Parte II – Teoria da Firma

Maximização de Lucro

Roberto Guena de Oliveira

16 de maio de 2018

USP

Sumário

1. Introdução
2. Abordagem direta
3. Abordagem através da função de custo
4. Exercícios

Introdução

O que veremos?

Colocação do problema
Como deve se comportar uma empresa que visa a obtenção de lucro máximo e que não tem poder de afetar os preços de seus insumos e de seu produto?

Duas abordagens equivalentes

1. Escolha das quantidades empregadas de cada insumo de modo a fazer com que a diferença entre o valor do total produzido e o custo com a contratação dos insumo seja máxima.
2. Escolha da quantidade produzida de modo a fazer com que a diferença entre o valor do total produzido e a função de custo seja máxima.

Abordagem direta

Sumário

1 Introdução

2 Abordagem direta

3 Abordagem através da função de custo

4 Exercícios

Formulação matemática

- n insumos variáveis com quantidades representadas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e preços $w_1, w_2, \ldots, w_n$;
- custo com insumos fixos é CF;
- y é o total produzido e p é o preço do produto.
- $f(x_1, \ldots, x_n)$ é a função de produção (de curto prazo, caso haja algum insumo fixo). Assumiremos $f(0, \ldots, 0) = 0$.

O problema

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} py - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - CF.$$

Dadas as restrições

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \qquad \text{e} \qquad y \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Solução

Condição de primeira ordem

$$p\frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i} - w_i \begin{cases} = 0 & \text{se } x_i^* > 0 \\ \leq 0 & \text{se } x_i^* = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Condição de segunda ordem
A função de produção $f(x_1, \ldots, x_n)$ deve ser localmente côncava.

Interpretações para a condição de primeira ordem

1. Igualdade entre o valor do produto marginal de um fator de produção e seu preço:

$$x_i^* \geq 0 \Rightarrow p\frac{\partial f(x_1, \ldots, \partial x_n)}{\partial x_i} = pPMg_i = w_i$$

2. Igualdade entre preço e custo marginal:

$$x_i^* \geq 0 \Rightarrow p = \frac{w_i}{PMg_i}$$

3. Igualdade entre remuneração real do fator e seu produto marginal:

$$x_i^* \geq 0 \Rightarrow PMg_i = \frac{w_i}{p}$$

Inatividade

Para encontrar o lucro máximo global é necessário comparar as soluções de máximo local entre si e com a solução de canto, $x_1 = x_2 = \cdots = 0$.

Caso não hara solução com emprego positivo dos fatores variáveis tal que

$$pf(x_1, \ldots, x_2) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - CF > -CF,$$

a empresa deve permanecer inativa.

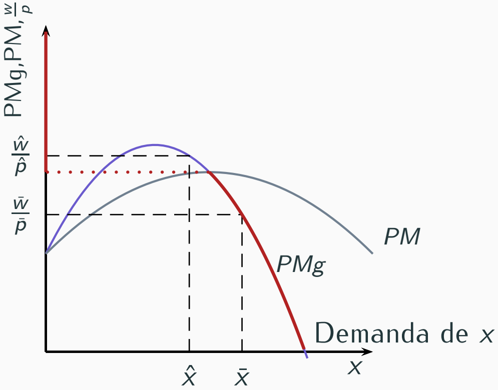
Funções relacionadas à maximização de lucro

Demandas pelos insumos de produção
A função de demanda do insumo i, $x_i^*(p, w_i, \ldots, w_n)$, é a função que retorna a quantidade empregada do insumo i quando o lucro da empresa é máximo.

Função de oferta
A função de oferta de uma empresa $y^*(p, w_1, \ldots, w_n)$ é a função que retorna o valor da função de produção quando o lucro é máximo.

Função de lucro
A função de lucro de uma empresa $\pi^*(p, w_i, \ldots, w_n)$ é uma função que retorna o valor do lucro máximo dessa empresa dados os preços $p, w_i, \ldots, w_n$.

Ilustração gráfica: demanda pelo único fator de produção



Exemplo

A função de produção

$$f(x_1, x_2) = 3\sqrt[3]{x_1 x_2}$$

Condições de lucro máximo de 1ª ordem:

$$PMg_1 = \frac{w_1}{p} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_2}{x_1^2}} = \frac{w_1}{p}$$
$$PMg_2 = \frac{w_2}{p} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1}{x_2^2}} = \frac{w_2}{p}$$

Exemplo – continuação

Funções de demanda pelos insumos

$$x_1^*(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{w_1^2 w_2} \qquad x_2^*(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{w_1 w_2^2}$$

A função de oferta

$$\begin{aligned} y^*(p, w_1, w_2) &= f\left[x_1^*(p, w_1, w_2), x_2^*(p, w_1, w_2)\right] \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{p^3}{w_1^2 w_2}\frac{p^3}{w_1 w_2^2}} \\ y^*(p, w_1, w_2) &= 3\frac{p^2}{w_1 w_2} \end{aligned}$$

A função de lucro

$$
\begin{aligned}
\pi^*(p, w_1, w_2) &= py^*(p, w_1, w_2) - w_1 x_1^*(p, w_1, w_2) - w_2 x_2^*(p, w_1, w_2) \\
&= p \times 3\frac{p^2}{w_1 w_2} - w_1 \times \frac{p^3}{w_1^2 w_2} - w_2 \times \frac{p^3}{w_1 w_2^2} \\
\pi(p, w_1, w_2) &= \frac{p^3}{w_1 w_2}
\end{aligned}
$$

Propriedades da função de lucro

- A função de lucro é não decrescente em relação ao preço do produto e não crescente em relação aos preços dos fatores.
- A função de lucro é convexa em relação ao preço de seu produto e em relação aos preços dos fatores de produção.
- Lema de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi^*(p, w_1, \ldots, w_n)}{\partial w_i} = -x_i^*(p, w_1, \ldots, w_n)$$

$$\frac{\partial \pi^*(p, w_1, \ldots, w_n)}{\partial p} = y^*(p, w_1, \ldots, w_n)$$

Exemplo

A função de produção

$$f(x_1, x_2) = 3\sqrt[3]{x_1 x_2}$$

Funções de demanda pelos insumos

$$x_1^*(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{w_1^2 w_2} \qquad x_2^*(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{w_1 w_2^2}$$

A função de oferta

$$y^*(p, w_1, w_2) = 3\frac{p^2}{w_1 w_2}$$

A função de lucro

$$\pi^*(p, w_1, w_2) = py^*(p, w_1, w_2) - w_1 = \frac{p^3}{w_1 w_2}$$

Exemplo – continuação

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi^*(p, w_1, w_2) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{p^3}{w_1 w_2} = 3\frac{p^2}{w_1 w_2} = y^*(p, w_1, w_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\pi^*(p, w_1, w_2) = \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{p^3}{w_1 w_2} = -\frac{p^3}{w_1^2 w_2} = -x_1^*(p, w_1, w_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\pi^*(p, w_1, w_2) = \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{p^3}{w_1 w_2} = -\frac{p^3}{w_1 w_2^2} = -x_2^*(p, w_1, w_2)$$

Abordagem através da função de custo

Sumário

1. Introdução
2. Abordagem direta
3. Abordagem através da função de custo
4. Exercícios

Maximização de lucro

Nova colocação do problema

$$\max_{y} py - c(y)$$

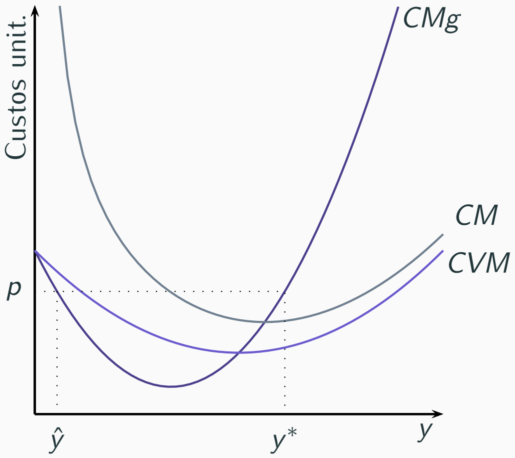
Condição de primeira ordem

$$\frac{dc(y)}{dy} = p \Rightarrow CMg = p$$

Condição de segunda ordem

$$\frac{d^2c(y)}{dy^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{dCMg}{dy} \geq 0$$

Solução gráfica – II



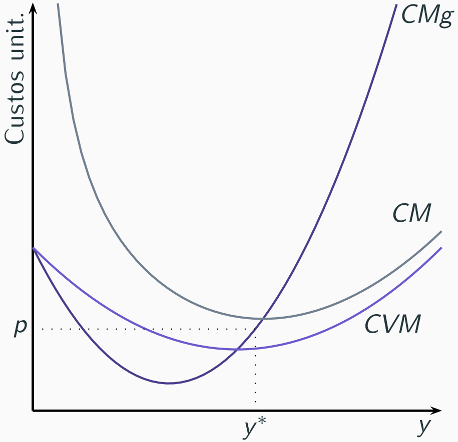
Condição de máximo global

Seja um produto positivo y^* que satisfaça às condições de primeira e segunda ordem do problema de maximização de lucro, isto é, tal que $CMg(y^*) = p$ e, supondo que a função de custo seja duplamente diferenciável, que $CMg'(y^*) > 0$. Nesse caso y^* maximiza localmente o lucro da empresa. Para que y^* maximize globalmente o lucro da empresa é, em adição, necessário que, em adição,

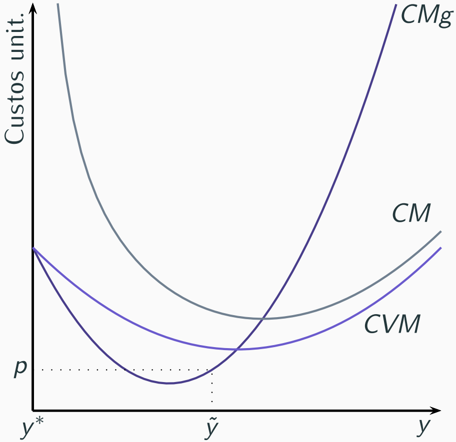
1. Caso haja qualquer outro nível de produção $\hat{y}$ que satisfaça as duas condições de lucro máximo, $py^* - c(y^*) \geq p\hat{y} - c(\hat{y})$, e
2. O lucro obtido ao se produzir y^* seja superior ao lucro obtido ao não se produzir nada, ou seja,

$$\begin{aligned} py^* - CV(y^*) - CF \geq -CF \Rightarrow py^* &\geq CV(y^*) \\ \Rightarrow p &\geq CVM(y^*) \end{aligned}$$

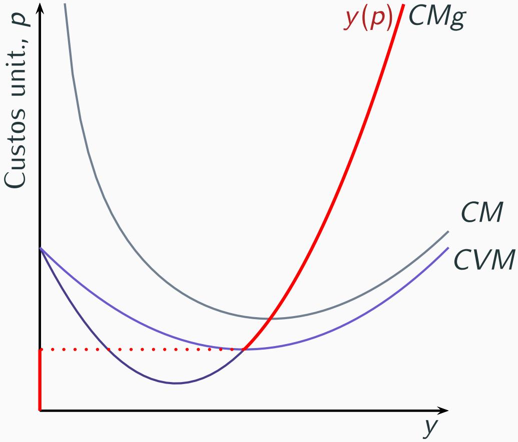
produção com prejuízo



Encerramento de atividades



A curva de oferta da firma individual



Medidas de ganho do produtor

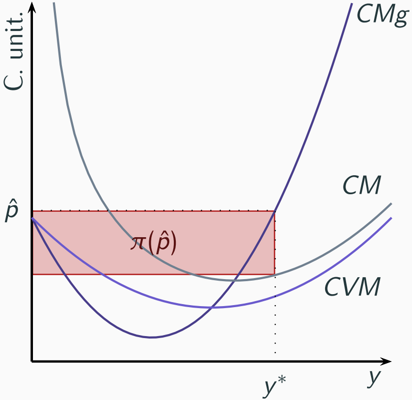
Lucro

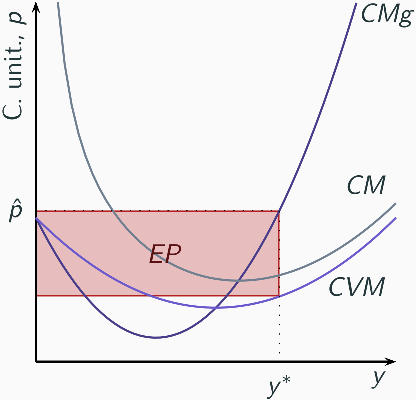
$$\pi(p) = py(p) - c(y(p))$$

Excedente do produtor (EP)

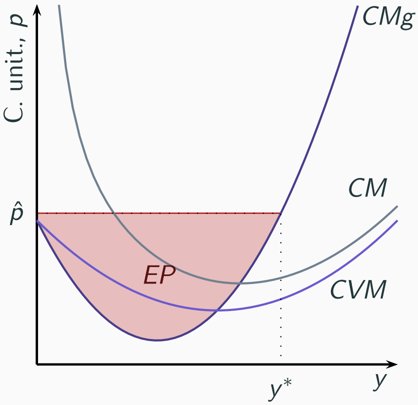
$$EP = py(p) - CV(y(p))$$

Medidas de ganho do produtor – representações gráficas – I





Medidas de ganho do produtor – representações gráficas – II



Exercícios

Questão 07 – ANPEC 2018

Uma empresa produz, com duas fábricas (1 e 2), um bem em ambiente perfeitamente competitivo no curto prazo. A planta 1 produz o bem com custos totais expressos pela função $CT(y_1) = 10y_1 + \frac{1}{2}y_1^2$. A planta 2 produz segundo a função de custo $CT(y_2) = \frac{1}{2}y_2^2$. Julgue as assertivas:

0. Existe volume de produção tal que a empresa opera somente com a planta 2 ; V
1. A empresa opera de modo a igualar os custos médios das duas plantas; F
2. É ineficiente em termos paretianos utilizar uma única planta; F

Questão 07 – ANPEC 2018

Uma empresa produz, com duas fábricas (1 e 2), um bem em ambiente perfeitamente competitivo no curto prazo. A planta 1 produz o bem com custos totais expressos pela função $CT(y_1) = 10y_1 + \frac{1}{2}y_1^2$. A planta 2 produz segundo a função $(y_2) = \frac{1}{2}y_2^2$. Julgue as assertivas:

3. Se o preço de mercado do bem for $p = 15$, uma planta produz o triplo da outra; V
4. A função custo marginal da empresa é igual a $CMg(y) = \frac{1}{2}y + 10$. F

Questão 03 – ANPEC 2013

Suponha que a função de produção de para um dado produto tem a seguinte forma funcional: $q = f(x_1) = 2x_1 - 0,03x_1^2$. Considere também que o preço de uma unidade do bem final é $p(q) = \text{R\$}10,00$ e o preço unitário do insumo, praticado pelo mercado, é $p(x_1) = \text{R\$}8,00$.

Dadas essas informações, é correto afirmar que:

0. O nível de utilização do insumo que maximiza o nível de produção é $x_1 = 33,33$. V
1. O nível de utilização do insumo que maximiza o lucro da firma é $x_1 = 19,5$. F
2. O nível de produção economicamente ótimo é $q = 28$. V
3. O lucro máximo (π) obtenível pela firma é $\pi(q) = \text{R\$}120$. V
4. A produtividade marginal do fator é crescente. F

Questão 03 – ANPEC 2011

Sobre a Teoria da Produção analise as afirmativas abaixo:

⓪ A função de produção que exibe retornos constantes de escala é uma função homogênea do grau 0. F

① Suponha uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, sendo os coeficientes técnicos a e b, tal que $a + b > 1$. A elasticidade de substituição desta função de produção também é superior à unidade. F

② Suponha uma função de produção do tipo CES, definida da seguinte forma: $q = f(k, l) = [k^\rho + l^\rho]^{\frac{\gamma}{\rho}}$. A elasticidade de substituição referente a essa função é definida por $\sigma = \frac{1}{1-\gamma}$. F

Questão 03 – ANPEC 2011 (continuação)

Sobre a Teoria da Produção analise as afirmativas abaixo:

3. Suponha que $\pi(\cdot)$ é a função lucro do conjunto de produção Y e que $y(\cdot)$ é a correspondência de oferta associada. Suponha também que Y é fechado e satisfaz a propriedade de free disposal (livre descarte). Nesse contexto, segundo o Lema de Hotelling: se $y(p)$ consiste de um único ponto, então $\pi(\cdot)$ é diferenciável em p e $D_p\pi(p) = y(p)$. V
4. A função de lucro atende às propriedades de ser homogênea de grau 1 em preços e convexa nos preços. V

Questão 06 – ANPEC 2005

Considere um mercado em concorrência perfeita, avalie as afirmativas:

0. A igualdade entre preço e custo marginal é condição necessária, mas não suficiente para a maximização dos lucros da firma. V
1. No curto prazo, se o lucro econômico do produtor é positivo, a produção se faz com custo marginal superior ao custo médio. V
2. Se a função de custo total da firma for $C(q) = q^3 - 9q^2 + 42q$, então, a função de oferta será $p(q) = 3q^2 - 18q + 42$, para valores de q maiores que 3. F

Questão 06 – ANPEC 2005 (cont.)

Considere um mercado em concorrência perfeita, avalie as afirmativas:

3. Se a função de custo total de uma firma for $C(q) = q^3 - 9q^2 + 42q$ e se o preço de mercado for igual a 42, a elasticidade-preço da oferta deste produtor será igual a $\frac{18}{7}$. F
4. O valor do excedente do produtor iguala-se aos lucros totais da firma mais o valor do custo fixo. V