

ANPEC 2004 Questão 15 – solução

Roberto Guena de Oliveira

20 de setembro de 2009

Enunciado

Uma economia é constituída por dois indivíduos cujas utilidades são $u_A(f, m_A) = (4/3)\sqrt{f} + m_A$ e $u_B(f, m_B) = \ln(1 - f) + m_B$, em que f representa a poluição gerada pelo consumo de cigarro por parte do indivíduo A (medido numa escala entre 0 e 1) e m_i representa o gasto do indivíduo i com a aquisição de outros bens ($i = A$ ou B). Suponha que o indivíduo B tenha direito a todo ar puro, mas que possa vender, ao preço unitário p , o direito de poluir parte do ar ao indivíduo A . Se no equilíbrio o indivíduo A paga G unidades monetárias ao indivíduo B para poluir parte do ar, achar $36G$.

Solução

O exercício não deixa claro a que equilíbrio ele se refere. Assumiremos que se trata de um equilíbrio competitivo. Nesse caso, sabemos que, em equilíbrio, os consumidores deverão igualar suas taxas marginais de substituição ao preço relativo e, portanto, igualar suas taxas marginais de substituição entre si. A taxa marginal de substituição do indivíduo A expressa em termos de unidades de gasto com a aquisição de outros bens por unidade de poluição é dada por

$$|TMS_A| = \frac{\partial u_A / \partial f}{\partial u_A / \partial m_A} = \frac{2}{3\sqrt{f}}.$$

Já a taxa marginal de substituição do indivíduo B , expressa em termos de unidades de gasto com outros bens por unidade de ar não poluído (medido por $1 - f$)¹ é

$$|TMS_B| = \frac{\partial u_B / \partial (1 - f)}{\partial u_B / \partial m_A} = \frac{1}{1 - f}$$

Desse modo, no equilíbrio, devemos ter

$$|TMS_A| = |TMS_B| = p \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{1 - f} = p$$

¹o bem para o indivíduo B é o ar não poluído, isto é, a poluição não gerada por A , $1 - f$.

sendo p o preço da poluição expresso em unidades de gasto com outros bens por unidade de poluição. Resolvendo a primeira igualdade obtemos

$$f = \frac{1}{4}.$$

Isso implica

$$p = \frac{4}{3}.$$

Se A compra $1/4$ unidades de direito de poluição ao preço de $4/3$ unidades de gasto com outros bens por unidade de poluição, seu gasto total foi de $G = 1/4 \times 4/3 = 1/3$. Multiplicando esse valor por 36, conforme pede o enunciado do exercício, obtemos a resposta $36G = 12$.

Observação

Com a turma de sábado (ano 2009), ao corrigir esse exercício em sala de aula, eu cometi um deslize que me impediu de chegar à resposta correta. Primeiramente, eu calculei as taxas marginais de substituição em termos de unidades de f por unidades de gasto com outros bens, isto é,

$$|tms_A| = \frac{\partial u_A / \partial m_A}{\partial u_A / \partial f} = \frac{3}{2} \sqrt{f} \quad \text{e} \quad |tms_B| = \frac{\partial u_B / \partial m_B}{\partial u_B / \partial (1-f)} = \frac{1}{1-f}.$$

Não há nenhum problema nisso. O erro que cometi foi não perceber que a taxa marginal de substituição assim expressa iguala-se, no equilíbrio, à razão do preço dos gastos com a aquisição dos outros bens sobre no preço da poluição, ou seja, $1/p$ e não p como eu havia sugerido em sala de aula. Desse modo, chegamos à solução correta resolvendo

$$\frac{3}{2} \sqrt{f} = \frac{1}{1-f} = \frac{1}{p}$$

para obter, do mesmo modo que na nossa solução acima, $f = 1/4$ e $p = 4/3$. Com esses resultados chegaríamos também a $G = 1/4 \times 4/3 = 1/4$ e, portanto, $36G = 12$.