \frac{m}{p_x + p_y}.$$

A inclinação da Curva de Engel, portanto será $1/(p_x + p_y)$, se medida em relação ao eixo horizontal ou $p_x + p_y$, se medida em relação ao eixo vertical.

③ FALSO. O enunciado afirma que a função de utilidade não é homotética, ou seja, que a taxa marginal de substituição não pode ser expressa como função exclusica da razão entre os consumos dos dois bens. Todavia, ao calcularmos a taxa marginal de subistituição associada à função de utilidade apresentada, obtemos

$$TMS = -\frac{UMg_x}{UMg_y} = -\frac{x^{-3}}{y^{-3}} = -\left[\frac{Y}{X}\right]^3.$$

Assim, a TMS pode ser expressa como fução exclusiva de Y/X e, consequentemente, a função de utilidade é homotética.

④ VERDADEIRO. A função de utilidade apresentada é, novamente, uma função Cobb-Douglas ($U = X^a Y^b$) com $a = b = 1$. A função de demanda pelo bem X é, portanto,

$$X(p_x, p_y, r) = \frac{1}{2}\frac{r}{p_x} = \frac{1}{2}\frac{r}{4} = 0,125r$$

QUESTÃO 2

⓪ A função dispêndio $E(p, U)$ é a função valor associada ao problema de minimização do dispêndio, condicionado a determinado nível de utilidade que o consumidor deseja alcançar. As seguintes propriedades são válidas para essa função: homogeneidade do grau zero nos preços dos produtos, não decrescente nos preços de cada produto p_i, crescente em U e côncava nos preços.

① Sabendo que a função de utilidade indireta de um consumidor é dada por: $V(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_1^{0,5}p_2^{0,5}}$,é possível afirmar que a função dispêndio associada a essas preferências é dada por: $E(p_1, p_2, U) = 2p_1^{0,5}p_2^{0,5}U$.

② Sabendo que as preferências de um consumidor são representadas pela relação binária descrita abaixo, na qual a cesta x é fracamente preferível à cesta y se e somente se:

$$x \succsim y \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ ou } x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2,$$

é possível afirmar que essas preferências são completas, transitivas e contínuas.

③ Se em uma economia só existem dois bens entre os quais o consumidor tem de escolher, então é possível afirmar que os dois são substitutos.

④ Um consumidor tem suas preferências pelos bens x e y representadas pela seguinte função utilidade:$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $U(x, y) = -\left[(x-3)^2 + (y-3)^2\right]$. Essas preferências exibem ponto de saciedade global na cesta (0,0).

Solução

⓪ FALSO. Embora, a função dispêndio seja, efetivamente, não decrescente nos preços dos bens, crescente em relação à utilidade e côncava em relação a preços, ela é homogênea de grau um (e não de grau zero) em relação a preços.

① VERDADEIRO. Basta aplicar a identidade

$$V(p_1, p_2, E(p_1, p_2, u)) = u,$$

o que, no presente caso, implica

$$\frac{E(p_1, p_2, U)}{2p_1^{0,5}p_2^{0,5}} = U,$$

isto, é, resolvendo para $E(p_1, p_2, U)$,

$$E(p_1, p_2, U) = 2Up_1^{0,5}p_2^{0,5}.$$

② FALSO. As preferências descritas não são contínuas. Para ver isso, lembre-se que se as preferências de um consumidor são ditas contínuas quando, para quaisquer duas cestas de bens $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pertencentes a seu conjunto de consumo, $x \succ y$ implica que qualquer cesta de bens z suficientemente próxima de x também será estritamente preferível a y ($z \succ y$). Mais formalmente, as preferências de um consumidor são contínuas caso, para quaisquer duas cestas de bens $x, y \in X$ (X é o conjunto de consumo), existe um valor real $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer cesta de bens $z \in X$, caso $|z - x| < \varepsilon$ então $z \succ y$. Isso não ocorre com as preferências apresentadas, pois, caso tenhamos duas cestas $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ com $x_1 = y_1$ e $x_2 > y_2$, podemos concluir pela descrição das preferências do consumidor que $x \succ y$. Todavia, tome por exemplo, uma cesta de bens $z = (z_1, z_2)$ com $z_1 = x_1 - \varepsilon/2$ e $z_2 = x_2$. Então $|z - x| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Todavia, como $z_1 < x_1 = y_1$ para qualquer ε positivo, teremos necessariamente $y \succ z$, não importa quão próxima a cesta z esteja da cesta x, o que viola a hipótese de continuidade das preferências.

③ AMBíGUO. Embora o gabarito dê a afirmação como verdadeira, parece-nos que o mais correto seria ANULAR esse item, pois sua resposta depende da interpretação que dermos ao termo ambíguo "bens substitutos". Esse termo pode tanto indicar o caso de "substitutos brutos" quanto o caso de "substitutos líquidos".

Dizemos que o bem i é substituto bruto do bem j caso

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} > 0,$$

sendo que x_i representa aqui a função de demanda marshalliana pelo bem i. Para o Varian (livro da bibliografia da ANPEC), o termo substituto é usado com esse significado de substituto bruto (página 118 da tradução da 7ª edição, leitura básica da ANPEC).

Claramente, não é necessariamente verdade que, quando existem apenas dois bens, estes sejam substitutos brutos um do outro. Para dar um exemplo, considere a função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right]^{-1}.$$

Você pode verificar com relativa facilidade que as funções de demanda marshallianas pelos bems 1 e 2 são, respectivamente

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + \sqrt{p_1 p_2}} \quad e \quad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2 + \sqrt{p_1 p_2}}.$$

Nesse caso, portanto, a função de demanda pelo bem 1 é decrescente em relação ao preço do bem 2 e, simetricamente, a função de demanda pelo bem 2 é decrescente em relação ao preço do bem 1. Os dois bens são complementos e não substitutos (brutos) um do outro.

Uma definição alternativa do termo "bens substitutos", conforme dissemos, é a definição de substitutos líquidos. Dois bens i e j são ditos substitutos líquidos caso

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} > 0,$$

sendo h_i a função de demanda compensada pelo bem i. Essa é a definição para bens substitutos líquidos que aparece, por exemplo, no manual do Nicholson. Também o Microeconomic Analisys de Hall R. Varian, manual de pós-graduação desse autor, adota define bens substitutos como sendo dois bens para os quais "quando o preço de um dos bens aumenta, a demanda hicksinada pelo outro bem aumenta". Alguns autores, cujos textos não constam na bibliografia da ANPEC, preferem uma definição um pouco mais ampla do termo substitutos (líquidos). É o caso, por exemplo, de Mas-Colell *et allia* em *Microeconomic Theory*, que classificam dois bens ℓ e k como substitutos caso $\partial\ell/\partial k \geq 0$. Apenas nesse último caso, a afirmação de que, quando há apenas dois bens, estes serão substitutos, é verdadeira. Para ver isso, considere a seguinte identidade:

$$U\left(h_1(p_1, p_2, u), h_2(p_1, p_2, u)\right) = u.$$

Se derivarmos essa identidade em relação a p_1, obtemos

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} + \frac{\partial h_2}{\partial p_1} = 0.$$

Como $\partial h_1/\partial p_1 \leq 0$ (lei da demanda compensada), podemos concluir que $\partial h_2/\partial p_2 \geq 0$. Então, quando há apenas dois bens, pode-se afirmar que esses dois bens são substitutos líquidos, de acordo com a definição dada pelo manual do Mas-Colell. Porém, a mesma conclusão não pode ser feita caso consideremos, como faz, por exemplo, o Nicholson, que dois bens i e j são substitutos (líquidos) caso $\partial h_i/\partial p_j > 0$. Nesse caso, não é necessariamente verdade que, a existência de apenas dois bens implique

que estes bens sejam substitutos líquidos, pois, por exemplo, no caso em que os dois bens são complementares perfeitos, a demanda compensada desses dois bens é uma constante em relação aos preços dos bens, isto é, se $U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, x_2\}$, então $h_1(p_1, p_2, u) = u/a$ e $h_2(p_1, p_2, u) = u$, de tal sorte que $\partial h_1/\partial p_2 = \partial h_2/\partial p_1 = 0$, ou seja, um aumento no preço de um dos bens não leva, necessariamente a um aumento na demanda compensada pelo outro bem.

④ FALSO. A função de utilidade assume valor negativo para quaisquer valores de x e y para os quais $x \neq 3$ e/ ou $y \neq 3$ e valor nulo quando $(x, y) = (3, 3)$. Portanto, há um ponto de saciedade na cesta $(3, 3)$ e não na cesta $(0, 0)$.

QUESTÃO 3

Sobre a Teoria da Produção analise as afirmativas abaixo:

⓪ A função de produção que exibe retornos constantes de escala é uma função homogênea do grau 0.

① Suponha uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, sendo os coeficientes técnicos a e b, tal que $a + b > 1$. A elasticidade de substituição desta função de produção também é superior à unidade.

② Suponha uma função de produção do tipo CES, definida da seguinte forma: . A elasticidade de substituição referente a essa função é definida por:

$$q = [k^{\rho} + l^{\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}} .$$

A elasticidade de substituição referente a essa função de produção é

$$\sigma = \frac{1}{1 - \gamma}$$

③ Suponha que $\pi(\cdot)$ é a função lucro do conjunto de produção Y e que $y(\cdot)$ é a correspondência de oferta associada. Suponha também que Y é fechado e satisfaz a propriedade de free disposal (livre descarte). Nesse contexto, segundo o Lema de Hotelling: se $y(p)$ consiste de um único ponto, então $\pi(\cdot)$ é diferenciável em p e $D_p\pi(p) = y(p)$.

④ A função lucro atende às propriedades de ser homogênea do grau 1 em preços e convexa nos preços.

Solução

⓪ FALSO. A função de produção que apresenta retornos constantes de escala é homogênea de grau 1 e não homogênea de grau zero.

① FALSO. A elasticidade de substituição (σ) é definida por

$$\sigma = \frac{dx_2/x_1}{d|TMST|}\frac{|TMST|}{x_2/x_1}.$$

No caso da função de produção do tipo Cobb-Douglas, isto é, da função de produção com a forma

$$y = kx_1^a x_2^b, \;\; k, a, b > 0,$$

temos

$$|TMS| = \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}, \text{ isto é, } \frac{x_2}{x_2} = \frac{b}{a}|TMST|.$$

Portanto, nesse caso,

$$\sigma = \frac{b}{a}\frac{|TMST|}{\frac{b}{a}|TMST|} = 1.$$

Assim, qualquer que seja a função de produção do tipo Cobb-Douglas, sua elasticidade de substituição será sempre igual a 1.

② FALSO. As produtividades marginais de k e l são, respectivamente,

$$\text{PMg}_k = \frac{\partial q}{\partial k} = \gamma k^{\rho-1}\left[k^\rho + l^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}-1}$$

e

$$\text{PMg}_l = \frac{\partial q}{\partial l} = \gamma l^{\rho-1}\left[k^\rho + l^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}-1}.$$

A razão entre essas duas produtividades marginais é o módulo da taxa marginal de substituição técnica, isto é,

$$|TMST| = \frac{PMg_k}{PMg_l} = \left(\frac{l}{k}\right)^{1-\rho}.$$

Resolvendo essa igualdade para l/k obtemos

$$\frac{l}{k} = |TMST|^{\frac{1}{1-\rho}}.$$

Usando esse resultado na fórmula da elasticidade de substituição ficamos com

$$\sigma = \frac{dl/k}{d|TMST|}\frac{|TMST|}{l/k} = \frac{1}{1-\rho}|TMST|^{\frac{1}{1-\rho}-1}\frac{|TMST|}{|TMST|^{\frac{1}{1-\rho}}} = \frac{1}{1-\rho}.$$

③ VERDADEIRO. A notação usada no enunciado da questão é algo diferente da notação normalmente empregada em livros texto de graduação. Ela deve ser interpretada da seguinte maneira:

- $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é o vetor de preços da economia.
- $y(p) = (y_1(p), y_2(p), \ldots, y_n(p))$ é um vetor no qual caso $y_i(p) > 0$, o bem i deverá ser interpretado como um produto e $y_i(p)$ indica a quantidade ofertada pela empresa do bem i e, caso $y_i(p) < 0$, o bem i deverá ser interpretado como um insumo e $|y_i(p)|$ indica a quantidade demandada desse insumo.
- $D_p\pi(p) = (\partial\pi(p)/\partial p_1, \partial\pi(p)/\partial p_2, \ldots, \partial\pi(p)/\partial p_n)$ é o vetor das derivadas parciais da função de lucro em relação aos preços dos diferentes bens. a quantidade demandada pela empresa do bem i

O lema de Hotelling diz que, caso a função de lucro seja diferenciável em relação ao preço do produto e em relação aos preços dos insumos, então, a derivada parcial da função de lucro em relação ao preço de um produto será igual à função de oferta desse produto e o negativo da derivada parcial da função de lucro em relação ao preço de um insumo será igual à função de demanda por esse insumo. De acordo com a notação acima, isso significa que, caso o bem i seja um produto ($y_i(p) > 0$),

$$\frac{\partial\pi(p)}{\partial p_i} = y_i(p)$$

e, caso o bem i seja um insumo ($y_i < 0$),

$$\frac{\partial\pi(p)}{\partial p_i} = -|y_i(p)| = y_i(p).$$

Desse modo,

$$D_p\pi(p) = (\partial\pi(p)/\partial p_1, \partial\pi(p)/\partial p_2, \ldots, \partial\pi(p)/\partial p_n) = (y_1(p), y_2(p), \ldots, y_n(p)) = y(p)$$

④ VERDADEIRO. Homogeneidade de grau um e convexidades em relação aos preços é uma propriedade da função de lucro.

Questão 4

Sobre a teoria do bem-estar em condições de Equilíbrio Geral, é correto afirmar que:

⓪ A localização dos agentes na fronteira das possibilidades de utilidade encontra-se condicionada pelos pesos atribuídos aos mesmos na função de bem-estar social.

① O Teorema da Impossibilidade de Arrow postula que as preferências sociais não são transitivas.

② Se os ingressos para uma competição são disponibilizados de graça para alunos da rede pública, mas estes alunos estão impedidos de revendê-los, então a alocação de recursos gerada é Pareto-eficiente.

③ Qualquer distribuição desejada de bem-estar entre indivíduos numa economia pode ser alcançada de forma eficiente através do mecanismo de preço, se as dotações iniciais estiverem sobre a curva de contrato e forem ajustadas adequadamente.

④ Suponha que 200 atacadistas operam como price-takers num mercado em que existem três bens (A, B e C), com as seguintes dotações: 1) 100 atacadistas possuem 10 unidades do bem A cada; 2) 50 atacadistas possuem 5 unidades do bem B cada; 3) 50 atacadistas possuem 3 unidades do bem C cada. Se a função utilidade dos atacadistas é dada por $X_A^{1/2}X_B^{1/4}X_C^{1/4}$ então no equilíbrio $P_B = 2P_A$ e $P_C = P_A/4$.

Solução

⓪ VERDADEIRO. A frase está um tanto confusa. O que significa, por exemplo, "a localização dos agentes na fronteira de possibilidades de utilidade"? Porém, com alguma boa vontade, parece que o examinador quer dizer que o ponto sobre a fronteira de possibilidades de utilidade correspondente à escolha social obtida em um processo de maximização de uma função de bem-estar social depende dos pesos dados nessa função de bem-estar social às utilidades de cada agente, o que é, verdadeiro.

① FALSO. O Teorema da Impossibilidade de Arrow não postula nada acerca das preferências sociais, ele sequer postula a existência de algo como "preferências sociais". Ele apenas afirma que qualquer regra de ordenação social que, aplicada a qualquer perfil de preferências individuais racionais (completas e transitivas) acerca das escolhas sociais consideradas, gere uma ordenação completa e transitiva que satisfaça aos critérios de Pareto e de independência das alternativas irrelevantes é uma ditadura.

② FALSO. A proibição de que os ingressos sejam revendidos pode impedir que potenciais melhorias paretianas decorrentes da venda de um ingresso de um estudante para um não estudante sejam realizadas. Dada essa possibilidade de melhorias paretianas não realizadas, não é possível afirmar que a alocação resultante da distribuição dos ingresso será eficiente.

③ FALSO. Chamemos de atacadistas do tipo 1, 2 e 3, respectivamente, os atacadistas que possuem inicialmente 10 unidades do bem A, 5 unidades do bem B e 3 unidades do bem C. Notemos as funções de demanda desses atacadistas pelos bens A, B, e C por, respectivamente, $A_i(P_A, P_B, P_C)$, $B_i(P_A, P_B, P_C)$ e $C_i(P_A, P_B, P_C)$, nas quais, $i = 1, 2, 3$ é um índice indicando o tipo de atacadista, e P_A, P_B e P_C são os preços dos bens A, B e C, respectivamente. Essas funções de demanda têm a forma (usamos diretamente a fómula da demanda para preferências Cobb-Douglas):

$$A_i(P_A, P_B, P_C) = \frac{1}{2}\frac{w_i}{P_A},$$
$$B_i(P_A, P_B, P_C) = \frac{1}{2}\frac{w_i}{P_B}$$

e

$$C_i(P_A, P_B, P_C) = \frac{1}{2}\frac{w_i}{P_C},$$

sendo que w_i representa o valor da dotação inicial do agente i, isto é, $w_1 = 10p_A$, $w_2 = 5p_B$ e $w_3 = 3p_C$.

A condição de equilíbrio no mercado do bem A é obtida igualando-se a quantidade a ser demandada desse bem, $100 \times A_1(P_A, P_B, P_C) + 50 \times A_2(P_A, P_B, P_C) + 50 \times A_3(P_A, P_B, P_C)$, ao total existente do mesmo, $100 \times 10 = 1.000$:

$$100\frac{1}{2}\frac{10P_A}{P_A} + 50 \times \frac{1}{2}\frac{5P_B}{P_A} + 50 \times \frac{1}{2}\frac{3P_C}{P_A} = 1.000,$$

isto é,

$$5P_B + 3P_C - 20P_A = 0$$

Apenas com essa condição de equilíbrio, já seria possível verificar que os preços não podem ser tais que $P_B = 2P_A$ e $P_C = P_A/4$, visto que, dado que P_A precisa ser positivo para induzir uma demanda finita pelo bem A, esses valores não resolvem a equação acima, pois

$$5(2P_A) + 3(P_A/4) - 20P_A = -\frac{37}{4}P_A \neq 0.$$

Se, não obstante, você quiser encontrar os preços relativos de equilíbrio, note que, de modo similar ao que fizemos com o bem A, a condição de equilíbrio no mercado do bem B é obtida igualando-se a quantidade a ser demandada desse bem, $100 \times B_1(P_A, P_B, P_C) + 50 \times B_2(P_A, P_B, P_C) + 50 \times B_3(P_A, P_B, P_C)$, ao total existente do mesmo, $50 \times 5 = 250$:

$$100\frac{1}{4}\frac{10P_A}{P_B} + 50 \times \frac{1}{4}\frac{5P_B}{P_B} + 50 \times \frac{1}{4}\frac{3P_C}{P_B} = 250,$$

isto é,

$$20P_A - 15P_B + 3P_C = 0$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas duas condições de equilíbrio acima para P_B e P_C encontramos

$$P_B = 2P_A \quad \text{e} \quad P_C = \frac{10}{3}P_A.$$

Questão 5

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

⓪ Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza W, de tal modo que sua função utilidade é dada por $U(W) = 1 - CW^{-a}$ em que a e C são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco.

① Supondo que João deve pagar \$2 para participar de uma competição cujo prêmio é \$19 e a probabilidade de ganhar 1/3. Se o agente possui uma função utilidade esperada definida por $U(x) = \log x$ e o seu nível corrente de riqueza é \$10, então não faz sentido que ele venha participar da competição.

② Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$ 100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece pagamento anual de \$ 70.000 em troca de toda a sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta.

③ Joana possui uma propriedade que vale \$ 300.000, mas está preocupada com seu futuro, cujo bem estar (U) depende integralmente daquele valor, segundo a relação $U(W) = W^{5/4}$. Em um dado ano, existe uma chance de 2% de que a propriedade pegue fogo, o que resultaria numa redução de seu valor para \$ 30.000. Neste caso, os indícios são de que Joana é avessa ao risco.

④ Supondo que Antonio possui uma função utilidade dada por $U(W) = \frac{W^{1/2}}{10}$, em que W equivale ao seu nível de riqueza. Supondo que ele participe de um jogo com distribuição de pay-offs apresentada no quadro abaixo, então a utilidade esperada do jogo equivale a \$ 2,5.

Situação do jogo	Pay-offs	Probabilidade
1	\$ 400	1/3
2	\$ 225	1/3
3	\$ 100	1/3

Solução

⓪ VERDADEIRO, desde que a função de utilidade apresentada seja do tipo Von-Neuman Morgentern. A função de utilidade é côncava, pois $U''(W) = -C\alpha(1+\alpha)W^{-(\alpha+1)} < 0$. Isso indica que o consumidor tem aversão ao risco.

① FALSO. Caso ele pague para entrar na competição, sua utilidade esperada será dada por

$$\frac{2}{3}\log(10-2) + \frac{1}{3}\log(29-2) = \log 12.$$

Caso ele não participe do jogo, terá por utilidade log 10. Assim, participar do jogo traz maior utilidade esperada a João.

② VERDADEIRO. O pagamento oferecido pela empresa é maior do que o valor esperado da colheita $= 100.000 \times 60\% - 20.000 \times 40\% = 52.000$. Desse modo, ele será aceito por qualquer consumidor com aversão ao risco.

③ FALSO. A função de utilidade de Joana é convexa ($U''(W) = 5/16W^{-3/4}$). Assim, ela é propensa ao risco.

④ FALSO. A utilidade esperada de Antônio será

$$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{400}}{10} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{225}}{10} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{100}}{10} = \frac{3}{2}.$$

Questão 6

Sobre a Teoria do Consumidor, assinale Verdadeiro ou Falso nas alternativas abaixo:

⓪ A hipótese de convexidade das preferências equivale à hipótese de taxa marginal de substituição decrescente.

① Para preferências homotéticas a taxa marginal de substituição depende somente da razão consumida entre as quantidades dos dois bens e não das quantidades totais de cada bem.

② Um consumidor representativo de determinada comunidade com hábitos particulares tem preferências representadas por $U = U(x_t^*, y)$ com $x_t^* = x_t - x_{t-1}$. Para esse tipo de preferências, coeteris paribus, quanto mais consumo passado o indivíduo escolher do bem , menor será o consumo atual escolhido.

③ Suponha uma estrutura de preferências representada pela seguinte função utilidade: . Agora suponha que o consumidor está diante de cestas de consumo que geram um nível de utilidade =10. Neste contexto, a taxa marginal de substituição para a cesta (5,20) é igual a 1/4.

④ No ponto de escolha ótima do consumidor, o Multiplicador de Lagrange associado ao problema de otimização condicionada da utilidade pode ser interpretado como a utilidade marginal da renda.

Solução

⓪ VERDADEIRO, mas ambíguo. A rigor, a afirmação só é válida para o caso em que as preferências são *estritamente* convexas e monotônicas. Nesse caso, quando caminhamos da esquerda para a direita ao longo de uma curva de indiferença, a taxa marginal de substituição é (em módulo) decrescente. Se considerarmos, todavia preferências convexas, mas não estritamente convexas, a taxa marginal de substituição pode ser constante. É o caso, por exemplo de um consumidor que considera dois bens substitutos perfeitos. As preferências desse consumidor são convexas (porém, não estritamente convexas), mas a taxa marginal de substituição entre esses bens é constante. Outro problema ocorre quando consideramos preferências estritamente convexas, mas não monotônicas. Por exemplo, suponha que as curvas de indiferença sejam círculos com centro comum em um ponto de saciedade. Nesse caso, dizer que a taxa marginal de substituição é decrescente não faz muito sentido.

① VERDADEIRO. De fato essa é uma forma de definir preferências homotéticas.

② FALSO. Como contra exemplo, tome o caso em que esse consumidor representativo possui preferências quase-lineares representadas por $U(x_t^*, y) = v(x_y^*) + y = v(x_t - x_{t-1})$ na qual $v'(x) > 0$ e $v''(x) < 0$. A condição de utilidade máxima no período t será dada por $v'(x_t - x_{t-1}) = p_x/p_y$ na qual p_x e p_y são, respectivamente, os preços dos bens x e y. Sejam $\hat{x}_{t-1}$ e $\tilde{x}_{t-1}$ dois possíveis valores de x_{t-1} com. Sejam também $\hat{x}_t$ a quantidade demandade do bem x no período t quanto $x_{t-1} = \hat{x}_{t-1}$ e $tildex_t$ a quantidade demandade de x quando $x_{t-1} = x\tilde{_{1-t}}$. Então, pela condição de equilíbrio, devemos ter

$$v'(\hat{x}_t - \hat{x}_{t-1}) = v'(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) = p_x/p_y.$$

Como, por hipótese $v'(x)$ é decrescente, dados p_x e p_y, só há um valor de x para o qual $v'(x) = p_x/p_y$ e, portanto,

$$\hat{x}_t - \hat{x}_{t-1} = \tilde{x}_t - \tilde{x}_t - 1,$$

isto é,

$$\hat{x}_t = \tilde{x}_t + \hat{x}_{t-1} - \tilde{x}_{t-1}.$$

Assim, se $\hat{x}_{t-1} > \tilde{x}_{t-1}$, devemos ter $\hat{x}_t > \tilde{x}_t$. Isso mostra que, em nosso contra exemplo, o consumo de x aumenta de acordo com o consumo passado.

③ AMBÍGUO. Como sabemos, o módulo da taxa marginal de substituição entre dois bens, x e y é dado pela razão entre as utilidades marginais desses dois bens. Caso essa razão seja UMg_x/UMg_y, a taxa marginal de substituição terá por unidade a razão unidades do bem y/unidades do bem x, caso a razão seja UMg_y/UMg_x a unidade de medida será unidades do bem x/unidades do bem y. Visto que, no caso do enunciado, a utilidades marginais dos bens x e y são, respectivamente

$$UMg_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad UMg_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}},$$

a taxa marginal de substituição pode ser expressa por

$$TMS = \frac{y}{x}\frac{\text{unidades de } y}{\text{unidades de x}}$$

ou por

$$TMS = \frac{x}{y}\frac{\text{unidades do bem } x}{\text{unidades do bem } y}.$$

Calculando essas valores no ponto $(5, 20)$, concluímos que há duas formas de expressar a taxa marginal de substituição:

$$TMS = 4\frac{\text{unidades do bem } y}{\text{unidades do bem} x} \quad \text{ou} \quad TMS = \frac{1}{4}\frac{\text{unidades do bem } x}{\text{unidades do bem } y}$$

④ VERDADEIRO. Você provavelmente já conhece essa interpretação para o multiplicador de Lagrange, todavia, aqui vai a prova. Por simplicidade, assumiremos uma solução interior.

Considere um consumidor com preferências localmente não saciadas representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na qual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as quantidades consumidas dos bens $1, 2, \ldots, n$, respectivamente. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ os preços desses bens e m a renda do consumidor. Este atingirá o equilíbrio ao resolver o problema de maximizar sua função de utilidade dada a restrição orçamentária $p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n \leq 0$. O lagrangeano desse problema é

$$\mathcal{L} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n - m)$$

As condições de primeira ordem para a maximização de utilidade desse consumidor são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}U(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda p_i = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

e

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = m \tag{2}$$

Sejam $x_1(p_1, \ldots, p_n, m), x_2(p_1, \ldots, p_n, m), \ldots, x_n(p_1, \ldots, p_n, m)$ as funções de demanda obtidas. Então, a função de utilidade indireta será

$$V(p_1, \ldots, p_2, m) = U\left(x_1(p_1, \ldots, p_n, m), \ldots, x_n(p_1, \ldots, p_n, m)\right)$$

Então, a utilidade marginal da renda será dada por

$$\frac{\partial V(p_1, \ldots, p_2, m)}{\partial m} = p_1\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial m} + \cdots + p_n\frac{\partial U}{\partial x_n}, \tag{3}$$

sendo as derivadas parciais da função de utilidade calculadas na escolha ótima $(x_1(p_1, \ldots, p_n, m), \ldots, x_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, m))$. Da condição de utilidade máxima (1), sabemos que, na solução ótima, para $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i.$$

Substituindo esse resultado na expressão para a utilidade marginal da renda ficamos com

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda\left[p_1\frac{\partial x_1(p_1, \ldots, p_n, m)}{\partial m} + \cdots + p_n\frac{\partial x_n(p_1, \ldots, p_n, m)}{\partial m}\right] \tag{4}$$

As cestas demandadas devem atender a condição (1), isto é, a igualdade abaixo é uma identidade:

$$p_1x_1(p_1, \ldots, p_2, m) + p_2x_2(p_1, \ldots, p_2, m) + \cdots + p_nx_n(p_1, \ldots, p_2, m) = m.$$

Derivando os dois lados dessa identidade em relação a m obtemos

$$p_1\frac{\partial x_1(p_1, \ldots, p_n, m)}{\partial m} + \cdots + p_n\frac{\partial x_n(p_1, \ldots, p_n, m)}{\partial m} = 1.$$

Substituindo esse resultado em (4), obtemos, finalmente

$$\frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \lambda(p_1, p_2, m).$$

Questão 7

Avalie as seguintes situações representadas através do instrumental da Teoria dos Jogos:

⓪ No jogo com pay-offs apresentados no Quadro 1 (abaixo), identifica-se uma solução de Equilíbrio de Nash ($A1$, $B3$) e duas estratégias que podem ser eliminadas por não serem racionais ($A3$ e $B2$).

① Em um jogo com um número finito de jogadores, cada um dos quais com um número definido de estratégias, se não existir um Equilíbrio de Nash baseado em estratégias puras, existirá pelo menos um equilíbrio baseado na adoção de estratégias mistas.

② Uma situação de Equilíbrio de Nash equivale necessariamente a um Ótimo de Pareto.

③ Num jogo do tipo “batalha dos sexos”, com *pay-offs* apresentados no Quadro 2 (abaixo), existe um equilíbrio baseado em “estratégias mistas” quando as probabilidades de Maria e João irem ao cinema são de, respectivamente, 2/3 e 1/3.

④ Suponha que as empresas A e B vendam produtos concorrentes e estejam decidindo se irão ou não empreender campanhas de propaganda. Cada empresa, contudo, será afetada pela decisão de sua concorrente. Se ambas as empresas decidirem fazer propaganda, a Empresa A terá lucro de 10 e a Empresa B terá lucro de 5. Se a Empresa A fizer propaganda e a Empresa B não fizer, a Empresa A lucrará 15 e a Empresa B terá lucro zero. Se ambas as empresas não fizerem propaganda, a Empresa A terá lucro 20 e a Empresa B terá lucro 2. Se apenas a Empresa B fizer propaganda, a Empresa A terá lucro de 6 e a Empresa B terá lucro de 8. Nestas condições, existe um Equilíbrio de Nash com estratégias puras, que, no entanto, pode ser alterado quando o jogo se estrutura na forma sequencial.

Quadro 1:

		B		
		$B1$	$B2$	$B3$
	$A1$	0,2	3,1	4,3
A	$A2$	2,4	0,3	3,2
	$A3$	1,1	2,0	2,1

Quadro 2:

		João	
		Cinema	Futebol
Maria	Cinema	2,1	0,0
	Futebol	0,0	1,2

Legenda: (Payoff Maria, Payoff João)

Solução

⓪ FALSO. De fato, a combinação de estratégias $(A1, B3)$ é um dos equilíbrios de Nash desse jogo, pois, quando o jogados B joga $B3$, a melhor resposta do jogador A é jogar $A1$ (ao jogar $A1$, seu payoff é 4, se ele jogar $A2$, seu payoff será 3 e, se ele jogar $A3$, seu payoff será 2), e, quando o jogador A joga $A1$, a melhor resposta do jogador B é jogar $B3$ e ter um payoff igual e 3 (as alternativas seria jogar $B1$ e obter um payoff igual a 2 ou jogar $B2$ e obter um payoff igual a 1). Vocâ também pode verificar que um outro equilíbrio de Nash para esse jogo é obtido quando o jogador A joga a estratégia $A2$ e o jogador B joga a estratégia $B1$.

Porém, não existe algo como uma estratégia irracional.

① VERDADEIRO. Esse é um dos resultados demonstrados pelo trabalho de John Nash que torna o conceito de equilíbrio de Nash aplicável em inúmeras situações.

② FALSO. Tomo, por exemplo, o equilíbrio de Nash de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros tal como o representado abaixo:

		Jogador B	
		Cooperar	Não cooperar
Jogador A	Cooperar	2,2	0,3
	Não cooperar	3,0	1,1

Nesse jogo, o equilíbrio de Nash ocorre quando os dois jogadores não cooperam. Mas esse é o único resultado Pareto ineficiente do jogo, pois é o único resultado para o qual existe um outro resultado alternativo (obtido quando os dois jogarores jogam cooperar) que melhora a posição de um jogador sem piorar a de outro.

③ VERDADEIRO. Em um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, cada um dos jogadores deve escolher ir ao cinema com uma probabilidade tal que faça com que o outro jogador fique indiferente entre ir ao cinema ou ao futebol, isto é que deixe os payoffs esperados desse outro jogador para essas iguais para essas duas escolhas. Sejam π_M e π_J as probabilidades com que Maria e João, respectivamente, vão ao cinema. Então, o payoff esperado de João, quando ele vai ao cinema é π_M e, quando ele vai ao futebol, esse payoff é $2(1-\pi_M)$. Igualando esses dois payoffs esperados, obtemos a probabilidade com que Maria escolhe ir ao cinema no equilíbrio de Nash em estratégias mistas: $\pi_M = 2/3$.

Já o payoff esperado de Maria quando ela vai ao cinema é $2\pi_J$ e, quando ela vai ao futebol, esse payoff passa a ser $1-\pi_J$. Igualando esses dois payoffs esperados obtemos a probabilidade com que João escolhe ir ao cinema no equilíbrio de Nash em estratégias mistas: $\pi_J = 1/3$.

④ FALSO. Observe abaixo a representação estratégica desse jogo quando jogado em movimentos simultâneos na qual *ECP* significa “empreender campanhas de propaganda” e *NECP* significa “não empreender campanhas de propaganda”:

		Empresa B	
		ECP	*NECP*
Empresa A	*ECP*	$10, 5^{AB}$	$15, 0$
	NECP	$6, 8^{B}$	$20, 2^{A}$

O equilíbrio de Nash ocorre quando as empresas *A* e *B* jogam *ECP*. Ademais, *ECP* é estratégia dominante para a empresa *B*, pois, quando a empresa *A* joga *ECP*, ao escolher *ECP*, a empresa *B* tem um payoff igual a 5 e, caso escolhesse *NECP*, teria um payoff igual a 0 e, quando a empresa *A* joga *NECP*, o maior ganho da empresa *B* continua sendo obtido quando ela escolhe *ECP*, pois essa estratégia gera um payoff igual a 8 contra um payoff igual a 2 da estratégia *NECP*. Isso significa que, caso a empresa *B* seja a primeira a jogar ela continuará escolhendo a estratégia *ECP* pois, independentemente da movimento seguinte da empresa *A*, esta estratégia lhe dará o melhor resultado. Por outro lado, caso a empresa *A* seja a primeira a jogar, ela anteverá que independentemente de seu movimento inicial, a melhor estratégia para a empresa *B* será "escolher *ECP* como resposta a qualquer movimento inicial da emprea *A*" e, consequentemente deverá jogar a melhor resposta para essa estratégia que é *ECP*. Assim, mesmo que o jogo seja transformado em um jogo sequencial, as duas empresas devem escolher empreender campanhas de propaganda.

QUESTÃO 8

No que se refere ao processo de precificação em condições de concorrência imperfeita, é possível afirmar que:

⓪ No equilíbrio de longo prazo em condições de Concorrência Monopolista o lucro supranormal é eliminado e o preço se iguala ao custo marginal.

① Um Monopólio perfeitamente discriminador é eficiente de Pareto.

② Em uma situação de Monopólio, o mark-up da firma (medido pelo Índice de Lerner) será inversamente proporcional ao valor da elasticidade preço da demanda da firma.

③ Um monopolista que discrimina preços em dois mercados, fixa preço maior no mercado que apresenta elasticidade preço mais elevada

④ Se um monopolista vende determinado produto atrelado a serviço pós-venda (caracterizando "vendas casadas") para quatro tipos de consumidores, cujos preços de reserva são apresentados no quadro abaixo, então a melhor opção para maximizar seus lucros é vender o produto a \$8 e o serviço a \$3, auferindo um lucro total de \$25.

Consumidor	Produto	Serviço
1	\$8	\$3
2	\$8	\$4
3	\$4	\$6
4	\$3	\$2

Solução

⓪ FALSO. Embora, de fato, em equilíbrio de longo prazo em um mercado em concorrência monopolística os lucros sejam eliminados, não é verdade que, nesse equilíbrio as empresas igualem seus custos marginais aos preços de seu produtos. Essas empresas continuam praticando uma margem sobre seus custos marginais, porém, com essa margem, o melhor que elas conseguem fazer é igualar os preços de seus produtos aos seus custos médios.

① VERDADEIRO. Um discriminador perfeito gera um excedente social máximo (portanto, é Pareto eficiente) e se apropria de todo esse excedente.

② VERDADEIRO. O índice de Lerner é dado pela expressão

$$\frac{p - CMg}{p}$$

na qual p é o preço praticado pelo monopolista e CMg é seu custo marginal de produção. A condição de lucro máximo do monopolista é dada pela igualdade entre receita marginal e custo marginal. Notando por q a quantidade demandada pelo produto do monopolista essa condição é dada por

$$p + \frac{\partial q}{\partial p} q = CMg$$
$$p - CMg = -q\frac{\partial q}{\partial p}$$
$$\frac{p - CMg}{p} = -\frac{q}{p}\frac{\partial q}{\partial p}$$
$$\frac{p - CMg}{p} = -\frac{1}{\epsilon}.$$

③ FALSO. O preço a ser praticado por esse monopolista no mercado i é dado pela expressão

$$p_i = CMg\frac{1}{1 - 1/|\epsilon_i|}$$

na qual p_i é o preço praticado no mercado i e ϵ_i é a elasticidade preço da demanda pelo produto do monopolista nesse mercado. Quanto maior for $|\epsilon_i|$, menor será $1/|\epsilon_i|$, maior será $1 - 1/|\epsilon_i|$ e, portanto, menor será o preço do produto.

④ FALSO. A rigor, não podemos qual seria a estratégia ótima de precificação para esse monopolista, pois o exercício não nos dá informações sobre a condição de custos desse monopolista. Se assumirmos que os custos de provisão do produto e dos serviços associados for zero, a melhor estratégia de preços para esse monopolista será vender o produto mais o serviço a uma preço único igual a \$10. Nesse caso ele faria a venda para três consumidores (1 a 3), auferindo um lucro igual a \$30.

Questão 9

Suponha uma situação de contrato entre um principal e vários agentes, que podem ser de dois tipos distintos com probabilidade $\pi_t = 1/2$. A função utilidade dos agentes é dada por: $U_t = S - C_t(x)$, $t = 1, 2$, em que S = salário pago ao agente, $C_t(x)$ a função custo referente a cada tipo de agente de produzir x unidades e t o índice que indexa o tipo de agente. Supõe-se ainda que $C_1(x) < C_2(x), \forall x > 0$ e $C_1'(x) < C_2'(x)$, $\forall x > 0$, ou seja, o agente do tipo 1 tem custo total e marginal de produção menor que o agente do tipo 2 para qualquer nível de produção. Os agentes não têm outra oportunidade no mercado de trabalho.

Diante dessa situação, avalie as seguintes afirmativas:

⓪ Se o principal puder distinguir cada tipo de agente e a função custo for do tipo $C_t = \frac{tx^2}{2}$, $t = 1, 2$, no nível de produção eficiente o agente do tipo 1 irá produzir a mesma quantidade que o agente do tipo 2.

① Supondo ainda que o principal observe os tipos de agentes, o salário pago a cada um dos agentes será igual a $S_1 = 0,5$ para o agente do tipo 1 e $S_2 = 0,25$ para o agente do tipo 2.

② Supondo agora que o principal não possa observar os tipos de agentes, é possível afirmar que no contrato ótimo ofertado pelo principal o agente do tipo 1 irá produzir exatamente a mesma quantidade que produzia no caso de simetria informacional e o agente de custo mais elevado irá produzir uma quantidade inferior à produzida no contrato com simetria informacional, ou seja, abaixo do nível de eficiência.

③ Supondo que o principal não possa observar os tipos de agentes, é possível afirmar que no contrato ótimo ofertado pelo principal o agente do tipo 2 irá auferir renda informacional, isto é, irá receber um salário que o deixa com nível de utilidade positivo.

④ Supondo que o principal não possa observar os tipos de agentes, é possível afirmar que o agente do tipo 1 irá produzir $x_1 = 1$ na alocação de equilíbrio e o agente do tipo 2 irá produzir $x_2 = 1/3$.

Solução

Antes de entrarmos na solução dos itens específicos, cabe notar que o exercício não é explícito quanto às unidades escolhidas para se medir o produto x e as funções de custo dos agentes $C_1(x)$ e $C_2(x)$. Como a solução demandará a comparação entre produto e custo, assumiremos que os custos dos agentes estão expressos em unidades de produto. Também assumiremos como condição necessária para resolver esse exercício que os custos marginais dos dois agentes sejam crescentes.

⓪ FALSO. No nível de produção eficiente, cada trabalhador irá igualar seu custo marginal ao preço do produto. Supondo-se que este seja igual a 1, ou seja supondo-se que a unidade de medida de valor é o próprio produto, isso implica

$$C_1'(x_1) = 1 \Rightarrow x_1 = 1$$

e

$$C_2'(x_2) = 1 \Rightarrow 2x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

① VERDADEIRO. Para induzir cada agente a produzir a quantidade eficiente, o principal deve oferecer uma remuneração (condicionada à obtenção da quantidade eficiente) suficiente para cobrir o custo do agente. Assim, para o agente 1, teremos

$$S_1 = C_1(1) = \frac{1^2}{2} = 0,5,$$

e para o agente 2 teremos

$$S_2 = C_2(0,5) = \frac{2 \times 0,5^2}{2} = 0,25.$$

② VERDADEIRO. O principal deverá desenhar um mecanismo de auto seleção oferecendo dois esquemas de remuneração possíveis. O primeiro esquema destina-se ao agente do tipo 1 e oferece uma remuneração S_1 condicionada à obtenção de um nível de produto q_1. O segundo esquema, destinado ao agente do tipo 2, oferece uma remureção S_2 condicionada à obtenção de um produto q_2. Evidentemente, deveremos ter $q_1 > q_2$, pois o principal tem interesse em induzir o agente de menor custo a gerar um nível mais elevado de produção. As restrições que o principal deve respeitar são:

a) A remuneração destinada ao agente 2 não pode ser inferior ao custo no qual ele incorre ao produzir q_2 unidades de produto:

$$S_2 \geq C_2(q_2) \Rightarrow S_2 \geq q_2^2 \tag{5}$$

b) A remuneração destinada ao agente 1 tem que ser suficientemente elevada para evitar que ele prefira fazer-se passar por um agente do tipo 2 produzindo q_2 unidades ao invés de q_1 unidades:

$$S_1 - C_1(q_1) \geq S_2 - C_1(q_2),$$

isto é,

$$S_1 - \frac{q_1}{2} \geq S_2 - \geq \frac{q_2}{2} \Rightarrow S_1 \geq \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}. \tag{6}$$

Como o principal visa a maximizar seu ganho esperado, as condições (5) e (6) acima deverão ser atendidas com igualdade. O ganho esperado do principal será dado por

$$GE = \frac{1}{2}(q_1 - S_2) + \frac{1}{2}(q_2 - S_2).$$

Substituindo nessa expressão as condições (5) e (6) com sinal de igualdade, obtemos

$$GE = \frac{1}{2}\left(q_1 - \frac{q_1^2 - q_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(q_2 - q_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(q_1 + q_2 - \frac{q_1^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{q_2^2}{2}\right)$$

Derivando essa expressão em relação a q_1 e em relação a q_2 e igualando os resultados a zero encontramos a condição de ganho esperado máximo de primeira ordem:

$$\frac{\partial GE}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 1 - q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 1$$

$$\frac{\partial GE}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow 1 - 3q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{3}.$$

As remunerações S_1 e S_2 são encontradas substituindos essas valores de q_1 e q_2 nas restrições (5) e (6):

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{5}{9}$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Assim, o principal deverá oferecer a cada agente duas alternativas: produzir 1 unidade e receber uma remuneração igual a 5/9 ou produzir 1/3 unidades e receber uma remuneração igual a 1/9. Os agentes do tipo 1 escolherão a primeira alternativa e os agentes do tipo 2 escolherão a segunda, de modo que os agentes do tipo 1 produzirão a quantidade ótima $x_1 = 1$, equanto os agentes do tipo 2 produzirão menos do que sua quantidade ótima ($1/3 < 1/2$).

③ FALSO. A remuneração do agente do tipo 2, já obtida na solução do item anterior é exatamente igual ao valor de seu produto. Quem recebe uma renda informacional é o agente do tipo 1. Essa renda é dada pela diferença entre sua remuneração e o custo no qual ele incorre $5/9-1/2 = 1/18$.

④ VERDADEIRO. Esse foi o resultado que obtivemos ao resolver o item ②.

Questão 10

No que se refere à intervenção pública nos mercados, observa-se que:

⓪ Supondo que a demanda em dois mercados (A e B) é dada por $D(X) = 8-P$, com a oferta da indústria no mercado A sendo dada por $S(X_A) = P_A$ e no mercado B por $S(X_B) = 2P_B - 4$, então o "peso morto" resultante da imposição de um imposto específico é maior no mercado B.

① A imposição de preço máximo ("teto") necessariamente conduz à perda de bem-estar e ao desabastecimento, independente da estrutura de mercado prevalecente.

② Em condições de Monopólio, a imposição de um imposto sobre os lucros irá acarretar aumento do preço e queda da quantidade produzida pela firma monopolista.

③ A eliminação de tarifas de importação conduz a redução do excedente apropriado pelos produtores locais, acompanhada por elevação do nível de bem-estar medido pelo excedente total.

④ Supondo uma demanda inversa dada pela equação $P = 210 - 2Q$, bem como um custo marginal privado (refletido na oferta de mercado) dado por $CMg = 150 + 2Q$, e admitindo que o processo de produção gera resíduos tóxicos cujo custo marginal para a sociedade é dado por $CMg_S = 2Q$, então, neste caso, a taxa de imposto específico que deve incidir sobre os produtores para atingir um ótimo social equivale a \$10 por unidade produzida.

Solução

⓪ VERDADEIRO. Expressemos a demanda e a oferta em sua forma inversa: $P^D = 8 - Q$ e $P_A^S = Q$ no mercado A e $P^D = 8$ e $P_B^S = 2 + Q/2$ no mercado B. Sem um imposto específico o equilíbrio se dá com a igualdade entre o preço de demanda e o preço de oferta. Assim, no mercado A a condição de equilíbrio é

$$8 - Q = Q \Rightarrow Q = 4,$$

e no mercado B a condição de equilíbrio é

$$8 - Q = 2 + Q/2 \Rightarrow Q = 4.$$

Com a intodução de um imposto específico no valor de t por unidade em cada um desses mercados, a condição de equilíbrio passa a ser que a diferença entre o preço de demanda e o preço de oferta seja igual a t. Portanto, no mercado A, o novo equilíbrio é obtido com

$$8 - Q - Q = t \Rightarrow Q = 4 - \frac{t}{2}.$$

Já no mercado B esse novo equilíbrio é obtido com

$$8 - Q - (2 + Q/2) = t \Rightarrow Q = 4 - \frac{2}{3}t.$$

O peso morto do imposto é área abaixo da curva de demanda e acima da curva de oferta entre a quantidade de equilíbrio após o imposto e a quantidade de equilíbrio sem imposto. Desse modo, o peso morto do imposto no mercado A (DWL_B) será dada por

$$DWL_A = \int_{4-\frac{t}{2}}^{4} (8 - Q - Q)\, dQ = \left[8Q - Q^2\right]_{4-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{t^2}{4}.$$

Já a perda de peso morto do imposto no mercado B (DWL_B) é dada por

$$DWL_B = \int_{4-\frac{2}{3}t}^{4} \left[8 - Q - \left(2 + \frac{Q}{2}\right)\right] dQ = \left[6Q - \frac{3}{4}Q^2\right]_{4-\frac{2}{3}t}^{4} = \frac{t^2}{3}.$$

Portanto a perda de peso morto no mercado B é superio à perda de peso morto no mercado A.

① FALSO. No caso de monopólio, a imposição de um preço máximo igual ao correspondente à igualdade entre o preço de demanda e o custo marginal do monopolista, induz um aumento na quantidade produzida e a eliminação da perda de peso morto do monopólio.

② FALSO. Seja $t(\pi)$ o montante de imposto a ser cobrado do monopolista no qual π é o lucro bruto, isto é, antes do abatimento do imposto. Se a estrutura de impostos tal que $\pi - t(\pi)$, isto é, o lucro líquido do imposto, é função monotonicamente crescente em π, então, ao maximizar π (o lucro bruto, ou o lucro antes da introdução do impostos) o monopolista também maximiza $\pi - t(\pi)$ (o lucro líquido após a introdução do imposto).

③ VERDADEIRO. A eliminição de tarifas sobre a importação de um bem leva à redução no preço de equilíbrio no mercado desse bem. Isso implica uma redução no preço obtido pelos produtores locais que, por essa razão vêem seu excedente diminuir. Todavia, os consumidores, por se depararem com um preço mais baixo têm um ganho de excedente que é superior à perda de excedente dos produtores locais, de tal sorte que o ganho de excedente social é positivo.

④ FALSO. O imposto a ser cobrado sobre os produtores dever ser igual ao custo social marginal calculado para o nível de produção ótimo do ponto de vista social, Q^*. Esse nível de produção é atingido quando a soma do custo marginal privado mais o custo marginal social decorrente dos resíduos tóxicos se iguala ao preço de demanda:

$$150 + 2Q + 2Q = 210 - Q \Rightarrow Q = 10.$$

Calculando o custo marginal social decorrente da geração de resíduos tóxicos para $Q = 10$, obtemos então a taxa a ser cobrada por unidade produzida: $t = 2Q^* = 20$.

Questão 11

Considere um jogo simultâneo, G, representado em forma matricial, com dois jogadores. O jogo de compromisso derivado do jogo simultâneo consiste em permitir que um dos jogadores se mova antes, escolhendo sua estratégia pura, que é anunciada ao outro jogador. O segundo jogador pode, então, escolher alguma de suas ações como resposta à estratégia do primeiro jogador. Pergunta-se:

⓪ Um Equilíbrio de Nash em G sempre é um Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo no jogo de compromisso derivado de G.

① Se G pode ser representado por uma matriz m por n, em que m representa o número de ações para o jogador 1 e n o número de ações para o segundo jogador, o primeiro jogador possui $m \times n$ estratégias no jogo de compromisso derivado de G.

② No Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo do jogo de compromisso derivado de G, o primeiro jogador nunca escolhe uma estratégia que seria estritamente dominada no jogo original, G.

③ No Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo do jogo de compromisso derivado de G, o segundo jogador nunca escolhe uma ação que seria estritamente dominada no jogo original, G.

④ Se a melhor resposta do segundo jogador à qualquer estratégia x do primeiro jogador sempre for única, o primeiro jogador sempre terá um ganho no Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo no jogo de compromisso maior ou igual ao ganho que teria em qualquer um dos Equilíbrios de Nash no jogo original, G.

Solução

⓪ FALSO. Considere, por exemplo, a representação estratégica do jogo abaixo:

		Jogador B C1	Jogador B C2
Jogador A	L1	2, 1	0, 0
Jogador A	L2	0, 0	1, 2

Esse jogo tem dois esquilíbrio de Nash: (C1,L1) e (C2,L2). Porém, caso o jogador A seja o primeiro a se mover e o jogador B escolha sua ação após observar o movimento do jogador A, haverá um único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos que ocorre quando o jogador A escolhe C1 e o jogador B escolher "jogar L1 caso o jogador A jogue C1 e L2 caso o jogador A jogue C2". Assim, o equilíbrio de Nash perfeito de subjogos gerará o resultado equivalente a apenas um dos equilíbrio do jogo não transformado em jogo sequencial.

① FALSO. O número de estratégias do primeiro jogador é igual ao seu número de ações (m). Para o segundo jogador, como cada estratégia define uma ação em resposta a cada possível ação do primeiro jogador, o número de possíveis estratégias é dado pelo produto do número de possíveis ações do primeiro jogador vezes o número de ações do segundo jogador ($m \times n$).

② FALSO. Considere como contra exemplo o jogo simultâneo com a seguinte representação estratégica.

		Jogador B	
		C1	C2
Jogador A	L1	2,1	4,0
	L2	1,0	3,1

Nesse jogo, para o jogador A, L2 é estratégia estritamente dominada pela estratégia L1. Porém se o jogo for transformado em um jogo sequencial com o jogador A escolhendo em primeiro lugar, ele perceberá que, caso escolha a estratégia L1, o jogador B deverá escolher C1 em resposta de tal sorte que seu payoff (do jogador A) será igual a 2. Se ele escolher a estratégia dominada do jogo inicial (simultâneo), isto é, se ele escolher L2, o jogador B deverá responder escolhendo C2 e o payoff de A será 3. Desse modo, quando o jogo é transformado em um jogo com movimentos sequenciais com o jogador A sendo o primeiro a jogar, no equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, o jogador A escolhe jogar L2, a estratégia estritamente dominada do jogo com movimentos simultâneos.

③ VERDADEIRO. Se uma ação $a1$ do segundo jogador é estritamente dominada no jogo G então existe uma outra ação $a2$ que, independentemente da escolha do primeiro jogador sempre propicia um payoff maior para o segundo jogador do que o payoff que ocerreria caso ele optasse por escolher $a1$. Desse modo, independenteme de qual seja o movimento do primeiro jogador, o segundo jogador sempre terá um maior payoff escolhendo $a2$ no lugar de $a1$. Portanto, ele nunca escolherá a estratégia estritamente dominada $a1$. (Nossa resposta difere da do gabarito).

④ VERDADEIRO. Seja (E_1, E_2) o perfil de estratégias do jogo G correspondente ao equilíbrio de Nash com maior *payoff* para o primeiro jogador no qual E_1 é a estratégia escolhida pelo primeiro jogador e E_2 é a estratégia escolhida pelo segundo jogador. Se o jogo for transformado em um jogo de compromisso, o primeiro jogador poderá escolher E_1; como E_2 é, por hipótese, a única melhor resposta do segundo jogador a E_1, o segundo jogador escolherá responder com a ação E_2. Portanto, o primeiro jogador poderá nesse caso garantir um *payoff* maior ou igual ao de qualquer equilíbrio de Nash no jogo G.

Questão 12

Considere uma comunidade com n indivíduos, com uma dotação inicial de bens de w_i, e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens, x_i, e do volume de um bem público G que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos, $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por $u_i = x_i + a_i \ln G$, em que $a_1 > 1$. Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

⓪ Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente $2G/n$.

① Apenas metade dos indivíduos caroneará (free ride) no dispêndio dos outros.

② A solução Pareto Ótima envolve apenas o indivíduo com maior a_i contribuindo.

③ A solução Pareto Ótima coincide com a solução descentralizada.

④ O indivíduo com maior a_i colabora com metade do valor do bem público.

Solução

Para respondermos aos itens dessa questão, determinemos a condição de equilíbrio de provisão do bem público descentralizada e a condição de provisão ótima desse bem.

Quando os indivíduos tomam suas decisões descentralizadamente, a contribuição máxima que cada indivíduo está disposto a fazer é a que maximiza sua função de utilidade. Assim, o indivíduo i deverá escolher um nível de contribuição não negativa que maximize

$$(m_i - g_i) + a_i \ln\left(g_i + \sum_{j \neq i} g_j\right),$$

sendo que m_i é a renda do indivíduo i. Derivando em relação a g_i que é a variável de controle do indivíduo e igualando a zero, obtemos a condição de maximização de utilidade desse indivíduo:

$$g_i = a_i - \sum_{j \neq i} q_j.$$

Assumindo que g_i não possa ser negativo, ficamos com

$$g_i = \max\left\{0, a_i - \sum_{j \neq i} q_j\right\}. \tag{7}$$

O equilíbrio descentralizado ocorre quando a expressão acima é verdadeira para todos os indivíduos. Para caracterizá-la com maior facilidade suponha que os indivíduos sejam ordenados de tal modo que $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$. Se $a_n > a_{n-1}$ o equilíbrio descentralizado se dará com $g_n = a_n$ e $g_i = 0$ para $i < n$. Se houver um inteiro $m < n$ para o qual $a_m = a_{m+1} = \cdots = a_n$ então o equilíbrio será caracterizado por $g_i = 0$ caso $i < m$ e $\sum_{i=m}^{n} g_i = a_n$. Note que, nesse último caso, há infinitos equilíbrios possíveis, todos gerando a mesma provisão do bem público.

A quantidade ótima de provisão do bem público, G^*, é a que iguala o custo marginal dessa provisão à soma das disposições marginais a pagar dos indivíduos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{G} = 1 \text{ ou seja, } G^* = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{8}$$

O esquema de financiamento para a obtenção dessa quantidade ótima do bem público é, do ponto de vista da eficiência, fortemente arbitrário. Qualquer combinação factível de contribuições $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} g_i = G^*$ é compatível com o critério de ótimo de Pareto.

⓪ FALSO. Não há como dizer isso. No caso da solução descentralizada, o número de indivíduos que contribuirão para a aquisição do bem público será igual ao número de indivíduos com a_i máximo. No caso da solução ótima, o número de indivíduos que devem contribuir para a aquisição do bem público é arbitrário.

① FALSO. Vide comentário do item anterior.

② FALSO. A solução Pareto ótima define apenas a quantidade a ser provida do bem público e não que indivíduos deverão contribuir para essa provisão.

③ FALSO. Comparando as condições (7) e (8), concluímos que, via de regra, $G^* > \hat{G}$.

④ Falso. Na solução ótima não há regra para a colaboração de cada indivíduo. Na solução descentralizada, caso o indivíduo com maior a_i contribuirá com a totalidade dos gastos com a aquisição do bem público.

Questão 13

Considere dois agentes,$i = 1, 2$,que estão decidindo a que velocidade chegam a um destino. Cada um deles possui uma função utilidade $U_i(v_i) = 2 \times v_i$, em que v_i é a velocidade que eles estão trafegando. Só que, quanto mais rápido eles andam pela estrada, maior a probabilidade de ocorrência de um acidente, que é denotada por $p(v_1, v_2)$, e que dá a eles um custo de $0,5$ cada. A partir destas afirmações, responda V ou F as alternativas a seguir.

⓪ Há um incentivo para que os motoristas dirijam mais rápido do que o socialmente ótimo.

① Se o agente for multado na eventualidade de um acidente, a velocidade em que ele trafega é maior.

② A multa que faria com que os agentes andassem pela estrada à velocidade socialmente ótima é de 0,5

③ Na multa socialmente ótima, a despesa que os agentes teriam de incorrer com a multa é superior ao custo do acidente.

④ Se o primeiro agente somente deriva utilidade se não houver acidente, a multa ótima para este agente independe da velocidade em que os agentes estão se movendo.

Solução

⓪ VERDADEIRO. Ao aumentar sua velocidade, cada agente provoca um custo adicional para si dado pelo produto entre o custo de 0,5 vezes o impacto do aumento em sua velocidade sobre a probabilidade de que ocorra um acidente e um custo adicional para o outro agente de igual valor provocado pelo aumento na probabilidade de acidente. Para decidir em que velocidade trafegar, o agente só leva em consideração o primeiro custo, visto que o segundo será arcado pelo outro agente. Assim, cada agente tende a subestimar o custo de sua velocidade e, com isso, trafegar em uma velocidade superior à que seria ótima.

① FALSO. Caso o agente seja multado na eventualidade de um acidente, o custo do acidente será majorado. Isso gerará um incentivo adicional para que o agente procure evitar a ocorrência de acidente através da redução de sua velocidade.

② VERDADEIRO. Tal multa faria com que cada agente, ao escolher sua velocidade, considerasse não apenas o custo do acidente para si, mas também o custo desse acidente para o outro agente.

③ FALSO. Na multa socialmente ótima, cada agente paga na forma de multa o dano causado ao outro agente.

④ VERDADEIRO. De fato a multa ótima a ser imposta ao primeiro agente independe de suas preferências, mas depende do custo do acidente para o outro agente. Visto que este independe das velocidades trafegadas, tal multa não é função das velocidades com que os agentes se movem.

Questão 14

Suponha que uma firma opere em dois sub-mercados cujas demandas são dadas, respectivamente, pelas equações $D_A(P) = 3 - \frac{P}{2}$ para $P < 6$ (e zero em outras situações) e $D_B(P) = 4 - \frac{P}{2}$ para $p < 8$ (e zero em outras situações). Sabendo que a firma opera com uma função custo total dada por $CT(X) = X$, diga qual a relação (Lucro 1/Lucro 2) estabelecida entre o montante de lucros gerados em duas situações distintas: (1) Quando a firma pratica uma discriminação perfeita através do estabelecimento de uma "tarifa duas-partes"; (2) Quando a firma estabelece preços diferentes para os dois sub-mercados, segundo o princípio da "discriminação de 3º grau".

Solução

Note que o custo marginal desse firma é $CMg = \frac{d}{dX}C(X) = 1$. Será mais conveniente trabalhar com as funções de demanda inversa nos dois mercados:

$$P_A = 6 - 2Q_A \quad \text{e} \quad P_B = 8 - 2Q_B.$$

O discriminador perfeito vende a quantidade para a qual o preço de demanda é igual ao custo marginal e tem por receita a área abaixo da curva de custo de demanda entre zero e essa quantidade. Assim, se a firma operar como discriminadora perfeita de preços, no mercado A, ela venderá uma quantidade tal que

$$6 - 2Q_A = 1 \Rightarrow Q_A = \frac{5}{2},$$

obtendo uma receita dada por

$$R_A = \int_0^{5/2} (6 - 2Q)dQ = [6Q - Q^2]_0^{5/2} = \frac{35}{4},$$

e um lucro dado por

$$\Pi_A = R_A - C(5/2) = \frac{35}{4} - \frac{5}{2} = \frac{25}{4}.$$

Similarmente, no mercado B, a firma deverá vender uma quantidade tal que

$$8 - 2Q_B = 1 \Rightarrow Q_B = \frac{7}{2},$$

obtendo uma receita igual a

$$R_B = \int_0^{7/2} (8 - 2Q)\, dQ = \left[8Q - Q^2\right]_0^{7/2} = \frac{63}{4},$$

e um lucro igual a

$$\Pi_B = R_B - C(7/2) = \frac{63}{4} - \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

Portanto, caso atue como um discriminador perfeito, a firma obterá um lucro total de

$$\Pi^* = \frac{25}{4} + \frac{49}{4} = \frac{37}{2}. \tag{9}$$

No caso em que a firma pratica discriminação de preços de terceiro grau entre os dois mercados, deve igualar as receitas marginais dos dois mercados ao seu custo marginal. As receitas totais nos mercados A e B são dadas, respectivamente por

$$RT_A = 6Q_A - 2Q_A^2 \quad \text{e} \quad RT_B = 8Q_B - 2Q_B^2.$$

Portanto, as receitas marginais são

$$RMg_A = 6 - 4Q_A \quad \text{e} \quad RMg_B = 8 - 4Q_B.$$

Desse modo, a condição de lucro máximo sob um esquema de discriminação de preços de terceiro grau é

$$RMg_A = RMg_B = CMg \Rightarrow 6 - 4Q_A = 8 - 4Q_B = 1$$

Resolvendo para Q_A e Q_B obtemos

$$Q_A = \frac{5}{4} \quad \text{e} \quad Q_B = \frac{7}{4}$$

Os preços correspondentes a essas quantidades sobre as respectivas curvas de demanda são

$$P_A = \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad P_B = \frac{9}{2}.$$

Então, os lucros em cada um dos mercados serão dados por

$$\pi_A = P_A Q_A - C(Q_A) = \frac{7}{2}\frac{5}{4} - \frac{5}{4} = \frac{25}{8}$$

e

$$\pi_B = P_B Q_B - C(Q_B) = \frac{9}{2}\frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{49}{8}.$$

O lucro total da firma será

$$\overline{\Pi} = \pi_A + \pi_B = \frac{37}{4}. \tag{10}$$

Comparando as equações (9) e (10) chegamos, enfim à razão pedida pela questão:

$$\frac{\Pi^*}{\overline{\Pi}} = \frac{37/2}{37/4} = 2$$

Questão 15

Uma firma possui duas plantas com funções custos distintas. A planta 1 apresenta a seguinte função custo total:$C_1(Y_1) = \frac{Y_1^2}{2}$. A planta 2 apresenta a seguinte função custo total: $C_2(Y_2) = Y_2$. Calcule o custo total que o produtor proprietário dessas duas plantas irá incorrer se decidir produzir 1,5 unidades.

Solução

A fim de minimizar seus custos de produção, a firma deve alocar tal produção entre as duas plantas de modo a igualar seus custos marginais de produção. O custo marginal de produção na planta 1 é

$$CMg_1 = \frac{d}{dY_1}\frac{Y_1^2}{2} = Y_1.$$

Já o custo marginal de produção na planta 2 é

$$CMg_2 = \frac{d}{dY_2}Y_2 = 1.$$

Portanto, a condição de igualdade entre os dois custos marginais requer que

$$Y_1 = 1.$$

Como a firma deseja produzir $1,5$ unidades, deverá, alocar 1 unidade na planta 1 com custo de produção igual a $C_1(1) = 1/2$ e $0,5$ unidade na planta 2 com custo de produção igual a $C_2(1/2) = 1/2$, de tal sorte que o custo total de produzir $1,5$ unidades será igual a $C_1(1) + C_2(2) = 1$.