Teoria do Consumidor: Escolha Envolvendo Risco

Excedente do consumidor e equação de Slutsky

Roberto Guena de Oliveira

USP

1 de julho de 2015

Estrutura da aula

1. Consumo contingente
2. Utilidade esperada
3. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
4. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
5. Utilidade média variância
   - O modelo CAPM

Estrutura da aula

1. Consumo contingente
2. Utilidade esperada
3. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
4. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
5. Utilidade média variância
   - O modelo CAPM

Estado da natureza

Definição

Um estado da natureza ou estado do mundo ou, simplesmente, resultado é uma especificação completa dos valores de todas as variáveis relevantes no horizonte de tempo relevante.

Exemplo

Suponha um mundo em que tudo dependa de dois lançamentos seguidos de uma moeda. Notemos por C a ocorrência de cara e por R a ocorrência de coroa. Os estados de natureza são:

$$(C, C), (C, R), (R, C), (R, R)$$

Eventos

Definição

Um evento é um conjunto de estados de natureza. Dizemos que um evento ocorre quando ocorre um de seus elementos.

Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, são, entre outros, eventos: “o primeiro lançamento dar cara” – $\{(C,R),(CC)\}$– e “o primeiro lançamento resulta diferente do segundo lançamento” – $\{(C,R),(R,C)\}$.

Consumo contingente

Um plano de consumo contingente é uma descrição completa das quantidades consumidas de cada bem em cada possível estado de natureza.

Redefinindo mercadoria

Mercadoria

Em mercados contingentes, uma mercadoria é um bem a ser entregue desde que ocorra um determinado evento.

Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, e só existe dinheiro, são, entre outras, mercadorias: “R$ 1,00 caso o primeiro lançamento der cara”, “R$ 1,00 caso os dois lançamentos dêm cara” e “R$ 1,00 independentemente dos resultados dos dois lançamentos.”

Mercados contingentes

São mercados em que há negociação de mercadorias definidas em função de diferentes eventos.

Mercados contingentes: exemplo

Considere um mundo no qual há apenas dois estados de natureza:

Estado b Parte do patrimônio de um consumidor é detruída.

Estado g O patrimônio do consumidor é mantido intacto.

- As preferências desse consumidor dependem apenas do valor de seu patrimônio em cada um desses estados.
- Há um mercado de seguros que oferece um seguro contra o estado b cobrando, nos dois estados de natureza, γ reais por R$1,00 segurado.

Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

w_b^0	o patrimônio no estado b quando não é feito o seguro.
w_g^0	o patrimônio no estado g quando não é feito o seguro.
w_b	o patrimônio no estado b
w_g	o patrimônio no estado g
K	o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1-\gamma)$$

Resolvendo as duas equações, de modo a eliminar o K, obtemos

$$w_g + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1-\gamma} w_b^0$$

Exemplo – escolha do consumidor

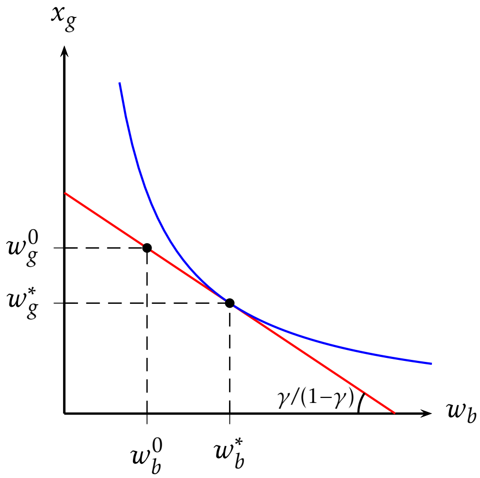
Se as preferências do consumidor forem representadas pela função de utilidade

$$U(w_b, w_g),$$

seu problema é escolher w_b e w_g de modo a maximizar essa função, respeitando a restrição orçamentária:

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1-\gamma)$$

Exemplo – escolha do consumidor
Ilustração gráfica



Estrutura da aula

1. Consumo contingente
2. Utilidade esperada
3. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
4. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
5. Utilidade média variância
   - O modelo CAPM

Loterias

Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sendo que o prêmio i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) é associado a uma probabilidade de ocorrência π_i de tal sorte que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

notação

$$L = (c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

Loterias simples e compostas

Loteria simples: Os prêmios alternativos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ não são loterias;

Loteria composta: Ao menos um dos prêmios é uma loteria.

Forma reduzida de uma loteria composta: é a loteria simples que dá as probabilidades com que a loteria composta pagará prêmios que não são loterias.

Reduzindo uma loteria composta a uma loteria simples: Exemplo

Suponha as seguintes loterias nas quais c_1, c_2 não são loterias:

$$L_1 = (c_1, c_2; \pi_1^1, \pi_2^1) \quad L_2 = (c_1, c_2; \pi_1^2, \pi_2^2) \quad \text{e } L_3 = (L_1, L_2; \pi_1^3, \pi_2^3)$$

A forma reduzida da loteria L_3 é

$$(c_1, c_2; \pi_1^3 \pi_1^1 + \pi_2^3 \pi_1^2, \pi_1^3 \pi_2^1 + \pi_2^3 \pi_2^2)$$

Preferências sobre loterias: hipóteses

Preferências completas: $L_i \succsim L_j$ e/ ou $L_j \succsim L_i$, para quaisquer possíveis loterias L_i e L_j.

Preferências transitivas: Para quaisquer loterias possíveis L_i, L_j, L_k, se $L_i \succsim L_j$ e $L_j \succsim L_k$, então $L_i \succsim L_k$.

Equivalência de loterias: para duas loterias possíveis quaisquer L_i e L_j com a mesma forma reduzida, $L_i \sim L_j$.

Preferências sobre loterias: hipóteses (continuação)

Axioma da independência: Sejam L_i, L_j e L_k três loterias possíveis quaisquer então $L_i \gtrsim L_j$ se, e somente se,

$$(L_i, L_k; \pi, 1-\pi) \gtrsim (L_j, L_k; \pi, 1-\pi).$$

Hipótese de continuidade: Sejam L_i, L_j e L_k três loterias possíveis quaisquer. Então os conjuntos

$$\left\{\pi \in [0,1] : (L_i, L_j; \pi, 1-\pi) \gtrsim L_k\right\}$$

e

$$\left\{\pi \in [0,1] : L_k \gtrsim (L_i, L_j; \pi, 1-\pi)\right\}$$

são fechados.

Utilidade Esperada

John Von Neumann e Oskar Morgenstern[1] mostraram que, desde que as preferências de um consumidor sobre o universo das loterias sejam completas, transitivas, e satisfaçam o axioma da independência e as hipótes de equivalência de loterias e de continuidade, tais preferências podem ser representadas por uma função de utilidade U com a seguinte propriedade:

$$U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2).$$

na qual $u(c_1)$ e $u(c_2)$ são as utilidade de se ganhar os prêmios c_1 e c_2, respectivamente, com 100% de certeza. Qualquer função de utilidade com essa propriedade é chamada de função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern ou de função de utilidade com propriedade utilidade esperada.

[1] *Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Un. Press, 1943.*

Transformações afim

Definição

Caso tenhamos $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. Dizemos que $V(\cdot)$ é uma transformação monotônica afim de $U(\cdot)$.

Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$ e $V(\cdot)$ são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

Concavidade

Note que a concavidade ou convexidade de uma função é preservada por transformações monotônicas afim.

Valor esperado de uma loteria

Caso uma loteria

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$$

ofereça apenas prêmios monetários, é possível definir o valor esperado dessa loteria por

$$VE = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 + \cdots + \pi_n c_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i c_i$$

Exemplo

Uma pessoa investiu toda sua riqueza w em ações de uma empresa que podem, em um ano, valorizar-se 20% com probabilidade $\frac{3}{4}$ ou desvalorizar-se 10% com probabilidade $\frac{1}{4}$. A riqueza dessa pessoa daqui a um ano pode ser representada pela loteria

$$(1.2w, 0.9w; 0.75, 0.25).$$

O valor esperado dessa loteira, ou seja o valor esperado de sua riqueza para daqui a um ano, é

$$0.75 \times 1.2w + 0.25 \times 0.9w = 1.125w.$$

Exemplo: questão 15 – ANPEC 2007

Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade von Neumann-Morgenstern tem a forma funcional $u(x) = K - \frac{a}{x}$, em que a e K são constantes positivas e $x > \frac{a}{K}$. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade p e a reduz à terça parte com probabilidade $1 - p$. Qual deve ser o valor mínimo de p para que o indivíduo aceite participar da loteria? Multiplique a probabilidade encontrada por 100. **R:75**

Estrutura da aula

Estrutura da aula

Definições

Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é aveso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

Propenção ao risco

Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

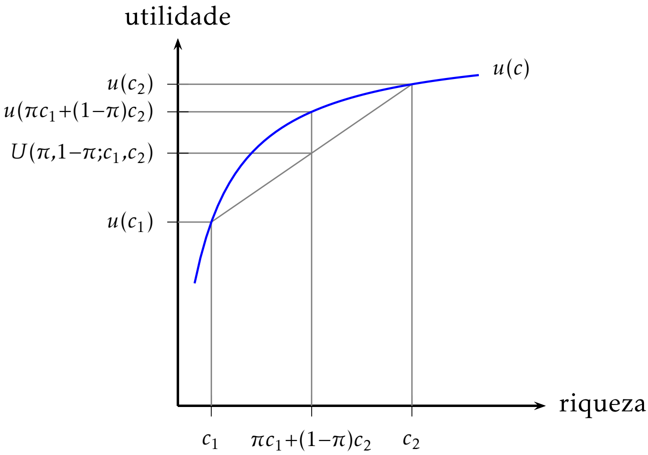
Neutralidade frente ao risco

Diz-se que um consumidor é risco neutro caso ele seja indiferente entre uma loteria com prêmios monetário e o valor esperado dos prêmios dessa loteria.

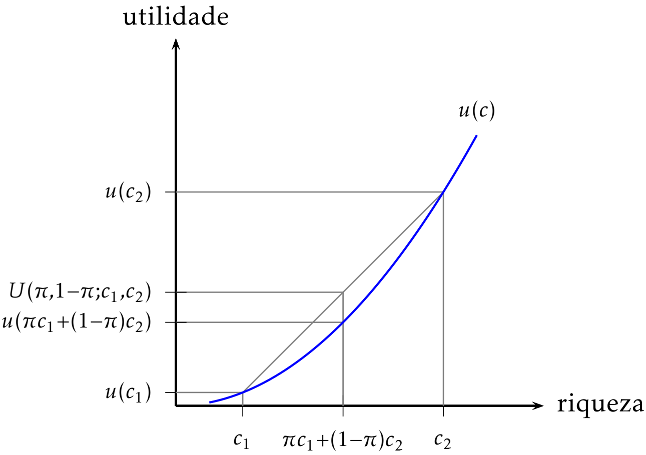
Estrutura da aula

1. Consumo contingente
2. Utilidade esperada
3. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
4. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
5. Utilidade média variância
   - O modelo CAPM

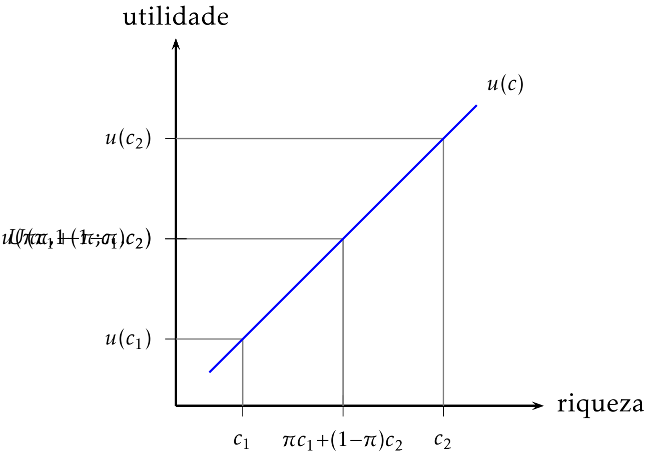
Aversão ao risco: representação gráfica



Propensão ao risco: representação gráfica



Neutralidde frente ao risco: representação gráfica



Questão 05 ANPEC 2011

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

0. Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza W, de tal modo que sua função utilidade é dada por $U(W) = 1 - CW^{-\alpha}$ em que α e C são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco. V

1. Supondo que João deve pagar \$2 para participar de uma competição cujo prêmio é \$19 e a probabilidade de ganhar 1/3. Se o agente possui uma função utilidade esperada definida por $U(x) = \log x$ e o seu nível corrente de riqueza é \$10, então não faz sentido que ele venha participar da competição. F

Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

2. Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$ 100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece pagamento anual de \$ 70.000 em troca de toda a sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta. V

3. Joana possui uma propriedade que vale \$ 300.000, mas está preocupada com seu futuro, cujo bem estar (U) depende integralmente daquele valor, segundo a relação $U(W) = W^{5/4}$. Em um dado ano, existe uma chance de 2% de que a propriedade pegue fogo, o que resultaria numa redução de seu valor para \$ 30.000. Neste caso, os indícios são de que Joana é avessa ao risco. F

Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

4. Supondo que Antonio possui uma função utilidade dada por $U(W) = \frac{W^{1/2}}{10}$, em que W equivale ao seu nível de riqueza. Supondo que ele participe de um jogo com distribuição de pay-offs apresentada no quadro abaixo, então a utilidade esperada do jogo equivale a \$ 2,5. F

Situação do jogo	Pay-offs	Probabilidade
1	\$ 400	1/3
2	\$ 225	1/3
3	\$ 100	1/3

Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

0. Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada; F
1. Pela hipótese da independência, as escolhas do consumidor em um estado da natureza devem independer das escolhas em outro estado da natureza; V
2. Se a função de utilidade for linear nas probabilidades, a utilidade atribuída a um jogo de azar será apenas o produto das utilidades dos diversos resultados possíveis, com cada utilidade elevada a sua probabilidade; F

Questão 04 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

3. Uma função de utilidade côncava significa que o indivíduo é propenso ao risco; F
4. Se c_1 representa o consumo no estado 1 e c_2 o consumo no estado 2, e da mesma forma p_1 representa a probabilidade do estado 1 e p_2 a probabilidade do estado 2, uma função de utilidade Von Neumann- Morgenstern assumiria a forma: $c_1^{p_1} c_2^{p_2}$. F

Estrutura da aula

Definições

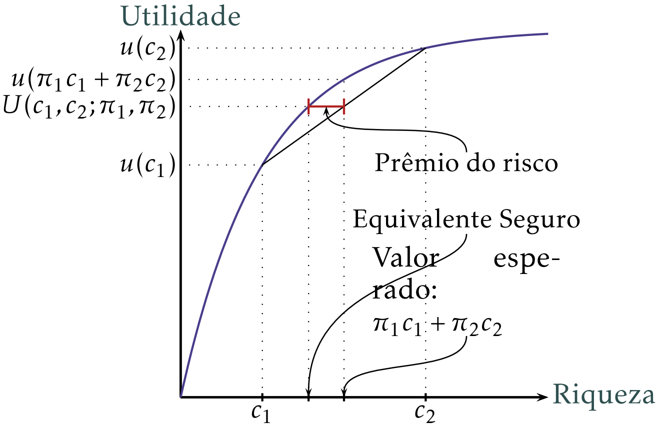
Equivalente Seguro

O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

Prêmio do risco

O prêmio do risco de uma loteria monetária é a diferença entre o valor esperado dessa loteria e seu equivalente seguro.

Representação gráfica



Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern: $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que w pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado: $VE = \dfrac{9+25}{2} = 17$

Utilidade esperada: $UE = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Equivalente seguro: $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Prêmio do risco: $PR = VE - ES = 17 - 16 = 1$

Estrutura da aula

1. Consumo contingente
2. Utilidade esperada
3. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
4. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
5. Utilidade média variância
   - O modelo CAPM

Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão relativa

$$-w\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Aversão absoluta ao risco constante:

$$uw = -e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$$

Aversão relativa ao risco constante:

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{para } \alpha \neq 1$$
$$u(w) = \ln w \quad \text{para } \alpha = 1$$

Questão 08, ANPEC 2009

Um indivíduo possui a seguinte função utilidade $U = 1 - (1/W)$, em que W é o valor presente líquido da sua renda futura. Neste momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de $W = 5$. A outra alternativa dará $W = 400$, com 1% de chance, e $W = 4$, com 99% de chance. Assim sendo, responda às seguintes questões:

0. O coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é $1/W$. F
1. É maior a utilidade esperada da segunda opção. F

Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

2. Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter $W = 400$ ou $W = 4$ se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1. F
3. O equivalente certo (ou equivalente de certeza) da segunda alternativa é 4.5. F
4. A aversão relativa ao risco deste indivíduo diminui no caso em que ele possua $W = 400$ se comparada ao caso em que ele possua $W = 5$. F

Estrutura da aula

Exemplo – ANPEC 1995

Um fazendeiro tem a opção de cultivar trigo e batatas. Se fizer sol, cada hectare gerará um lucro de 200 se plantado com trigo e de 100 se plantado com batata. Se chover cada hectare de trigo gerará um lucro de 120 e cada hectare de batata gerará um lucro de 200. A utilidade do fazendeiro é dada por $U(Y) = \ln Y$, sendo Y o lucro obtido. As probabilidades de fazer sol e de chover são iguais. Que proporção de sua terra o fazendeiro deverá destinar ao plantio de cada produto?

Resposta: 75% de trigo e 25% de batata.

Estrutura da aula

Justiça atuarial

Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

Exemplos

1. Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R$10,00, se for coroa, você pagará R$10,00.
2. Um seguro com preço de R$1.000,00 contra o roubo de um automóvel que vale R$10.000,00 cuja probabilidade é de 10%.

Quanto segurar

Suponha que um consumidor avesso ao risco tenha uma riqueza w que poderá ser reduzida de um valor L, por exemplo, em virtude do roubo de seu automóvel, com probabilidade π. Se uma seguradora oferecer segurar qualquer parcela dessa perda a uma taxa atuarialmente justa, ou seja, cobrando $\gamma = \pi$ reais por real segurado, quanto esse consumidor deverá segurar?

Solução (a)

Seja K o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese, $\gamma = \pi$,

$$w_e = w - \pi L$$

Portanto, a riqueza esperada não é afetada pelo valor segurado K, caso o seguro seja atuarialmente justo.

Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor L, todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para L envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.
- Como o consumidor é avesso ao risco e como o valor esperado da riqueza não é afetado, quando $\gamma = \pi$, pela escolha de K. Ele deve preferir $K = L$ a qualquer outra alternativa.

Quando investir em um ativo de risco?

Um consumidor com aversão a risco pode dividir sua riqueza w em dois ativos: um livre de risco e com retorno r^f e outro ativo que dará um retorno r^0 com probabilidade π e um retorno r^1 com probabilidade $1-\pi$. Sob que condições ele deverá investir parte de sua riqueza no ativo com risco?

Solução (a)

Sejam x a parcela de sua riqueza que o consumidor investe no ativo de risco, $\rho^f = 1 + r^f$, $\rho^0 = 1 + r^0$ e $\rho^1 = 1 + r^1$. Então:

$$\begin{aligned} UE(x) = & \pi U\left(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw\right) \\ & + (1-\pi)U\left(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw\right) \end{aligned}$$

Se $UE' > 0$, o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco.

$$\begin{aligned} UE' = w\Big[& \pi(\rho^0 - \rho^f)U'\left(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw\right) \\ & + (1-\pi)(\rho^1 - \rho^f)U'\left(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw\right)\Big] \end{aligned}$$

Calculando em $x = 0$

$$UE'|_{x=0} = w\{[\pi\rho^0 + (1-\pi)\rho^1] - \rho^f\}U'(\rho^f w)$$

Solução (b)

Portanto, vale a pena investir mais do que zero no ativo de risco caso

$$\pi\rho^0 + (1-\pi)\rho^1 > \rho^f$$

isto é, caso

$$\pi r^0 + (1-\pi) r^1 > r^f.$$

Ou seja , sempre que o retorno esperado do ativo com risco for maior do que o retorno do ativo livre de risco.

Estrutura da aula

1. Consumo contingente
2. Utilidade esperada
3. Posturas diante do risco
   - Definições
   - Representações gráficas
   - Prêmio do risco
   - Medida de aversão ao risco
4. Maximização de utilidade esperada
   - Exemplos
   - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
5. Utilidade média variância
   - O modelo CAPM

Distribuições paramétricas

- Algumas distribuições de probabilidade são perfeitamente descritas por um ou mais parâmetros. Por exemplo, a distribuição normal é totalmente descrita por sua média e por seu desvio padrão.
- Nesse caso, pode-se pensar uma função de utilidade que tenha como argumento esses parâmetros.

Utilidade média variância

- Função de utilidade decorrente de uma alocação de riqueza: $U(\mu, \sigma)$ na qual μ é o retorno esperado da riqueza e σ é o desvio padrão (uma medida de risco).
- Deve-se esperar, para um consumidor com aversão ao risco, que μ seja um bem e σ seja um mal.

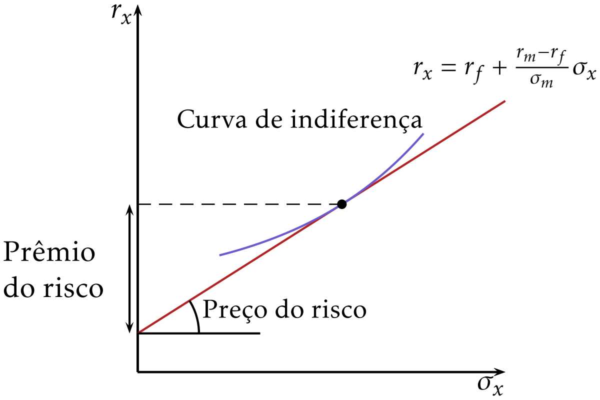
Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade r_f e um com risco, rentabilidade esperada r_m e desvio padrão σ_m.
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela x de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada: $r_x = xr_m + (1-x)r_f$
  - Desvio padrão: $\sigma_x = x\sigma_m$
- A relação entre r_x e x será

$$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_x$$

- $(r_m - r_f)/\sigma_m$ é chamado preço do risco;$[(r_m - r_f)/\sigma_m]\sigma_x$ é o prêmio do risco.

Equilíbrio


r_x
$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_x$
Curva de indiferença
Prêmio do risco
Preço do risco
σ_x

Alavancagem financeira

Caso seja possível tomar recursos emprestados à taxa de juros r_f, então, o investidor poderá escolher $x > 1$ tomando emprestado um valor igual a $x - 1$ vezes sua riqueza e investindo toda sua riqueza mais o valor emprestado no ativo com risco. Sua rentabilidade esperada será

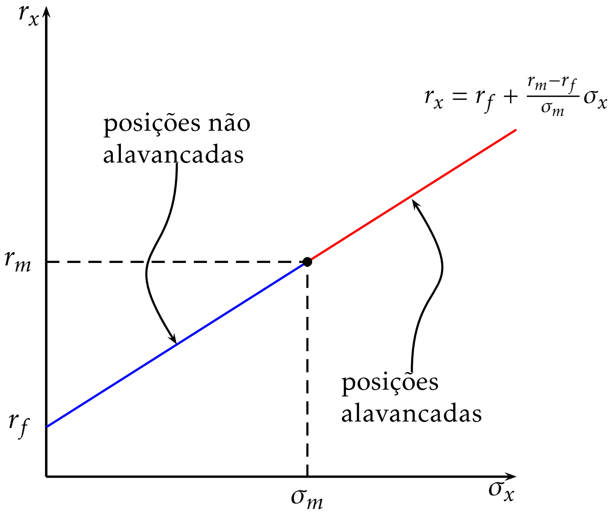
$$r_x = xr_m - (x-1)r_f = xr_m + (1-x)r_f.$$

O desvio padrão de sua rentabilidade será

$$\sigma_x = x\sigma_m$$

Consequentemente, a linha de mercado continua além do ponto descrevendo a rentabilidade e o risco do ativo de risco.

Alavancagem financeira – representação gráfica



Escolha entre dois ativos

Hipóteses

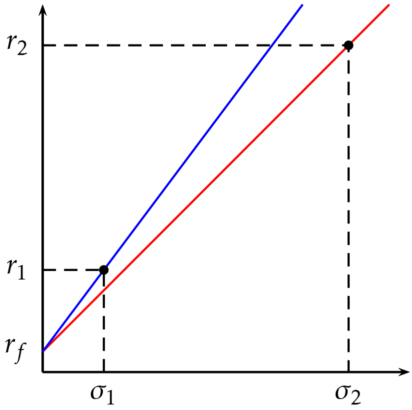
- Dois ativos com rentabilidades esperadas r_1 e r_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 e um ativo livre de risco com rentabilidade r_f.
- Só é possível criar portifólios contendo apenas um ativo de risco combinado com o ativo livre de risco.

Principal conclusão

Deverá ser escolhido o ativo de risco que paga o maior preço do risco. Ex. o ativo 1 será escolhido se

$$\frac{r_1 - r_f}{\sigma_1} \geq \frac{r_2 - r_f}{\sigma_2}$$

Ilustração: Ativo 1 domina o ativo 2



Combinando dois ativos com risco

Ativos iniciais

Ativo	rent. esperada	variância
1	$E(\tilde{r}_1) = r_1$	${\sigma_1}^2$
2	$E(\tilde{r}_2) = r_2$	${\sigma_2}^2$

Portfólio composto

$$z = (\alpha, 1 - \alpha)$$

sendo que α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ representa a participação em valor do ativo 1 no portfólio. Consequentemente esse ativo terá

Retorno esperado $E(\tilde{r}_z) = r_z = \alpha r_1 + (1 - \alpha) r_2$

Variância ${\sigma_z}^2 = \alpha^2 {\sigma_1}^2 + (1 - \alpha)^2 {\sigma_2}^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2}$

Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

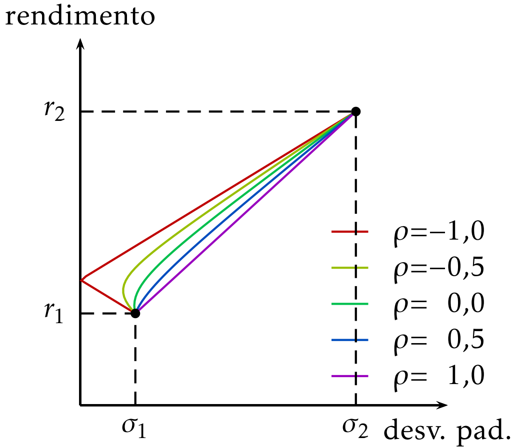
Chegamos a

$$\begin{aligned}\sigma_z{}^2 &= \alpha^2 \sigma_1{}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2{}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{1,2} \\ &\leq \alpha^2 \sigma_1{}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2{}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1 \sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2]^2\end{aligned}$$

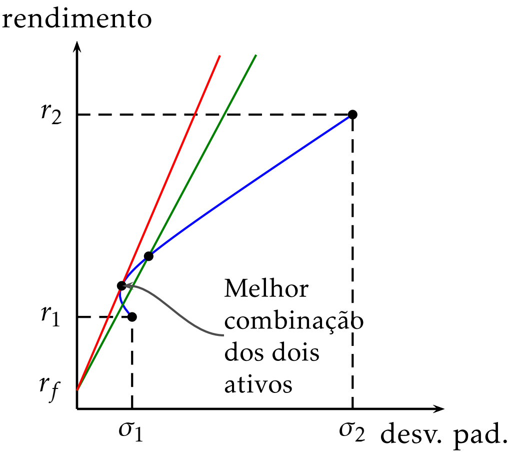
Consequentemente,$\sigma_z \leq \sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2$.
Em particular, caso tenhamos $r_1 = r_2 = \bar{r}$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}$ com $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$ não apresentando correlação linear perfeita e positiva ($\sigma_{1,2} < \sigma_1 \sigma_2$), teremos

$$\sigma_z < \bar{\sigma}$$

Diversificação: representação gráfica



Melhor combinação de dois ativos com risco



A fronteira eficiente

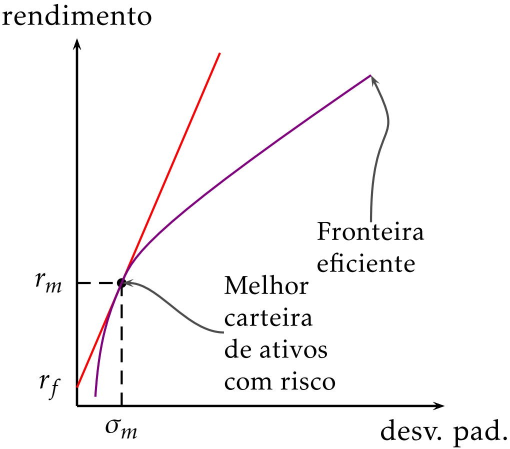
Definição

A fronteira eficiente ou conjunto eficiente de Markowitz é o conjunto de todos os portfólios de ativos com risco que oferecem a maior rentabiliade possível dado o seu risco.

Propriedade importante

Devido ao fato de que o risco é reduzido quando dois ativos são combinados, a fronteira eficiente deve formar concavidade à direita.

A melhor combinação de ativos



Relação entre melhor carteira de ativos com risco e um ativo específico

Considerando um ativo i com rentabilidade esperada r_1 e desvio padrão σ_1, é possível mostrar que sua participação no portfólio ótimo de ativos de risco é tal que:

$$r_i = r_f + \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_m^2}(r_m - r_f)$$

Convencionando $\beta = \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_m^2}$, ficamos com

$$r_i = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

Modelo CAPM
Hipóteses

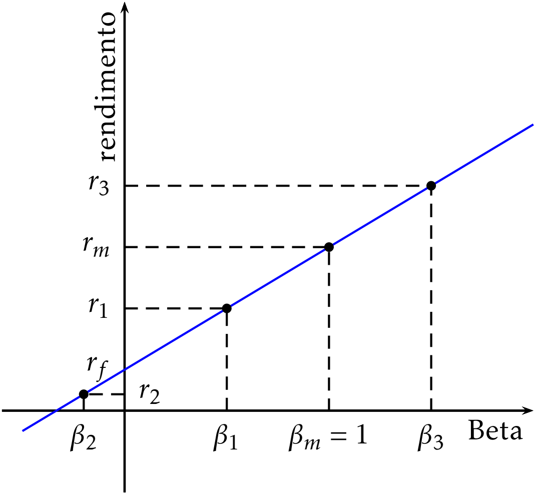
- Mercados perfeitamente competitivos.
- Informação comum.
- Investidores aversos a risco.
- Iguais espectativos quanto à rentabilidade e o risco de todos os ativos.
- É possível tomar emprestado e emprestar à taxa de juros r_f.

Modelo CAPM

Principal conclusão

É condição de equilíbrio que, para todos os investidores, o portfólio ótimo dos ativos com risco seja o portfólio de mercado, ou seja cada ativo deve participar do portfólio ótimo na mesma proporção que ele participa do mercado.

Modelo CAPM – a linha de mercado



Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

0. Suponha a seguinte função utildade que representa as preferêncisas dos indivíduos sobre loterias monetárias: $U(W) = a + bW + cW^{\frac{1}{2}}$, em que W é o nível de riqueza do indivíduo, e a, b e c são parâmetros. Nesse caso, pode-se afirmar que o indivíduo é mais avesso ao risco quanto mais elevada for sua riqueza W. F

Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

2. Suponha um modelo de escolha sob incerteza no qual existem dois estados da natureza com probabilidade p e $1-p$ de ocorrerem e mercados completos de ativos. Especificamente, suponha que existam dois ativos contingentes do tipo $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nesse caso, a razão dos preços relativos é exatamente igual à razão das probabilidades de ocorrência dos estados da natureza. V

Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

3. Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, indivíduos avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V
4. A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente. F
5. O grau de aversão ao risco dos indivíduos pode ser medido pelo seu equivalente de certeza. Quanto mais avesso ao risco é o indivíduo, maior é o equivalente de certeza. F

Questão 5 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo:

0. Seja $u(W) = -e^{-\beta W}$ uma utilidade von Neumann-Morgenstern, em que $\beta > 0$ é uma constante e W é a riqueza. Então β denota a medida de aversão relativa ao risco; F
1. Suponha que uma carteira de ativos arriscados possui retorno esperado $r^e = 21\%$ e variância $\sigma^2 = 0,09$. O ativo sem risco oferece um retorno $r^f = 3\%$. Então, de acordo com o modelo média-variância, o preço do risco da carteira é $p = 2$; F

Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

2. Suponha que o retorno de mercado é $r_m = 12\%$ e a taxa de retorno do ativo sem risco é $r_f = 8\%$. A variância da carteira eficiente é $\sigma_e^2 = 0,01$ e a covariância entre o retorno de um ativo A e a carteira eficiente é $\sigma_{A,e} = 0,5$. De acordo com o modelo CAPM, se o valor esperado do ativo A é \$64 (unidades monetárias), então o preço do ativo A é \$50; F
3. De acordo com o modelo média-variância, se a taxa marginal de substituição (TMS) entre retorno esperado da carteira e seu desvio-padrão é $TMS = 0,3$, se a variância do retorno da carteira é $\sigma_m^2 = 0,04$ e a taxa de retorno do ativo sem risco é $r_f = 12\%$, então o retorno esperado da carteira é $r_m = 18\%$; V

Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

4. Um indivíduo possui utilidade von Neumann-Morgenstern $u(x) = \sqrt{x}$ e possui riqueza $W = \$100$. Ele está sujeito a uma perda monetária aleatória X, com distribuição uniforme contínua no intervalo $[0, 100]$. Se ao indivíduo for oferecido, ao preço de $G = \$55$, um seguro total contra essa perda aleatória, então ele comprará o seguro. V