SOLUÇÃO DA QUESTÃO 9 DE MICROECONOMIA DO EXAME ANPEC 2003

1. Enunciado

Considere um modelo de sinalização do tipo Spence no qual os trabalhadores escolhem um nível de educação. Há uma grande quantidade de firmas e de trabalhadores. Os trabalhadores hábeis têm a função de utilidade $U_H = w - \frac{3}{8}E^2$ e os trabalhadores pouco hábeis têm a função de utilidade $U_{PH} = w - \frac{1}{2}E^2$, em que w representa o nível salarial e E o nível educacional. Um trabalhador hábil com nível de educação E_H vale $1.5E_H$ para a firma, enquanto um trabalhador pouco hábil com nível de educação E_{PH} vale $1E_{PH}$. Metade dos trabalhadores são hábeis. Julgue as seguintes proposições:

⓪ A solução eficiente (com informação completa) é $(\hat{E}_{PH} = 1, \hat{E}_H = 2)$
① Caso exista um equilíbrio agregador, esse não pode ser eficiente.
② Caso haja um equilíbrio separador, esse será eficiente.
③ Em nenhum equilíbrio U_H pode ser menor do que $\frac{1}{2}$.
④ Caso haja um equilíbrio separador, nele, ter-se-á $E_H^* > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $E_H^* < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2. O modelo

O exercício apresenta um modelo de mercado de trabalho com sinalização. Para que a solução do exercício fique clara, vamos desenvolver esse modelo procurando determinar

(1) Os níveis eficientes de estudo para cada trabalhador;
(2) a existência de um equilíbrio separador e, caso ele exista, os níveis de estudo a ele associados; e
(3) a existência de um equilíbrio agregador e, caso ele exista os níveis de estudo a ele associados.

2.1. **Níveis eficientes de estudo.** Os níveis eficientes de estudo são aqueles que tornam máximo o ganho social total. Sejam E_H e E_{PH} os níveis de estudo dos trabalhadores hábeis e pouco hábeis, respectivamente. O ganho social associado a esses níveis de estudo é dado pela diferença entre o valor dos trabalhadores para as firmas e o custo de aquisição desses níveis de estudo para os trabalhadores. Segundo o enunciado do exercício, o valor de um trabalhador hábil é dado por $1,5E_H$ e o custo de aquisição do estudo por parte desse trabalhador é $\frac{3}{8}E_H^2$. Ainda segundo o enunciado do exercício, o valor de um trabalhador pouco hábil é dado por $1E_{PH}$ e o custo de aquisição do estudo por parte desse trabalhador é $\frac{1}{2}E_{PH}^2$. Assim, sendo n o número de trabalhadores em cada categoria, o ganho social líquido total será dado

por
$$n(1,5E_H - \frac{3}{8}E_H^2) + n(1E_{PH} - \frac{1}{2}E_{PH}^2).$$
Derivando essa expressão em relação a E_H e em relação a E_{PH} e igualando as primeiras derivadas a zero, obtém-se as condições de primeira ordem para a obtenção do maior ganho social
$$\begin{cases} \frac{3}{4}E_H - \frac{3}{2} = 0 \\ E_{PH} - 1 = 0 \end{cases}$$
que têm como soluções óbvias $E_H = 2$ e $E_{PH} = 1$. Esses são os níveis eficientes de estudo.[1]

2.2. **Equilíbrio com concorrência e informação perfeitas.** Caso haja informação perfeita, as firmas perfeitamente competitivas irão pagar a cada trabalhador o valor que atribuem a ele. Assim, um trabalhador hábil com um nível de estudo E receberá um salário igual a $1,5E$. Um trabalhador pouco hábil com nível de estudo E receberá um salário igual a E. Os trabalhadores determinarão seus níveis de estudo de modo a maximizar suas funções de utilidade, levando em conta que seus salários dependem desses níveis de estudo. Assim, um trabalhador hábil escolherá um nível de estudo que maximize
$$U_H = w - \frac{3}{8}E^2$$
$$\text{tal que } w = 1,5E$$
Resolvendo o problema de maximização acima e chamando a solução de $\hat{E}_H$, obtemos $\hat{E}_H = 2$.

De modo similar, o trabalhador pouco hábil irá escolher o nível de estudo que maximize
$$U_{PH} = w - \frac{1}{2}E^2$$
$$\text{tal que } w = E$$
Resolvendo o problema de maximização acima e chamando a solução de $\hat{E}_{PH}$, obtemos $\hat{E}_{PH} = 1$. Assim, em concorrência perfeita com informação perfeita, cada trabalhador escolherá o nível socialmente eficiente de educação.

2.3. **Escolha do trabalhador e função de utilidade indireta.** Nesse ponto será útil definir duas funções. Suponha, como deve ocorrer nesse modelo, que a remuneração de um trabalhador que escolha um nível de educação E seja dada por ωE (cuidado para não confundir o símbulo ω — da letra grega ômega — com w, a letra dábliu de nosso alfabeto).[2] O nível

[1]Note que a condição de máximo de segunda ordem está garantida pois o hessiano da função de ganho social
$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
é uma matriz definida negativa.

[2]No presente texto, w (dábliu) representa o salário do trabalhador e ω (ômega) representa a relação entre o salário e o nível educacional.

de educação a ser escolhido por esse trabalhador será então uma função de ω. Sejam $E_H(\omega)$ e $E_{HP}(\omega)$ as funções que determinam o nível de edução que os trabalhadores hábeis e pouco hábeis, respectivamente, deverão escolher dado o padrão de remuneração definido por ω.

A função $E_H(\omega)$ pode ser deduzida encontrando-se o valor de E que resolve o problema de maximizar

$$U_H = w - \frac{3}{8}E^2$$
$$\text{tal que } w = \omega E.$$

Resolvendo esse problema obtemos

$$E_H(\omega) = \frac{4}{3}\omega \tag{1}$$

Do mesmo modo, a função $E_{PH}(\omega)$ pode ser deduzida encontrando-se o valor de E que resolve o problema de maximizar

$$U_{PH} = w - \frac{1}{2}E^2$$
$$\text{tal que } w = \omega E.$$

de onde obtém-se

$$E_{PH}(\omega) = \omega. \tag{2}$$

Uma outra função que será útil é a função que relaciona ao valor de ω a máxima utilidade que um trabalhador pode obter. Chamemos essa função de função de utilidade indireta. Para um trabalhador hábil essa função é dada por

$$V_H(\omega) \equiv \underset{E}{Max}\{w - \frac{3}{8}E^2 | w = \omega E\} \equiv \omega E_H(\omega) - \frac{3}{8}E_H^2(\omega)$$

Substituindo nessa definição a expressão (1), obtemos

$$V_H(\omega) = \frac{2}{3}\omega^2 \tag{3}$$

Do mesmo modo, para um trabalhador pouco hábil, a função de utilidade indireta é definida por

$$V_{PH}(\omega) \equiv \underset{E}{Max}\{w - \frac{1}{2}E^2 | w = \omega E\} \equiv \omega E_{PH}(\omega) - \frac{1}{2}E_{PH}^2(\omega)$$

Substituindo nessa definição a expressão (2), obtemos

$$V_{PH}(\omega) = \frac{\omega^2}{2} \tag{4}$$

2.4. **Equilíbrio com separação.** Um equilíbrio com separação ocorre quando as empresas oferecem um salário igual a $1,5E$ ($\omega = 1,5$) para trabalhadores com nível de estudo igual ou superior a um determinado E_H^* e um salário igual a E ($\omega = 1$) para trabalhadores com nível de estudo inferior a esse patamar e, dada essa estrutura de remuneração, os trabalhadores hábeis escolhem obter o nível de educação E_H^* e os trabalhadores pouco hábeis escolhem um nível de educação inferior. Vejamos que condições E_H^* deve atender para que isso ocorra.

Os trabalhadores hábeis escolherão o nível de educação E_H^* caso esse nível gere para eles uma utilidade superior à máxima utilidade que teriam caso escolhessem um nível de educação inferior e aceitassem $\omega = 1$. Para que isso ocorra é necessário que

$$1,5E_H^* - \frac{3}{8}{E_H^*}^2 > V_H(1).$$

Aplicando (3) na condição acima, obtém-se

$$\frac{3}{2}E_H^* - \frac{3}{8}{E_H^*}^2 > \frac{2}{3}.$$

Resolvendo-se essa desigualdade, obtém-se a primeira condição para o equilíbrio com separação, qual seja,

$$\frac{2}{3}(3 - \sqrt{5}) < E_H^* < \frac{2}{3}(3 + \sqrt{5}) \tag{5}$$

A segunda condição para a existência do equilíbrio separador é que os trabalhadores pouco hábeis prefiram escolher um nível de estudo inferior a E_H^* e se contentar com $\omega = 1$ a escolher E_H^* e obter $\omega = 1,5$. Isso ocorrerá caso

$$1,5E_H^* - \frac{1}{2}{E_H^*}^2 < V_{PH}(1).$$

Substituindo (4) na desigualdade acima, obtém-se

$$\frac{3}{2}E_H^* - \frac{1}{2}{E_H^*}^2 < \frac{1}{2}.$$

Resolvendo a desigualdade acima para E_H^* chega-se à segunda condição para o equilíbrio separador, qual seja,

$$E_H^* < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \text{ ou } E_H^* > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \tag{6}$$

Para que um equilíbrio separador seja configurado, é necessário que as condições (5) e (6) sejam atendidas. Comparando-se essas duas condições, chega-se à conclusão de que E_H^* deve satisfazer

$$\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) < E_H^* < \frac{2}{3}(3 + \sqrt{5}) \tag{7}$$

2.5. **Equilíbrio agregador.** Vamos agora investigar sob que condições os dois tipos de trabalhadores escolheriam o mesmo nível de educação. Note que, caso isso ocorra, os empregadores, incapazes de diferenciar o trabalhador hábil do pouco hábil irão oferecer um salário por trabalhador igual ao seu valor esperado ($\omega = 1,25$). Porém nesse caso, o trabalhador pouco hábil escolherá um nível de educação de modo a maximizar

$$1,25E_{PH} - \frac{E_{PH}^2}{2}$$

o que implica $E_{PH} = 1,25$. Já o trabalhador hábil escolheré E_H de modo a maximizar

$$1,25E_H - \frac{3}{8}E_H^2,$$

ou seja, escolherá $E_H = 5/6 \neq E_{PH}$. Isso implica um contradição com a hipótese de que o empregador não é capaz de diferenciar o trabalhador hábil do inábil. Assim, não existe equilíbrio agregador.

3. Respostas

Voltemos agora ao itens da questão.

⓪ **A solução eficiente (com informação completa) é** $(\hat{E}_{PH} = 1, \hat{E}_H = 2)$ Conforme vimos nas seções 2.1 e 2.2 essa afirmação está correta.

① **Caso exista um equilíbrio agregador, esse não pode ser eficiente.** Caso exista um equilíbrio agregador, os níveis de estudo escolhidos pelos trabalhadores hábeis e pelos trabalhadores pouco hábeis serão iguais, o que não pode coincidir com a solução eficiente. Assim, a afirmação está correta.

② **Caso haja um equilíbrio separador, esse será eficiente.** Conforme visto no item 2.4, o equilíbrio separador implica um nível de estudo para o trabalhador hábil superior a $\frac{1}{2}(3 + \sqrt(5)$ o que é superior ao nível de estudo eficiente para esse trabalhador, qual seja, 2. Portanto, o equilíbrio separador não é eficiente e a afirmação é falsa.

③ **Em nenhum equilíbrio U_H pode ser menor do que $\frac{1}{2}$.** Mesmo que o trabalhador hábil tivesse uma remuneração de acordo com $\omega = 1$, a sua utilidade seria $V_H(1) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Essa é a utilidade mínima que esse trabalhador pode *a priori* obter. Portanto, a afirmação é verdadeira. ω para o trabalhador hábil

④ **Caso haja um equilíbrio separador, nele, ter-se-á $E_H^* > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $E_H^* < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.** Conforme vimos na seção 2.4, essa é uma das condições para que o equilíbrio separador ocorra. Assim, a afirmação é verdadeira.