Excedente do Consumidor*

Roberto Guena de Oliveira†

15 de abril de 2014

Introdução

Muitas aplicações da teoria do consumidor requerem que se avalie quantitativamente o impacto de mudanças no sistema de preços e renda sobre o bem estar dos consumidores. Por exemplo, caso um novo investimento em infra-estrutura de transporte torne o preço de um bem de primeira necessidade mais barato, poderíamos nos perguntar qual o tamanho do impacto dessa redução de custo sobre o bem estar de um grupo de consumidores.

A teoria do consumidor, como sabemos, não pressupõe uma medida única de bem estar individual. De fato, ela apenas pressupõe que os consumidores sejam capazes de classificar possíveis cestas de consumo em mais ou menos preferidas, de um modo consistente. Mais especificamente, supomos que os consumidores sejam capazes de comparar cestas de bens alternativas de acordo com um estrutura de preferências completa e transitiva.

Vimos também que essas preferências podem ser representadas por uma *função de utilidade*, isto é, uma função $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, na qual $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as quantidades consumidas dos n bens, tal que, para duas cestas de bens quaisquer $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sempre que tivermos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \succsim (y_1, y_2, \dots, y_n)$ também teremos $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq u(y_1, y_2, \dots, y_n)$ e *vice-versa*. Porém, para cada estrutura de preferências não existe uma única função de utilidade, mas uma infinidade delas, pois se $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função de utilidade que representa as preferências de um consumidor e $f(x)$ é uma função monotonicamente crescente na imagem de u, então $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(u(x_1, x_2, \dots, x_n))$ também será uma função de utilidade adequada para representar as mesmas preferências.

Isso significa que, caso queiramos avaliar a variação de bem-estar de um consumidor associada, digamos, à redução no preço de um bem, através da variação na função de utilidade desse consumidor, precisamos, antes de qualquer coisa, definir que função de utilidade, entre as infinitas possíveis, iremos escolher para representar as preferências desse consumidor.

Como usualmente queremos medir a variação no bem estar do consumidor para a realização de uma comparação de custo benefício, é conveniente que essa

---

*Segunda versão. Correções, críticas, comentários e elogios são bem-vindos.

†Universidade de São Paulo, Departamento de Economia da FEA Ribeirão Preto.

variação de bem estar seja medida em unidades comparáveis aos outros custos e/ ou benefícios com os quais queremos confrontá-la. Por exemplo, no caso de um investimento de infra-estrutura que provoque uma redução no preço de um bem de primeira necessidade, como os custos de investimento são expressos em unidades monetárias, também gostaríamos de medir a variação no bem estar do consumidor em unidades monetárias.

Duas medidas de variação de bem-estar são frequentemente empregadas com esse intuito. Seus nomes são *variação compensatória* e *variação equivalente*. Nesse texto procuramos dar uma explicação teórica de por que essas medidas podem se consideradas como medidas adequadas, do ponto de vista da teoria econômica, de variações no bem estar do consumidor.

Nossa argumentação se divide em três partes: na seção 1 apresentamos o conceito de compesação de renda e a idéia de preferências com relação a preços e renda; na seção 2, definiremos as medidas de variação equivalente e de variação compensatória e na seção 3, apresentaremos algumas funções úteis para os cálculos dessas medidas, mostrando como essas funções se relacionam entre si e com a função de utilidade do consumidor.

Trabalharemos aqui com o caso de dois bens, cujas quantidade consumidas serão usualmente representadas por x_1 e x_2. Também convencionaremos usar m para representar a renda do consumidor.

1 Compensação na renda

Comecemos revendo o conceito de compensação na renda. Imagine que o preço do bem 1 varie de um preço inicial p_1^0 para um preço final p_1^1 enquanto o preço do bem 2 permanece constante. De que modo a renda do consumidor deve ser reajustada de modo a fazer com que essa variação de preço não cause impacto sobre o bem estar do consumidor? Há duas respostas para essa pergunta: uma aproximada – a renda deve ser reajustada pela compensação de Slutsky– e uma exata – a renda deve ser reajustada pela a compensação de Hicks. Comecemos falando da resposta aproximada.

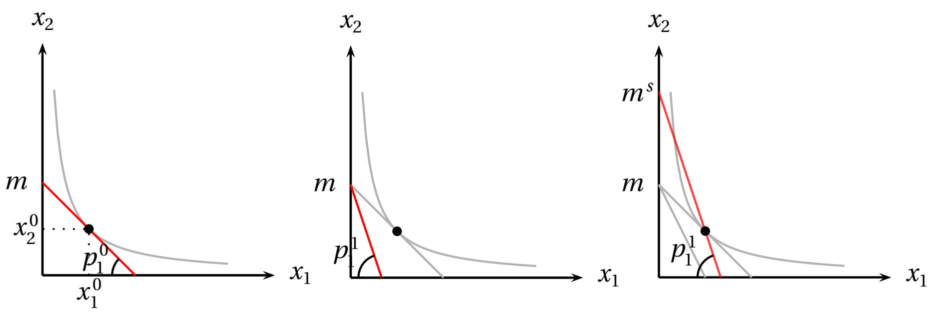
1.1 Compensação de Slutsky

Para simplificar nossa vida, vamos trabalhar com o caso de apenas dois bens. Sejam x_1^0 e x_2^0 as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente, quando o preço do bem 1 é p_1^0. Caso as preferências do consumidor sejam monotônicas, essa cesta se localizará sobre a linha de restrição orçamentária, isto é, sendo m a renda do consumidor e p_2 o preço do bem 2, $p_1^0 x_i^0 + p_2 x_2^0 = m$. Caso preço do bem 1 mude para p_1^1, dizemos que a renda do consumidor é reajustada de acordo com a *compensação de Slutsky*, quando ela é reajustada de modo a fazer com que a cesta de bens (x_1^0, x_2^0) continue a ser um ponto sobre a linha de restrição orçamentária do consumidor ao novo preço p_1^1. Em outras palavras, se chamarmos de m^s a renda do consumidor após a compensação de Slutsky, temos

$$m^s = p_1^1 x_1^0 + p_2 x_2^0.$$

Em outras palavras a compensação de Slutsky é a variação na renda necessária para fazer com que esta seja a menor renda possível para a qual ainda é possível adquirir, ao novos preços, a cesta de bens consumida inicialmente.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que o preço do bem 2 é igual a $p_2 = 1$, ou seja, vamos medir a a renda do consumidor e o preço do bem 1 em unidades do bem 2.[1] Nesse, caso, a linha de restrição orçamentária terá um coeficiente angular dado por $-p_1$ e cruzará o eixo das ordenadas em m.



(a) Linha de restrição orçamentária ao preço inicial

(b) Efeito de um aumento de preço sobre a linha de restição orçamentária

(c) linha de restrição orçamentária após compensação de Slutsky

Figura 1: A compensação de Slutsky

Imagine que um consumidor se depare com uma linha de restrição orçamentária inicial tal como a apresentada na Figura 1(a), definida pelo preço p_1^0 e pela renda m. O equilíbro desse consumidor nessa situação incial é o ponto de tangência da linha de restrição orçamentária com a curva de indiferença mais alta que ainda tem ponto em comum com essa linha, (x_1^0, x_2^0). A Figura 1(b) mostra o que ocorreria com essa linha de restrição orçamentária caso o preço do bem 1 fosse alterado para $p_1^1 > p_1^0$. A compensação de Slutsky corresponderia ao aumento de renda necessário para fazer com que, ao preço final p_1^1, a linha de restrição orçamentária volte a passar sobre o ponto de consumo inicial (x_1^0, x_2^0). A Figura 1(c) mostra, destacada em vermelho, a posição de linha linha de restrição orçamentária após a compensação de Slutsky.

[1]Isso implica apenas que estamos tomando o bem 2 como a unidade de medida de valor, de tal sorte que o preço do bem 1 é expresso como quantidade do bem 2 necessária para se adquirir uma unidade do bem 1 e a renda do consumidor é expressa como a quantidade máxima do bem 2 que ele poderia adquirir. Mais formalmente, lembre-se que a função de demanda é homogênea de grau zero em relação a preços e renda, isso é, se fizermo todos os preços e a renda do cunsumidor variar na mesma proporção, a demanda desse consumidor não irá alterar-se, pois sua linha de restrição orçamentária permanecerá imóvel. Em particular, a demanda do condumidor não será alterada caso multipliquemos os preços p_1 e p_2 e a renda m por $1/p_2$, isto é, $x_1(p_1, p_2, m) = x_1(p_1/p_2, 1, m/p_2)$ e $x_2(p_1, p_2, m) = x_1(p_1/p_2, 1, m/p_2)$

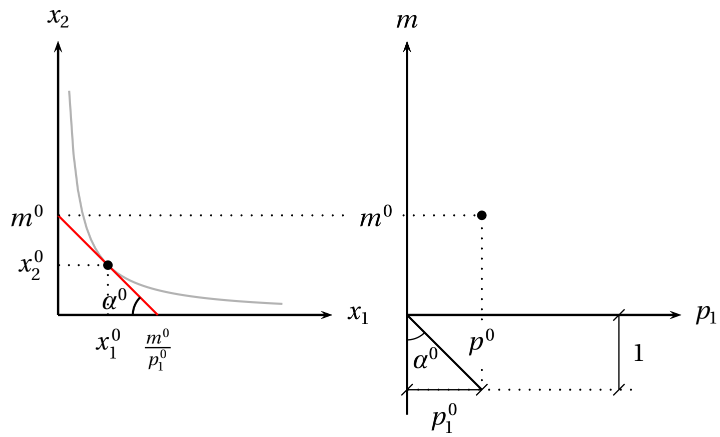
Vale observar que, com a compensação de Slutsky, nosso consumidor fica em situação melhor do que a situação na qual se encontrava inicialmente. Isso porque a linha de restrição orçamentária da Figura 1(c) tem alguns pontos que ficam acima da curva de indiferença na qual se econtra a cesta de consumo original (x_1^0, x_2^0). Desde que as preferências do consumidor sejam estritamente convexas e representáveis por uma função de utilidade diferenciável e que a cesta de consumo inicial contenha quantidades positivas dos dois bens, essa melhora, após a compensação de Slutsky, na situação do consumidor em relação à sua situação inicial deverá ser observada.

A linha de compensação de Slutsky

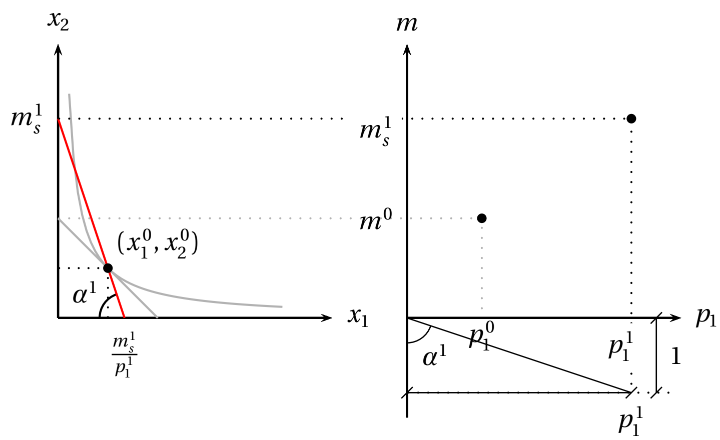
A partir de um gráfico como o da Figura 1, podemos construir um outro gráfico relacionando o preço do bem 1 com a renda do consumidor após a compensação de Slutsky. Isso é ilustrado na Figura 2. Na Figura 2(a),representamos, à esquerda, uma situação inicial na qual a linha de restrição orçamentária é definida pelo preço p_1^0 e pela renda m^0, de tal sorte que o intercepto dessa linha com o eixo horizontal é m^0/p_1^0 e, visto que assumimos que o preço do bem 2 é unitário, o intercepto com o eixo vertical é m^0. Notamos por α^0 o ângulo agudo formado entre a linha de restrição orçamentária e o eixo horizontal. Como o coeficiente angular da linha de restrição orçamentária é dado por p_1^0, $\operatorname{tg}\alpha^0 = p_1^0$. Nessa situação inicial, o consumidor demanda a cesta de bens (x_1^0, x_2^0). Apenas como referência, mostramos também a curva de indiferência desse consumidor associada à cesta demandada de bens. No gráfico à direita, representamos o preço do bem 1 no eixo horizontal e, no eixo vertical, a renda do consumidor, de tal sorte que o preço do bem 1 e a renda iniciais definem um ponto sobre esse gráfico.

A ordenada (posição no eixo vertical) desse ponto é a renda m^0, igual à ordenada do ponto de intersecção, no gráfico à esquerda, entre a linha de restrição orçamentária e o eixo vertical. Assim, devemos marcar, no gráfico à direita um ponto na mesma altura que esse intersepto. Já para determinar a coordenada (posição no eixo horizontal), traçamos, primeiramente um ângulo com a mesma medida que α^0, com vértice na origem e o eixo horizontal com um dos lados e uma linha reta pontilhada parelela, a uma distância igual a 1, e abaixo do eixo horizontal. Os pontos de cruzamento dessa linha reta com os lados desse ângulo conjuntamente com a origem definem um triângulo retângulo, com um dos ângulos igual a α^0, e o cateto adjacente a esse ângulo igual a 1, de tal sorte que o outro cateto tem medida dada por $1 \times \operatorname{tg}\alpha^0 = p_1^0$, a coordanada que buscávamos.

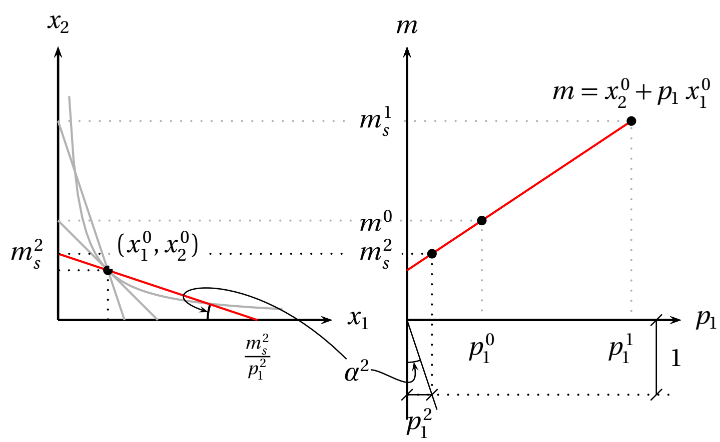
Na Figura 2(b) desenhamos, à esquerda, em vermelho a linha de restrição orçamentária que seria obtida após uma elevação no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1 e a correspondente compensação de Slutsky, sendo a renda compensada m_s^1. Com um procedimento igual ao adotado na Figura 2(a), marcamos o ponto (p_1^1, m_d^1) no gráfico à direita. Na Figura 2(c) repetimos o mesmo procedimento, supondo um preço $p_1^2 < p_1^0$ e uma renda, após a compensação de Slutsky, igual a m_s^2. No gráfico à direita dessa figura, marcamos não apenas o preço p_1^2 e sua respectiva renda compensada, como também, a linha que obteríamos caso continuássemos a marcar para todos os possíveis preços do bem 1 os valores da renda do consumidor



(a) O preço do bem 1 e a renda do consumidor são representados por um ponto no gráfico à direita

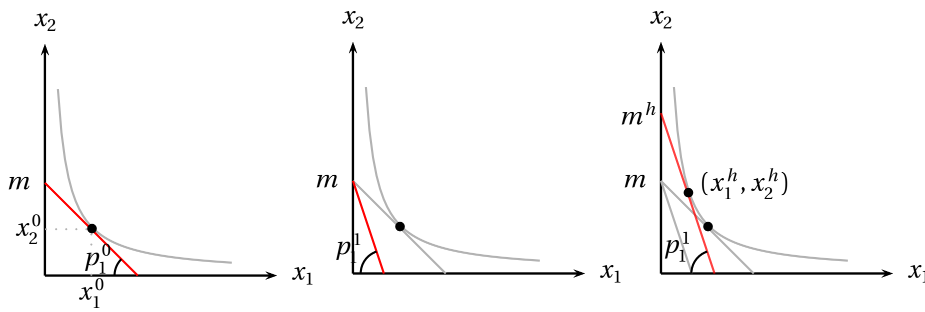


(b) Um novo preço e a renda compensada *à la Slutsky* são representados por um outro ponto.



(c) A mesma coisa é feita para um outro preço. Os três pontos obtidos pertencem à *linha de compensação de Slutsky*.

Figura 2: A linha de compensação de Slutsky



(a) Linha de restrição orçamentária ao preço inicial

(b) Efeito de um aumento de preço sobre a linha de restição orçamentária

(c) linha de restrição orçamentária após compensação de Hicks

Figura 3: A compensação de Hicks

após a compensação de Slutsky. Chamaremos essa linha de *linha de compensação de Slutsky*.

Note que a linha de compensação de Slutsky é uma linha reta. Essa linha reta tem inclinação x_1^0 e cruza o eixo horizontal em x_2^0. Isso ocorre porque a compensação de Slutsky é aquela que faz com que a cesta de consumo original permaneça sobre a linha de restrição orçamentária. Desse modo, ela define uma relação entre o preço do bem 1 e a renda ajustada do consumidor dada pela expressão $m = x_2^0 + p_1\, x_1^0$, cujo gráfico, caso consideremos x_2^0 e x_1^0 constantes, é uma linha reta com coeficiente angular x_1^0 e intercepto com o eixo vertical igual a x_2^0.

1.2 Compensação de Hicks

Suponha que, em uma situação inicial, um consumidor se defronte com o preço p_1^0 tendo uma renda m e, ao maximizar sua utilidade, obtém um nível de utilidade u^0. Caso haja uma variação no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1, definimos a compensação de Hicks como a variação na renda desse consumidor necessária para fazer com que, em equilíbrio, após a variação no preço do bem 1, ele volte a obter o mesmo nível de utilidade inicial u^0.

A Figura 3 ilustra o conceito de compensação de Hicks para um aumento no preço do bem 1. A Figura 3(a) mostra uma linha de restrição orçamentária inicial com preço p_1^0 e renda m. A Figura 3(b) mostra o efeito de um aumento no preço do bem 1 para p_1^1 sobre essa linha de restrição orçamentária. Finalmente, a Figura 3(c) mostra o que acontece com essa linha de restrição orçamentária quando a renda é reajustada de acordo com a compensação de Hicks. A renda compensada *à la* Hicks, m^h, deve ser tal que a linha de restrição orçamentária volte a tangenciar a curva de indiferença sobre a qual o consumidor se encontrava em seu equilíbrio inicial, (x_1^0, x_2^0).

Note que as figuras 3(a) e (b) são idênticas às figuras 2(a) e (b), mas há uma diferença entre as figuras 2(c) e 3(c). Enquanto na Figura 2(c) a linha de restrição orçamentária, após a compensação de Slutsky na renda, passa sobre a cesta de

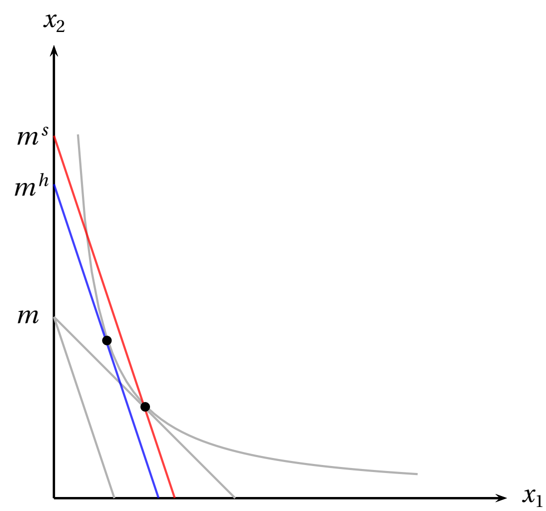


Figura 4: As linhas de restrição orçamentárias após a compensação de Slutsky (em vermelho) e de Hicks (em azul).

consumo original, na Figura 3(c), essa linha, após a compensação de Hicks, passa abaixo e à esquerda da cesta demandada originalmente. Isso indica que renda compensada à maneira de Hicks é inferior à renda compensada à moda de Slutsky. Isso é mais fácil de ser visto na Figura 4

Essa deve ser, de fato a regra. Quando há uma mudança nos preços, caso reajustemos a renda de modo a garantir que a cesta de bens inicialmente consumida permaneça acessível, ou seja, caso a renda seja reajustada por uma compensação de Slutsky, podemos ter certeza de que esse consumidor não estará pior do que na situação inicial, pois, em último caso, o consumidor pode ainda adquirir a cesta de bens inicial. Assim, a renda reajustada pela compensação de Hicks não pode ser superior à renda reajustada pela compensação de Slutsky. Adicionalmente, como ocorre no nosso exemplo, caso as preferências do consumidor sejam estritamente convexas, a cesta de bens demandada inicialmente contenha quantidades positivas dos dois bens e as curvas de indiferença sejam apresentem “bicos” ou angulosidades, quando há uma mudança no preço relativo p_1/p_2 seguida de uma compensação de Slutsky, a linha de retrição orçamentária *cruza* a curva de indiferença associada à cesta de consumo original, tal como ocorre com a linha de restrição orçamentária em vermelho da Figura 4. Isso significa que um trecho da linha de restrição orçamentária está acima da curva de indiferença original, de tal sorte que o consumidor tem acesso a cestas de bens superiores à que ele consumia inicialmente. Como consequência, para fazer com que o consumidor volte a ter exatamente o mesmo nível de utilidade que ele tinha na situação inicial, a renda reajustada (pela compensação de Hicks) deve ser inferior à renda reajustada pela compensação de Slutsky.

A curva de compensação de Hicks ou curva de indiferença indireta.

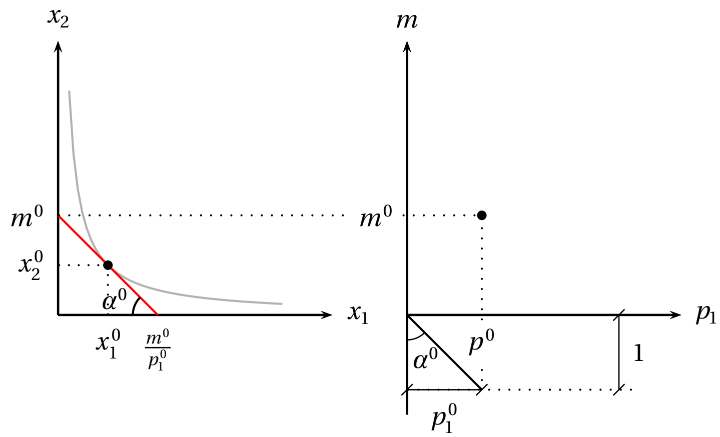
Na Figura 2 mostramos como a renda compensada pelo critério de Slutsky se comporta quando o preço do bem 1 varia. Na Figura 5, mostramos, de modo similar, como a renda compensada pelo critério de Hicks varia em resposta a variações em p_1. A Figura 5(a) é idêntica à Figura 2(a) e mostra, no gráfico à esquerda, a situação inicial de referência na qual a renda do consumidor é m^0, o preço do bem 1 é p_1^0 e o consumidor opta por demandar a cesta de bens (x_1^0, x_2^0). No gráfico à direita, marcamos um ponto para indicar que ,quanto o preço do bem 1 é p_1^0, a renda que faz com que, em equilíbrio, o consumidor fique com o mesmo nível de utilidade que o da situação inicial é m^0. Na Figura 5(b), mostramos, à esquerda, a linha de restrição orçamentária do consumidor após uma elevação no preço do bem 1 para p_1^1 e a aplicação da compensação se Hicks sobre sua renda, que faz com que esta fique igual a m_h^1. À direita, marcamos mais um ponto indicando que, quando o preço é p_1^1, a renda necessária para fazer com que o consumidor obtenha o nível de utilidade inicial é m_h^1.

O mesmo procedimento é feito na Figura 5(c), supondo-se uma redução no preço do bem 1 para p_1^2. Após a compensação de Hicks, a renda do consumidor passa a ser m_h^2 e o ponto (p_1^2, m_h^2) é marcado no gráfico à direita indicando que, para essa combinação de preço e renda, a utilidade atingida pelo consumidor também é igual à utilidade inicial. Caso repetíssemos esse procedimento para todos os possíveis valores de p_1, o conjunto dos pontos que marcaríamos no gráfico à direita, formariam uma curva, tal como a curva em vermelho desse gráfico, que podemos chamar de *curva de compensação de Hicks* ou *curva de indiferença indireta*. O último nome decorre do fato de que, em equilíbrio, o consumidor obtém o mesmo nível de utilidade em qualquer par de preço e renda sobre essa curva, de tal sorte que ele deve ser indiferente entre essas pares. Por exemplo, ele deve ser indiferente entre receber uma renda m_h^1 quando o preço do bem 1 é p_1^1 ou receber uma renda m_h^2 quando o preço do bem 1 é p_1^2. Essa indiferença pode ser constatada *indiretamente*, quando confrontamos as linhas de restrição orçamentária definidas por esses pares de preço e renda com as preferências do consumidor, no gráfico à esquerda.

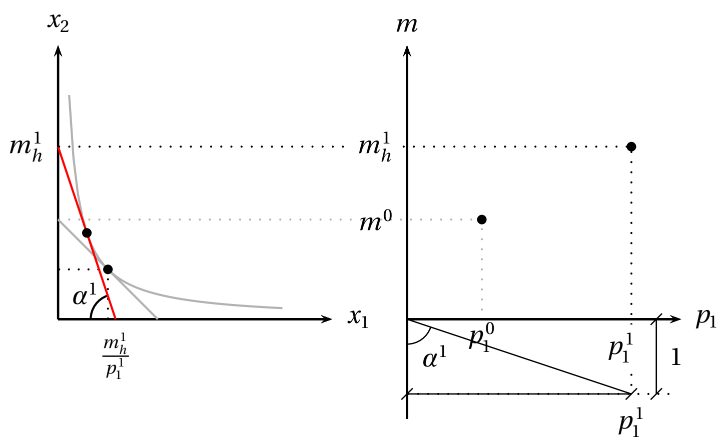
Duas propriedades da curva de indiferença indireta.

Considere o gráfico à esquerda da Figura 6. Nele vemos duas linhas de restrição orçamentária com as cestas demandadas em cada uma dessas linhas. Se o preço do bem 1 é p_1^0 e a renda do consumidor é m^0, o consumidor demanda a cesta (x_1^0, x_2^0). Quando o preço do bem 1 sobe para p_1^1 e, a renda do consumidor, para m^1, sua demanda é alterada para (x_1^1, x_2^1). Como as cestas (x_1^0, x_2^0) e (x_1^1, x_2^1) estão sobre a mesma curva de indiferença, podemos concluir que os pontos (p^0, m^0) e (p^1, m^1) estão sobre a mesma curva de indiferença indireta. No gráfico à direita, desenhamos essa curva em vermelho. Essa curva de indiferença indireta (curva de compensação de Hicks) foi desenhada tendo por base a curva de indiferença do gráfico à esquerda.

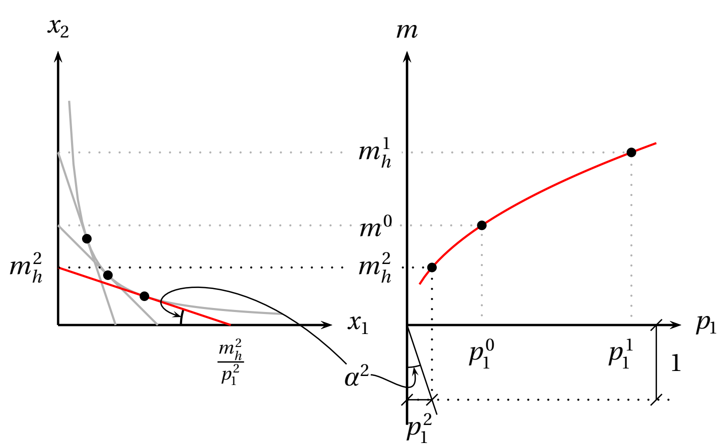
Diferentemente, do que acontece com a curva de compensação de Hicks, a



(a) O preço do bem 1 e a renda do consumidor são representados por um ponto no gráfico à direita



(b) Um novo preço e a renda compensada *à la Hicks* são representados por um outro ponto.



(c) A mesma coisa é feita para um outro preço. Os três pontos obtidos pertencem à *A curva de compensação de Hicks.*

Figura 5: A curva de compensação de Hicks

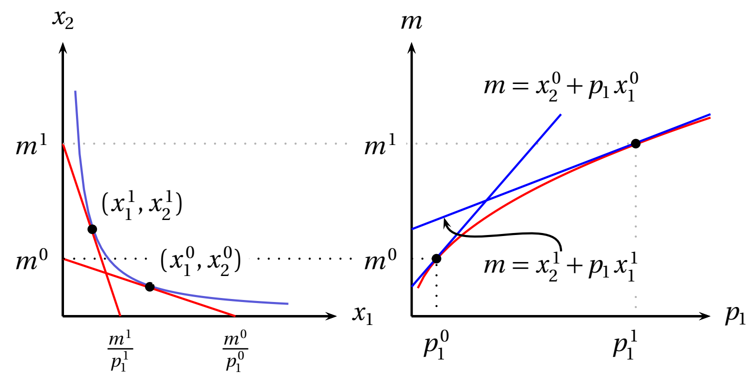


Figura 6: Uma curva de indiferença indireta (em vermelho) e duas linhas de compensação de Slutsky

curva de compensação Slutsky não toma por referência um nível de utilidade ou uma curva de indiferença, mas sim uma cesta de bens. Desse modo, ao longo de uma curva de indiferença, podemos associar, para cada cesta de bens, diferentes linhas de compensação de Slutsky. Na Figura 6, fazemos isso para as cestas de bens (x_1^0, x_2^0) e (x_1^1, x_2^1). Considerando ainda que p_1 e m são medidos em termos do bem 2 ($p_2 = 1$), a expressão para a linha de compensação de Slutsky associada à cesta (x_1^0, x_2^0) é $m = x_2^0 + p_1 x_1^0$. Já a expressão para a linha de compensação de Slutsky associada à cesta de bens (x_1^1, x_2^1) é $m = x_2^1 + p_1 x_1^1$. Essas duas linhas são desenhadas em azul no gráfico à direita da Figura 6. O que podemos dizer a respeito da relação entre essas duas linhas e a curva de compensação de Hicks (em vermelho)?

Primeiramente, note que as cestas de bens (x_1^0, x_2^0) e (x_1^1, x_2^1), que tomamos por referência para definir essas linhas de compensação de Slutsky, pertencem à curva de indiferença que tomamos por base para contruir a curva de indiferença indireta do gráfico à esquerda da Figura 6. Assim sendo, lembrando que a renda compensada de Slutsky nunca é inferior e, geralmente, é superior à renda necessária para manter a utilidade do consumidor inalterada, podemos concluir que a curva de indiferença indireta ou curva de compensação de Hicks dessa figura deve todos seus pontos abaixo dessas linhas de compensação de Slutsky ou, eventualmente, sobre essas linhas, mas nunca acima dessas linhas.

Note também que o ponto (p_1^0, m^0) pertence tanto à curva de compensação de Hicks quanto à linha de compensação de Slutsky definida por $m = x_2^0 + p_1 x_1^0$. Como a curva de compensação de Hicks não fica acima dessa linha seja à direita seja à esquerda desse ponto, conluímos que essas duas curvas não podem se cruzar e, portanto devem tangenciar-se em (p_1^0, m^0). Isso implica duas coisas. Primeiramente, por tangenciar a reta $m = x_2^0 + p_1 x_1^0$ e não estar acima dela, a curva de compensação de Hicks ou curva de indiferença indireta deve ser côncava abaixo. Em segundo lugar, a inclinação da curva de compensação de Hicks no ponto (p_1^0, m^0) deve ser igual à inclinação da linha de compensação de Slutsky

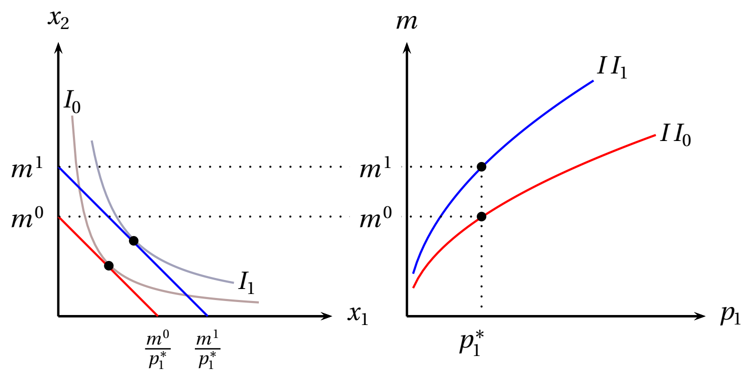


Figura 7: Duas curvas de indiferença e duas curvas de indiferença indireta

que ela tangencia nesse ponto, descrita por $m = x_2^0 + p_1 x_1^0$. Essa inclinação é igual a $x_1^0 = x_1(p_1^0, 1, m^0)$, ou seja, a quantidade demandada do bem 1 quando a renda é m^0 e o preço desse bem é p_1^0.

Com raciocínio idêntico, concluímos que a curva de compensação de Hicks do gráfico à direita da Figura 6 tangencia no ponto (p_1^1, m^1) a linha de compensação de Slutsky associada à cesta de bens (x_1^1, x_2^1) e, portanto, tem, nesse ponto, inclinação $x_1^1 = x_1(p_1^1, 1, m^1)$. De um modo geral, podemos enunciar, portanto as duas seguintes propriedades para a curva de indiferença indirata:

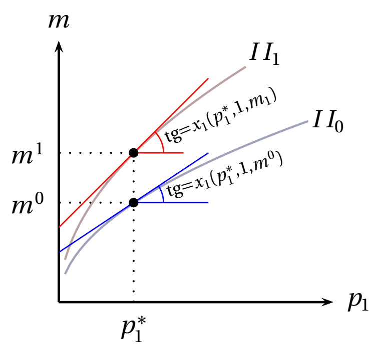
1. A curva de indiferença indireta ou curva de compensação de Hicks é côncava abaixo.

2. Se um ponto (p_1^*, m^*) qualquer pertence à curva de indiferença indireta, então, a inclinação da linha reta tangente a essa curva nesse ponto é dada pela quantidade demandada do bem 1 quando a renda do consumidor é m^* e o preço desse bem é p_1^*, isto é, $x_1(p_1^*, 1, m^*)$.

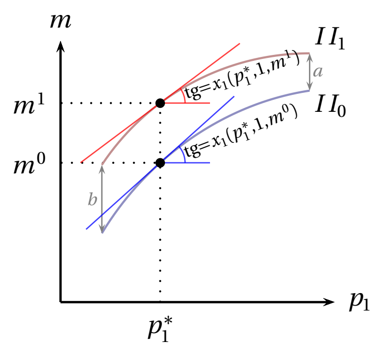
3. A linha reta tangente a essa curva de indiferença indireta no ponto $(p_1^*, 1, m^*)$ tem a fórmula $m = x_2(p_1^*, 1, m^*) + p_1\, x_1(p_1^*, 1, m^*)$ e é a linha de compensação de Slutsky associada à cesta de bens $(x_1(p_1^*, 1, m^*)$.

1.3 Curvas de indiferença indireta, bens normais e bens inferiores.

Para cada curva de indiferença de um consumidor existe uma curva de compensação de Hicks (indiferença indireta), isto é, uma relação entre o preço do bem 1 e a renda necessária para fazer com que esse consumidor demande uma cesta de bens sobre a curva de indiferença. Isso significa que, do mesmo modo que há inúmeras curvas de indiferença, também há inúmeras curvas de compensação de Hicks. A Figura 7 ilustra à esquerda duas curvas de indiferença, I_0 e I_1, e à direita



(a) Bem normal



(b) Bem inferior

Figura 8: O comportamento das curvas de indiferença indireta

as curvas de compensação de Hicks, II_0 e II_1 associadas a essas curvas de indiferença. Você pode observar que, dado que a curva de indiferença I_1 está acima da curva de indiferença I_0, a curva de indiferença indireta II_1, associada à curva de indiferença I_1, deve estar acima da curva de compensação de Hicks II_0, associada à curva de indiferenção I_0. Isso porque, ao mesmo preço do bem 1, a renda que faz com que a linha de restrição orçamentária tangencie a curva de indiferença mais elevada (I_1) é superior à renda que faz com que a linha de restrição orçamentária tangencie a curva de indiferença mais baixa (I_0). Por exemplo, se o preço é p_1^*, para que o consumidor demande sobre a curva de indiferença I_1, a renda deve ser m_1 e, para que a cesta de bens que ele demanda fique sobre a curva de indiferença I_0, basta a renda $m_0 < m_1$.

Você também deve ter reparado que a distância entre as curvas de compensação de Hicks na Figura 7 aumenta à medida em que p_1 aumenta, ou seja, quanto mais à direita, maior a distância entre as duas curvas. Isso ocorre porque o bem 1 se comporta, no nosso exemplo, como um *bem normal* – sua demanda responde positivamente a aumentos na renda. Para entender isso, lembre-se que a inclinação da curva de indiferença indireta em um determinado ponto é dada pela demanda pelo bem 1 associada a esse ponto. A Figura 8(a) reproduz as mesmas curvas de indiferença indireta da Figura 7, mas destaca as linhas retas tangentes a essas curvas de indiferença no ponto em que $p_1 = p_1^*$. A linha reta tangente à curva de indiferença indireta II_0 tem o coeficiente angular igual à quantidade demandada do bem 1 quando seu preço é p_1^* e a renda do consumidor é m^0, $x_1(p_1^*, 1, m^0)$. Já a linha reta tangente à curva II_1 tem o coeficiente angular dado por $x_1(p_1^*, 1, m^1)$. Como $m^1 > m^0$, se o bem 1 é normal, devemos ter $x_1(p_1^*, 1, m^1) > x_1(p_1^*, 1, m^0)$ e, portanto, a curva II_1 deve ser mais inclinada que a curva II_0. A inclinação dessas curvas indica suas taxas de crescimento em relação a p_1. Como II_1 é mais inclinada do que II_0, ela (II_1) cresce mais rapidamente com o aumento de p_1 do que II_0 e, portanto, afasta-se cada vez mais dessa curva quando p_1 aumenta, quer dizer, quando caminhamos para a direita no gráfico.

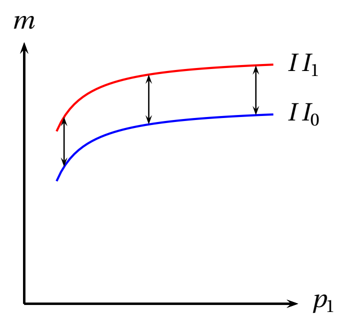


Figura 9: Duas curvas de compensação de Hicks para um consumidor com preferências quase-lineares.

A Figura 8(b) mostra como duas curvas de indiferença indireta se comportam no caso em que o bem 1 é um bem inferior. Nesse caso, se mantivermos o preço desse bem constante em p_1^* e elevarmos a renda do consumidor de m^0 para m^1, a demanda pelo bem 1 irá diminuir. Isso implica que, ao preço p_1^*, a curva de compensação de Hicks que passa pelo ponto (p_1^*, m^0) é mais inclinada do que a curva de compensação de Hicks que passa pelo ponto mais elevado (p_1^*, m^1), conforme se pode depreender da comparação das linhas retas em azul e vermelho. De fato, a inclinação da primeira curva é dada por $x_1(p_1^*, 1, m^0)$ e, a da segunda curva, por $x_1(p_1^*, 1, m^1)$. Sendo o bem 1 um bem inferior e $m^1 > m^0$, $x_1(p_1^*, 1, m^0) > x_1(p_1^*, 1, m^1)$. Como consequência, enquanto o bem 1 mantiver o comportamento de um bem inferior, quando o preço desse bem aumentar, a curva de compensação de Hicks mais baixa crescerá mais rapidamente do que a curva de compensação de Hicks mais elevada e a distância entre essas duas curvas diminuirá.[2]

Um caso de particular interesse ocorre quando o consumidor tem preferências quase-lineares representáveis por uma função de utilidade do tipo $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$. Nesse caso, sabemos que, desde que a quantidade demandada do bem 2 seja não nula, a demanda pelo bem 1 dependerá apenas do preço relativo desse bem e não do nível de renda do consumidor. Trata-se, portanto de um caso fronteiriço entre um bem normal e um bem inferior. Nesse caso, para um dado preço, não haverá diferença entre a inclinação de duas curva de indiferença indireta, de tal sorte que elas crescem à mesma taxa quando o preço varia e, consequentemente, mantém constante sua distância vertical. Esse caso é ilustrado na Figura 9.

[2]Compare, por exemplo, os segmentos de reta a e b na Figura 8(b) que medem, para preços diferentes a distância vertical entre as curvas de indiferença II_0 e II_1.

2 Variação compensatória e variação equivalente

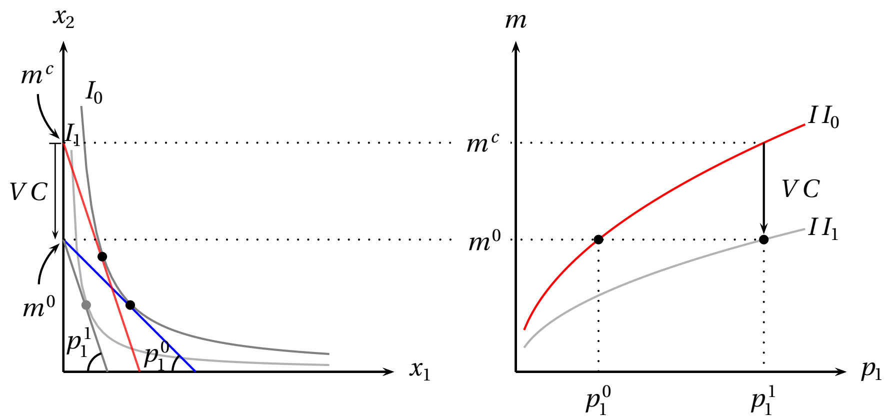
Voltemos agora à questão que nos prousemos no inívio desse texto. Como podemos medir a variação no bem estar de um consumidor decorrente de uma mudança nos parâmetros que definem a posição de sua linha de restrição orçamentária? Como sabemos, se considerarmos que a variação na função de utilidade do consumidor é a medida procurada, há várias medidas possíveis, visto que as preferências do consumidor podem ser representadas por incontáveis funções de utilidade alternativas. Mas nós não queremos uma medida de variação de bem estar qualquer. Queremos uma medida que seja conveniente para propósitos práticos. Se pesquisarmos a literatura acerca de medidas de variação no bem-estar do consumidor, verificaremos que, usualmente, duas medidas são consideradas convenientes. A primeira delas é a chamada *variação compensatória* e, a segunda, *variação equivalente*.

Mais adiante, apresentaremos uma definição técnica dessas duas medidas, mas, por ora, contentar-nos-emos com definições conceituais.

Definição 2.1. Suponha que um consumidor experimente uma mudança nos preços e em sua renda de (p_1^0, p_2^0, m^0) para (p_1^1, p_2^1, m^1). A *variação compensatória* (*VC*) associada a essa mudança é definida como o negativo da variação na renda m^1 necessária para fazer com que, após essa variação, o consumidor, defrontando-se com os preços p_1^1 e p_2^1, obtenha ao maximizar sua utilidade exatamente o mesmo nível de utilidade que obteria caso sua renda fosse m^0 e os preços dos dois bens fossem p_1^0 e p_2^0. Em outras palavras, a variação compensatória é o valor que faz com que o nível de utilidade máxima do consumidor quando os preços são p_1^1 e p_2^1 e sua renda é $m^1 - VC$ seja igual ao nível de utilidade máximo atingido quando os preços são p_1^0 e p_2^0 e sua renda é m^0.

Definição 2.2. Suponha que um consumidor experimente uma mudança nos preços e em sua renda de (p_1^0, p_2^0, m^0) para (p_1^1, p_2^1, m^1). A *variação equivalente* (*VE*) associada a essa mudança é definida como a variação na renda m^0 que faria que, após essa variação, o consumidor, defrontando-se com os preços p_1^0 e p_2^0, obtenha ao maximizar sua utilidade exatamente o mesmo nível de utilidade que obteria caso sua renda fosse m^1 e os preços dos dois bens fossem p_1^1 e p_2^1. Em outras palavras, a variação compensatória é o valor que faz com que o nível de utilidade máxima do consumidor quando os preços são p_1^0 e p_2^0 e sua renda é $m^0 + VE$ seja igual ao nível de utilidade máximo atingido quando os preços são p_1^1 e p_2^1 e sua renda é m^1.

A variação compensatória tem tal nome porque ela tem o mesmo valor absoluto da variação na renda necessária para *compensar* qualquer variação no bem-estar do consumidor provocada pela mudança nos parâmetros de sua linha de restrição orçamentária. Já o nome "variação equivalente" advém do fato de que a variação equivalente é a variação de renda que faz com que, aos preços e renda iniciais, haja uma variação de bem-estar equivalente à gerada pela alteração para os preços e renda finais.



(a) Variação compensatória e as curvas de indiferença

(b) Variação compensatória e as curvas de indiferença indireta

Figura 10: Variação Compensatória para um aumento em p_1

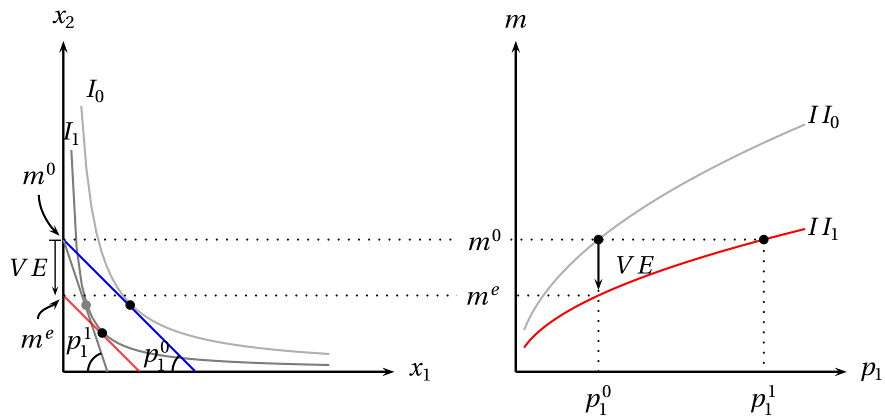
2.1 *VC* e *VE*: Interpretação gráfica

O caso de um aumento de preço.

As Figura 10 ilustra o conceito de variação compensatória tal como ele se aplica a um aumento no preço do bem 1 quando a renda do consumidor e o preço do bem 2 são mantidos constantes em m^0 e 1, respectivamente. Na Figura 10(a), a linha em azul é a linha de restrição orçamentária inicial, quando o preço do bem 1 é p_1^0. Após uma elevação nesse preço para p_1^1, a linha de restrição orçamentária passaria a ser a linha em cinza. Para devolver o consumidor ao nível de bem estar original seria necessário um aumento de renda que deslocasse essa linha de restrição orçamentária até a linha em vermelho, quando ela voltaria a tangenciar a curva de indiferença inicial. Com esse aumento, a renda do consumidor assumiria o valor m^c. A variação compensatória é o negativo desse aumento de renda e é dada pela diferença $m^0 - m^c$.

Na Figura 10(b), a mesma variação compensatória é mostrada tomando-se por base as curvas de indiferença indireta do consumidor. Inicialmente, o consumidor se defronta com o preço p_1^0 e aufere uma renda m^0, ficando sobre a curva de indiferença indireta II_0. Quando o preço do bem 1 aumenta para p_1^1, o consumidor passa para uma posição abaixo da curva de indiferença indireta inicial, sobre a curva de indiferença II_1. A variação compensatória é o negativo da variação na renda necessária para devolver nosso consumidor à curva de indiferença indireta original II_0.

Na Figura 11 mostra de modo similar a interpretação gráfica do conceito de variação equivalente. Na Figura 11(a), a linha de restrição orçamentária inicial é a linha em azul. Após uma elevação no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1, o consumidor se defronta com uma nova linha de restrição orçamentária (em cinza) e se vê for-



(a) Variação equivalente e as curvas de indiferença

(b) Variação equivalente e as curvas de indiferença indireta

Figura 11: Variação Equivalente para um aumento em p_1

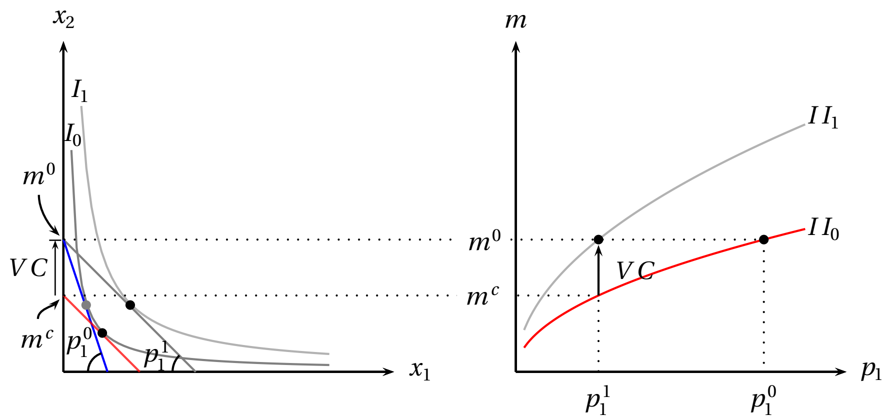
çado a consumir sobre uma curva de indiferença (I_1) mais baixa de a inicial (I_0). A variação equivalente é dada pela variação na renda do consumidor que faria com que, ao preço inicial p_1^0, o consumidor passasse a consumir sobre a mesma curva de indiferença da situação final, I_1. Em outras palavras, ela é dada pela diferença entre a renda m^e, que faria com que, ao preço inicial p_1^0, o consumidor obtivesse o mesmo nível de utilidade que obtém na situação final (com renda m^0 e preço p_1^1), e a renda da situação final $= m^0$.

A variação equivalente associada ao aumento no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1 pode ser visualizada com facilidade ainda maior na Figura 11(b). Após essa elevação no preço do bem 1, o consumidor, que inicialmente se encontra sobre a curva de indiferença indireta II_0, passa a se posicionar sobre a curva de indiferença indireta II_1. A variação equivalente é a variação na renda que faria com que a renda do consumidor fosse reduzia a m^e de tal sorte que, caso o preço do bem 1 não se alterasse, o novo par de preço e renda se encontrasse sobre a curva de indiferença indireta II_1, gerando um resultado equivalente, do ponto de vista do bem estar do consumidor, ao gerado pela elevação no preço do bem 1.

O caso de uma redução de preço

É interessante comparar a representação gráfica dos conceitos de variação compensatória e variação equivalente para o caso em que há um aumento no preço do bem 1 com a representação gráfica desses mesmos conceitos no caso em que há uma redução no preço do bem 1. Fazemos isso nas figuras 12 e 13. Estas diferem das figuras 10 e 11 por trocarem de posição o preço inicial p_1^0 com o preço final p_1^1, de tal sorte que, aquilo que representa um aumento de preço nas figuras 10 e 11 representa, nas figuras 12 e 13 uma redução de preços em igual magnitude.

Na Figura 12(a), a linha de restrição orçamentária inicial, quando o preço do



(a) Variação compensatória e as curvas de indiferença

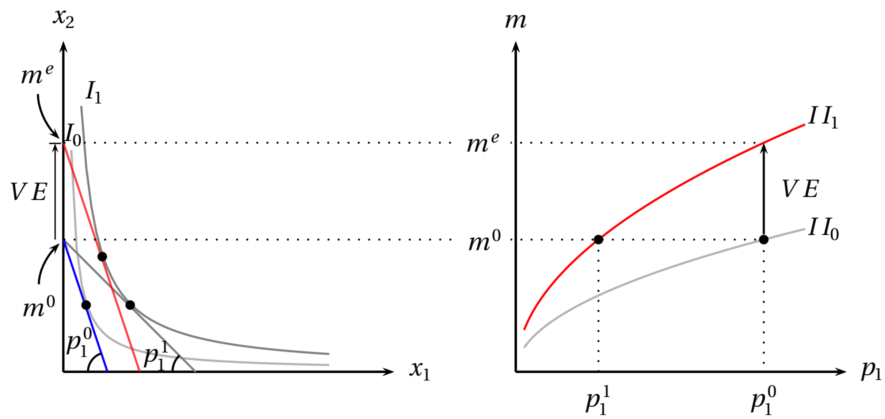
(b) Variação compensatória e as curvas de indiferença indireta

Figura 12: Variação Compensatória para uma redução em p_1

bem 1 é p_1^0 é a linha em azul. Com a redução desse preço para p_1^1, a linha de restrição orçamentária passa a ser a linha em cinza, de tal forma que o consumidor, que inicialmente consumia uma cesta de bens sobre a curva de indiferença I_0, obtém um novo equilíbrio na curva de indiferença mais elevada I_1. A variação compensatória na renda associada a essa redução no preço do bem 1 é a redução na renda que faria com que, ao preço final p_1^1, o consumidor voltasse a consumir sobre a curva de indiferença original I_0. Se m_c é a renda necessária para fazer com que a linha de restrição orçamentária, ao preço p_1^1, volte a tangenciar a curva de indiferença inicial I_0, então, a variação compensatória será a diferença entre a renda efetiva do consumidor após a redução no preço, m^0 e a renda m^c.

Essa diferença é vista com mais facilidade na Figura 12(b). Nela, a curva de indiferença inicial é II_0, visto que, num primeiro instante, o consumidor possui a renda m^0 e defronta-se com o preço p_1^0 para o bem 1. Na situação final, a renda não se altera, mas o preço é reduzido para p_1^1, de tal sorte que o consumidor encontra-se sobre a curva de indiferença indireta mais elevada II_1. A variação compensatória na renda é a redução de renda que faria com que, ao preço final, o consumidor voltasse para a curva de indiferença indireta inicial II_0. Graficamente, ela é a distância vertical entre as curvas de indiferença indireta II_1 e II_0 calculada para o preço p_1^1.

As figuras 13(a) e 13(b) ilustram como obtemos a variação equivalente para a mesma redução de preço. Na Figura 13(a) vemos que, após uma redução no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1, o consumidor passa de um equilíbrio sobre a curva de indiferença I_0 para a curva de indiferença mais elevada I_1. Caso não ocorresse essa redução no preço seria necessário uma elevação na renda do consumidor de m^0 para m^e para fazer com que a linha de restrição orçamentária (destacada em vermelho) tangenciasse a curva de indiferença I_1. Assim, a variação equivalente é $VE = m^e - m^0$. Também podemos derivar a variação equivalente desse redução



(a) Variação equivalente e as curvas de indiferença

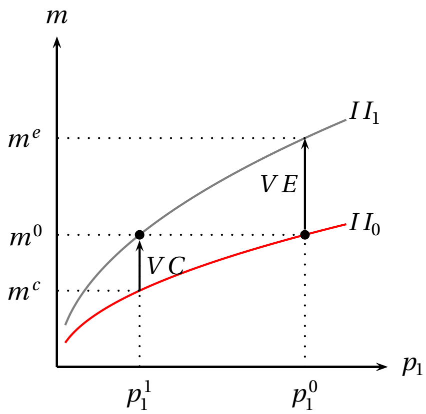
(b) Variação equivalente e as curvas de indiferença indireta

Figura 13: Variação Equivalente para uma redução em p_1

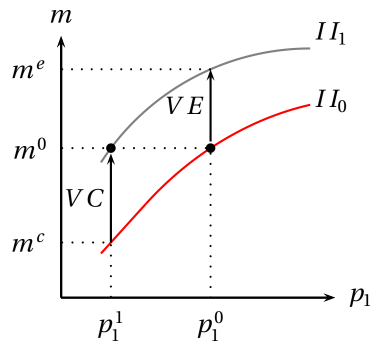
de preços através do mapa de curvas de indiferença indireta tal como é descrito na Figura 13(b). Nas condições iniciais, com o preço do bem 1 igual a p_1^0 e a renda do consumidor igual a m^0, o consumidor encontra-se sobre a curva de indiferença indireta II_0. Após a redução no preço do bem 1 para p_1^1, ele passa para um ponto sobre a curva de indiferença indireta II_1. A variação equivalente é o aumento na renda que faria com que, ao preço inicial, o consumidor se movesse para um ponto sobre a curva de indiferença indireta final II_1. Ela é dada pela distância vertical entre a curva de indiferença indireta final e a curva de indiferença indireta original, diferença essa calculada para no nível inicial do preço do bem 1, p_1^0.

2.2 Comparação entre a VC e a VA para bens normais e para bens inferiores.

Se você comparar a Figura 10(b) com a Figura 11(b), verá que em nosso exemplo, para a mesma elevação no preço do bem 1 a variação compensatória é em módulo superior à variação equivalente. Como essas duas variações têm sinal negativo, isso significa que a variação compensatória é *menor* que a variação equivalente. Comparando as figuras 12(b) e 13(b), você chegará a uma conclusão equivalente: no exemplo gráfico dado, quando há uma redução no preço do bem 1, a variação compensatória é inferior à variação equivalente. Por que isso acontece? No nosso exemplo, isso acontece porque as duas curvas de indiferença estão tão mais distantes entre si quanto mais à direita medimos essa distância, o que ocorre caso a curva de indiferença indireta mais elevada cresça mais depressa do que a curva de indiferença indireta mais baixa. Na seção 1.3 vimos que isso ocorre caso o bem em questão seja um bem norma. Desse modo, podemos concluir que, no caso de um bem normal, a variação equivalente associada a uma variação no preço desse bem



(a) Um bem normal



(b) Um bem inferior

Figura 14: Variações equivalente e compensatória para uma redução em p_1

é maior que a variação compensatória associada a essa mudança. Isso é ilustrado, para o caso de uma redução no preço do bem 1, na Figura 14(a) na qual mostramos, para facilitar a comparação tanto a variação compensatória (*VC*) quanto a variação equivalente (*VE*) associadas a uma redução no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1.

Já na Figura 14(b) mostramos que, caso se trate de um bem inferior, visto que nesse caso as curvas de indiferença indireta se aproximam à direita, a *VC* é, ao contrário do que ocorre com um bem normal, maior do que a *VE*.

3 Algumas novas funções

Os conceitos de variação equivalente podem ser definidos de um modo mais rigoroso através de uma exposição matemática. Faremos essa exposição nessa seção. Primeiramente, definiremos algumas funções úteis. Depois, mostraremos como os conceitos de variação compensatória e variação equivalente podem ser definidos a partir dessas funções. Finalmente, mostraremos uma nova interpretação gráfica para esses conceitos que é extensivamente usada em economia.

3.1 A função de utilidade indireta

A /emphfunção de utilidade indireta ($V(p_1, p_2, m)$) é uma função que retorna o valor máximo que a utilidade de um consumidor pode atingir dados os preços p_1 e p_2, e a renda m do consumidor. Sua definição é

$$V(p_1, p_2, M) = \max_{x_1, x_2}\{U(x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m\}. \tag{1}$$

Sendo que $U(x_1, x_2)$ é a função de utilidade do consumidor. Sabemos que as funções de demanda $x_1(p_1, p_2, m)$ e $x_2(p_1, p_2, m)$ retornam as quantidades dos bens 1 e 2, respectivamente, que maximizam o valor da função de utilidade do consumidor dados os preços p_1 e p_2 e sua renda m. Assim, a função de utilidade indireta também pode ser definida por:

$$V(p_1, p_2, M) = U(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)). \tag{2}$$

Exemplo: a função de utilidade indireta para preferências Cobb-Douglas

A última definição de uma função de utilidade indireta sugere um modo rápido de computá-la a partir da função de utilidade do consumidor. Considere, por exemplo, o caso de um consumidor cuja função de utilidade é $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$. Trata-se de uma função de utilidade do tipo Cobb-Douglas com os coeficientes normalizados de modo a fazer que sua soma seja igual a um. Encontramos as funções de demanda associadas a essa função de utilidade resolvendo o seguinte sistema de equações que descreve as condições de primeira ordem de maximização de utilidade:

$$\begin{cases} \dfrac{UMg_1}{UMg_2} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos as funções de demanda

$$x_1(p_1, p_2, m) = a\frac{m}{p_1} \tag{3}$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = (1-a)\frac{m}{p_2} \tag{4}$$

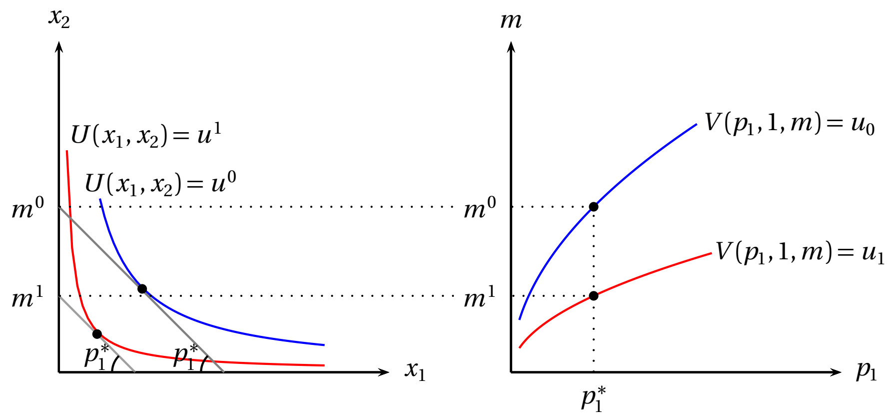
Usando essa funções e (2) obtemos enfim

$$V(p_1, p_2, m) = \left(a\frac{m}{p_1}\right)^a \left[(1-a)\frac{m}{p_2}\right]^{1-a} = a^a(1-a)^{1-a}\frac{m}{p_1^a p_2^{1-a}} \tag{5}$$

Utilidade indireta e curvas de indireferença indireta

Conforme vimos, as curvas de indiferença indireta representam combinações de p_1 e m para as quais, dado o preço do bem 2, a utilidade máxima que o consumidor é capaz de obter é constante. Portanto, ao longo de uma curva de indiferença indireta, o valor da função de utilidade indireta é mantido constante. Desse modo, da mesma maneira que chamamos as curvas de indiferença de um consumidor de curvas de iso-utilidade, também podemos chamar suas curvas de indiferença indireta de curvas de iso-indiferença indireta.

Isso é ilustrado na Figura 15. Na Figura 15(a), são mostradas duas curvas de indiferença, uma associada ao nível de utilidade u_0 e outra associada ao nível de utilidade $u^1 < u^0$. Quando o preço do bem 2 é unitário, o preço do bem 1 é igual a p_1^* e a renda é igual a m^0, o nível de utilidade máximo que o consumidor é capaz



(a) Curvas de indiferença e função de utilidade

(b) Curvas de indiferença indireta e a função de utilidade indireta

Figura 15: Curvas de indiferença e curva de indiferença indireta como curvas de nível

de atingir é u^0. Isso significa que $V(p_1^*, 1, m^0) = u^0$. A Figura 15(b) mostra, em azul, passando pelo ponto (p_1^*, m^0), uma curva de indiferença indireta. Por definição, o consumidor deve ser capaz de atingir nível de utilidade equivalente para todas as combinações de preço e renda ao longo dessa curva. Como o nível de utilidade atingido no ponto (p_1^*, m^0) é $V(p_1^*, m^0) = u^0$, devemos ter que, ao longo dessa curva, o valor da função de utilidade indireta é mantido constante em u^0, isto é, para qualquer ponto (p_1, m) sobre a curva de indiferença indireta em azul, devemos ter, $V(p_1, 1, m) = u^0$.

Votando à Figura 15(a), caso a renda de nosso consumidor passe a m^1 e os outros fatores que determinam a posição de sua linha de restrição orçamentária não se alterem, sua utilidade máxima será u^1. Isso é, $V(p_1^*, 1, m^1) = u^1$. Isso significa que, na Figura 15(b), qualquer ponto (p_1, m) sobre a curva de indiferença indireta que passa sobre o ponto s(p_1^*, m^1) (em vermelho) deve ser tal que $V(p_1, 1, m) = u^1$.

A função de dispêndio

Dados os preços dos bens e a renda do consumidor, a função de utilidade indireta retorna o nível de utilidade máxima que esse consumidor é capaz de obter. A função de dispêndio, notada por $e(p_1, p_2, u)$ informa qual deve ser a renda do consumidor de modo a garantir que sua utilidade máxima seja u. Ela pode ser definida pela seguinte igualdade:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u \tag{6}$$

Portando, o valor de $e(p_1, p_2, u)$ é a renda que o consumidor deve ter para que, quando os preços são p_1 e p_2 o valor de sua função de utilidade indireta seja u.

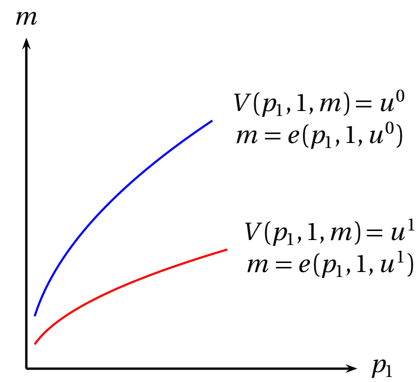


Figura 16: Curvas de indiferença indireta, função de utilidade indireta e função dispêndio.

Suponha que o preço do bem 2 seja mantido constante em $p_2 = 1$, que o preço do bem 1 varie e que a renda do consumidor seja reajustada de tal sorte que $m = e(p_1, 1, u)$. Nesse caso, pela definição da função dispêndio, teremos $V(p_1, 1, m) = u$. Isso significa que o conjunto dos pontos $(p_1, e(p_1, 1, u)$ descreve um curva de iso-utilidade indireta, ou, alternativamente, que as curvas de iso-utilidade indireta são gráficos da função de dispêndio calculados para um nível de utilidade constante e para $p_2 = 1$. Temos, portanto, duas maneiras alternativas de descrever uma curva de indiferença. Empregando a função de utilidade indireta, podemos definir a curva de indiferença indireta associada a um determinado nível de utilidade $\hat{u}$ como o conjunto dos pares (p_1, m) tais que $V(p_1, 1, m) = \hat{u}$. Empregando a função de dispêndio, podemos definir a mesma curva de indiferença indireta como o conjunto dos pares (p_1, m) tais que $m = e(p_1, 1, \hat{u})$. Essas duas representações alternativas são ilustradas na Figura 16.

Exemplo: a função dispêndio e preferências Cobb-Douglas.

Tomemos a mesma função de utilidade que empregamos para exemplificar a derivação de função de utilidade indireta, qual seja, $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$, já derivamos a função de utilidade indireta associada a essa função de utilidade, e vimos que ela é dada por (5). Usando essa expressão e a definição da função dispêndio, obtemos

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u \Rightarrow a^a (1-a)^{1-a} \frac{e(p_1, p_2, u)}{p_1^a p_2^{1-a}} = u.$$

Resolvendo a equação para $e(p_1, p_2, u)$, obtemos a expressão para a função de dispêndio associada a uma preferência Cobb-Douglas:

$$e(p_1, p_2, u) = u \frac{p_1^a p_2^{1-a}}{a^a (1-a)^{1-a}} \tag{7}$$

3.2 Função de demanda compensada.

A *função de demanda compensada*, tem por argumentos os preços dos bens e um nível alvo de utilidade e retorna quanto o consumidor irá demanda desse bem dados os preços dos bens e supondo que sua renda seja reajustada de modo a fazer com que, em equilíbrio, a utilidade obtida pelo consumidor seja exatamente igual ao nível alvo de utilidade. Assim, a função de demada compensada do bem i, $(i = 1, 2)$ pode ser definida como

$$h_i(p_1, p_2, u) = x_i(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)), \tag{8}$$

na qual $h_i(p_1, p_2, u)$ é a função de demanda compensada.

A função de demanda compensada é também conhecida *função de demanda hicksiana*, em referência a John Hicks (1904-1989), um dos mais importantes economistas do século XX, que fez importantes contribuições para a teoria da demanda, entre outra. Já a função de demanda usual (não compensada) é chamada de *função de demanda marshalliana*, em referência a Alfred Marshall (1842-1924), famoso economista inglês, que, além de importantes contribuições contribuiu para consolidar os fundamentos da teoria microeconômica moderna.

As curvas de demanda e de demanda compensada.

Já sabemos que a chamada curva de demanda, que, a partir de agora, também chamaremos de curva de demanda marshalliana, descreve a relação entre os valores assumidos pela função de demanda (marshalliana) de um consumidor e o preço de um bem quando a renda do consumidor e os preços dos outros bens são mantidos constantes. De modo similar, chamamos de *curva de demanda compensada* ou *hicksiana* o gráfico da relação entre o preço de um bem e a função de demanda compensada de um consumidor por esse bem quando os preços dos outros bens são mantidos constantes e a renda do consumidor é constantemente reajustada para garantir que seu nível de utilidade permaneça inalterado. Assim, uma curva de demanda marshalliana do bem 1, por exemplo, é dada pelo gráfico da função $x_1(p_1, p_2, m)$ quando se supõe p_2 e m constantes e uma curva de demanda hicksiana do mesmo bem é dada pelo gráfico da função $h_1(p_1, p_2, u)$ quando se supões p_2 e u constantes.

Na Figura 17 ilustramos a diferença na obtenção dessas duas curvas. O gráfico na parte de cima dessa figura mostra uma mapa de curvas de indiferença e algumas linhas de restrição orçamentária. Num primeiro momento o consumidor se defronta com a linha de restrição orçamentária em azulsendo o preço do bem 1 p_1^0, a renda do consumidor m^0 e o preço do bem 2 $p_2^0 = 1$. Ao maximizar sua função de utilidade, o consumidor adquire a quantidade x_1^0 do bem 1, obtendo o nível de utilidade u^0. Nessas condições, o ponto A no gráfico abaixo, com ordenadas x_1^0 e p_1^0, é tanto um ponto da curva de demanda marshalliana associada a $p_2 = p_2^0$ e $m = m^0$, pois x_1^0 é a quantidade do bem 1 que maximiza a utilidade do consumidor quando $p_1 = p_1^0$ e a renda do consumidor é m^0, quanto um ponto sobre a curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade u^0, pois x_1^0

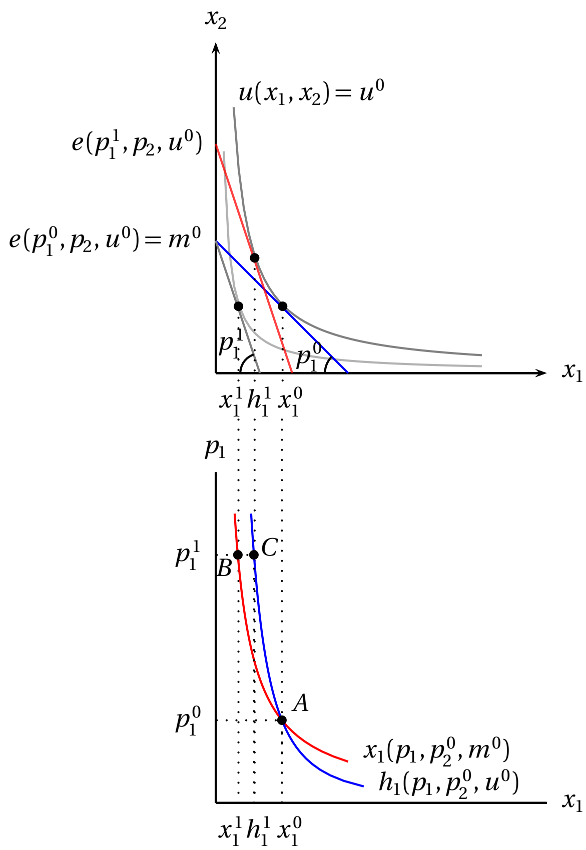


Figura 17: A construção das curvas de demanda marshalliana e hicksiana.

é a quantidade demandada do bem 1 quando o preço é p_1^0 e sua renda é ajustada para garantir que ele obtenha o nível de utilidade u^0.

Quando o preço do bem 1 sobe para p_1^1 e a renda do consumidor assim como o preço do bem 2 permanecem inalterados, a linha de restrição orçamentária de nosso consumidor se desloca para a linha em cinzae o consumidor obtém um novo equilíbrio consumindo uma quantidade x_1^1 de bem 1. No gráfico abaixo, ponto B, cujas ordenadas são x_1^1 e p_1^1, representa, portanto, um ponto sobre a curva de demanda marshalliana do bem 1 associada a $m = m^0$ e $p_2 = p_2^0$. Esta curva, representada pela curva em vermelho, deve, portanto, passar pelos pontos B e A. Porém, o ponto B não é um ponto da curva de demanda compensada associada a $u = u^0$ (e $p_2 = p_2^0$), pois, o equilíbrio obtido sobre a linha de restrição orçamentária em cinza não se dá sobre a curva de indiferença original, ou seja, nesse equilíbrio, o consumidor não obtém o nível de utilidade original u^0. Para que ele possa obter esse nível de utilidade ao novo preço, é necessário que sua renda seja reajustada para $e(p_1^1, p_2^0, m^0)$, de tal sorte que a linha de restrição orçamentária volte a tangenciar a curva de indiferença original (linha de restrição orçamentária em vermelho). Caso isso ocorra, o consumidor irá demandar, após a compensação em sua renda, a quantidade h_1^1 do bem 1. Desse modo, o ponto C ou (h_1^1, p_1^1) no gráfico abaixo representa um ponto sobre a curva de demanda compensada de nosso consumidor. Essa curva, em azul, deve passar portanto, pelos pontos A e C. Por que C está à direita de B? Porque o bem em questão é um bem normal, de tal sorte que o aumento na renda decorrente da compensação pela elevação no preço do bem 1 deve provocar um aumento na demanda pelo bem 1.

Se, ao contrário de uma elevação no preço do bem, ocorresse uma redução no preço desse bem, então, a variação na quantidade demandada seria maior na curva de demanda marshalliana do que sobre a curva de demanda hicksiana, pois, nesse caso, a compensação na renda necessária para manter a utilidade do consumidor constante seria negativa, de tal sorte que, em se tratando e um bem normal, a demanda desse bem após a compensação seria inferior à demanda verificada antes da compensação.

Concluímos, portanto, que no caso de um bem normal, para preços superiores ao correspondente ao cruzamento de uma curva de demanda compensada com uma curva de demanda marshalliana, a curva de demanda compensada deve ficar à direita da curva de demanda marshalliana e, para preços inferiores ao preço de cruzamento dessas curvas, a curva de demanda compensada deve ficar à esquerda da curva de demanda marshalliana. Em outras palavras, a curva de demanda compensada deve ter inclinação mais acentuada que a curva de demanda marshalliana.

Por raciocínio similar, podemos concluir que, no caso de um bem *inferior*, a curva de demanda compensada deverá ser menos inclinada que a marshalliana. No caso particular em que o consumidor tem preferências quase-lineares, representáveis por uma função de utilidade do tipo $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, a função de demanda pelo bem 1 será independente do nível de renda do consumidor e, nesse caso particular, as curvas de demanda marshalliana e compensada coincidirão.[3]

Várias curvas de demanda compensada.

É importante ressaltar que, visto que a demanda compensada de um bem depende não apenas do preço desse bem, mas também do nível de utilidade que se pretende manter constante e dos preços dos outros bens. Assim, para o mesmo consumidor, não há apenas uma, mas uma infinidade, de curvas de demanda compensada, cada uma delas associada a valores específicos de utilidade e de preços dos outros bens.[4]

A Figura 18 ilustra, essa fato, mostrando como, a duas curvas de indiferença, estão associadas duas curvas de demanda compensadas distintas. No painel su-

[3]Mais precisamente, essa conclusão só é válida quando a renda é suficientemente grande para garantir que o consumidor não opte por especializar-se no consumo do bem 1.

[4]Isso não deve ser surpresa, pois algo similar acontece com as curvas de demanda marshalliana. Também há uma infinidade dessas curvas, cada uma associada a valores específicos da renda do consumidor e dos preços dos outros bens.

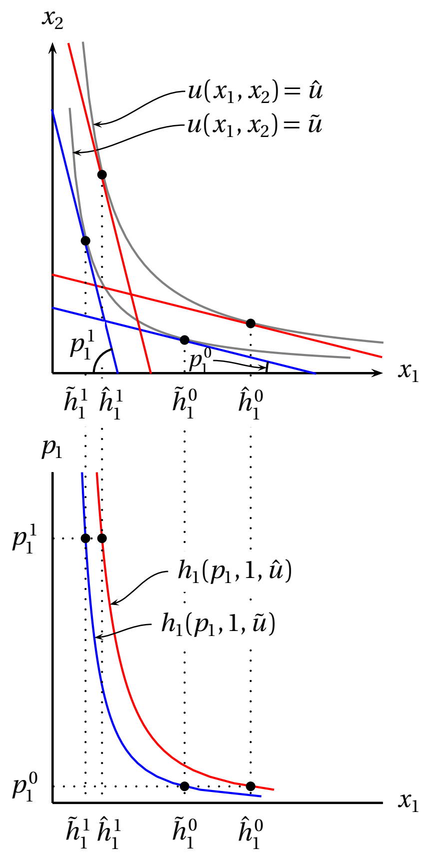


Figura 18: Duas curvas de demanda compensada.

perior, em cinza, vemos duas curvas de indiferença. A utilidade associada à mais elevadas delas é $\hat{u}$ e a utilidade associada à menos elevada é $\tilde{u}$. Cada uma dessas curvas de indiferença é tangenciada por duas linhas de restrição orçamentária, uma com inclinação p_1^0 e outra com inclinação p_1^1. Suporemos o preço do bem 2 constante igual a 1, de tal sorte que tais inclinações são iguais ao preço do bem 1.

Vemos que, quando o preço do bem 1 é p_1^0 a quantidade demandada do bem 1, quando a renda do consumidor é ajustada para fazer com que sua linha de restrição orçamentária tangencie a curva de indiferença associada ao nível de utilidade $\hat{u}$, é $\hat{h}_1^0$. Desse modo, o ponto $(\hat{h}_1^0, p_1^0)$ no painel inferior da Figura 18, pertence à curva de demanda compensada pelo bem 1 associada ao nível de utilidade $u = \hat{u}$ e ao preço do bem 2 $p_2 = 1$. Se a renda do consumidor for ajustada, todavia, para fazer com que ele atinja o nível de utilidade $\tilde{u}$, mantido o preço do bem 1 em p_1^0, então a demanda do bem 1 será $\tilde{h}_1^0$. Logo, o ponto $(\tilde{h}_1^0, p_1^0)$ pertence à curva de demanda compensada associada a $u = \tilde{u}$ e $p_2 = 1$.

De modo similar, podemos obter mais um ponto de cada curva de demanda compensada fazendo o preço do bem 1 assumir o valor p_1^1 e observando que, caso o preço do bem 2 seja mantido constante em $p_2 = 1$, a demanda do bem 1 será $\hat{h}_1^1$, caso a renda seja reajustada de modo a fazer com que a linha de restrição orçamentária tangencie a curva de indiferença associada ao nível de utilidade $\hat{u}$, e $\tilde{h}_1^1$, caso a renda do consumidor seja ajustada para fazer com que este obtenha o nível de utilidade $\tilde{u}$. Desse modo, o ponto $(\hat{h}_1^1, p_1^1)$ pertence à curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade $\hat{u}$ e o ponto $(\tilde{h}_1^1, p_1^1)$ pertence à curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade $\tilde{u}$.

Concluímos que, quando construímos uma curva de demanda compensada supondo que o nível de utilidade a ser mantido constante é $\hat{u}$, essa curva deve passar pelos pontos $(\hat{h}_1^0, p_1^0)$ e $(\hat{h}_1^1, p_1^1)$, como é feito pela curva em vermelho do painel de baixo da Figura 18. Se supusermos, entretanto, que o nível de utilidade a ser mantido constante é $\tilde{u}$, nossa curva de demanda compensada deve passar pelos pontos $(\tilde{h}_1^0, p_1^0)$ e $(\tilde{h}_1^1, p_1^1)$ tal como é feito pela curva em azul, de tal sorte que, para dois níveis de utilidade diferentes, obtivemos duas curvas de demanda compensada diferentes.

Exemplo: a função de demanda compensada para preferências Cobb-Douglas.

Continuemos exemplificando tomando o caso de uma função de utilidade $U(x_1, x_2) = x_1^a\, x_2^{1-a}$. Sabemos que a função de demanda pelo bem 1 é

$$x_1(p_1, p_2, m) = a\frac{m}{p_1}.$$

Substituindo m por $e(p_1, p_2, u)$ tal como obtido em (7), obtemos

$$h_1(p_1, p_2, u) = a\frac{u\frac{p_1^a\, p_2^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}}{p_1} = u\left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}. \tag{9}$$

Por procedimento análogo, você deve chegar à seguinte expressão para a demanda compensada para o bem 2:

$$h_2(p_1, p_2, u) = u\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\right)^{a} \tag{10}$$

3.3 Identidade de Roy e lema de Shepard.

Na seção 1.2, vimos que a inclinação da curva de indiferença indireta calculada em um ponto (p_1, m) qualquer é dada por $x_1(p_1, p_2, m)$. Se representarmos a inclinação da curva de indiferença indireta como função da função de utilidade indireta ou como função da função de dispêndio, obteremos duas relações interessantes entre essas funções e as função de demanda pelo bem 1. Essas relações são conhecidas como *identidade de Roy* e *lema de Shephard*. Abaixo, descrevemos essas duas relações.

Identidade de Roy

Como vimos, uma curva de indiferença indireta pode ser pensada como uma curva ao longo da qual a função de utilidade indireta é mantida constante, do mesmo modo que uma curva de indiferença pode ser pensada como uma curva ao longo da qual a função de utilidade é mantida constante. A inclinação de uma curva de indiferença em um ponto qualquer é dada, sabemos, pelo negativo da razão entre as utilidades marginais do bem 1 e do bem 2. E a inclinação de uma curva de indiferença indireta? De modo similar ela é dada pelo negativo da razão entre a utilidade marginal do preço do bem 1, entendida como a taxa de impacto de uma pequena variação do preço desse bem sobre o valor da função de utilidade indireta ($\partial V/\partial p$), e a utilidade marginal da renda, entendida como a taxa de impacto de uma pequena variação na renda sobre o valor da função de utilidade indireta ($\partial V/\partial m$).

Para ver isso, lembre-se que uma curva de indiferença indireta pode ser entendida como o conjunto de pontos (p_1, m) que satisfaça a condição $V(p_1, 1, m) = u$. Isso define m como função implícita de p. Podemos então aplicar o teorema da função implícita para obter:

$$\frac{\partial V(p_1,1,m)}{\partial p_1} + \frac{\partial V(p_1,1,m)}{\partial m}\frac{dm}{dp_1} = 0 \Rightarrow \frac{dm}{dp_1} = -\frac{\frac{\partial V(p_1,1,m)}{\partial p_1}}{\frac{\partial V(p_1,1,m)}{\partial m}}$$

Esse resultado é conhecido como *identidade de Roy* e pode ser facilmente estendido para o caso em que $p_2 \neq 1$. De um modo geral, a identidade de Roy estabelece que

$$x_i(p_1, p_2, m) = -\frac{\frac{\partial V(p_1,p_2,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(p_1,p_2,m)}{\partial m}},\ i = 1,2 \tag{11}$$

O lema de Shephard

Uma curva de indiferença indireta associada ao nível de utilidade u também pode ser pensada como o conjunto dos pares (p_1, m) para os quais $m = e(p_1, 1, u)$. Se derivarmos essa expressão dos dois lados e assumirmos que m é reajustada de modo a manter o nível de utilidade constante, deduzimos que a inclinação de uma curva de indiferença indireta, isto é a razão dm/dp_1 calculada ao londo dessa curva é dada por

$$\frac{dm}{dp_1} = \frac{\partial e(p_1,1,m)}{\partial p_1}.$$

Já sabemos que essa inclinação também é igual a $x_1(p_1, 1, m)$. Então, tomando $m = e(p_1, 1, u)$ e lembrando que a função de demanda compensada é definida por $h_1(p_1, p_2, u) = x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$, podemos concluir que

$$\frac{\partial e(p_1,1,u)}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, u)$$

Esse resultado pode ser facilmente estendido para o caso em que p_2 assume qualquer valor, não necessariamente igual a 1, obtendo-se

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, u) \tag{12}$$

Esse resultado é conhecido como *lema de Shephard*.

Exemplo: preferências Cobb-Douglas, a identidade de Roy e o lema de Shephard.

Considere novamente, o caso em que as preferências de um consumidor são representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2) = x_1^a\, x_2^{1-a}$. Já havíamos chegado à (5) que descreve a função de utilidade indireta associada a essa função de utilidade:

$$V(p_1, p_2, m) = a^a (1-a)^{1-a} \frac{m}{p_1^a\, p_2^{1-a}}.$$

As derivadas parciais dessa função em relação a p_1 e a m são, respectivamente,

$$\frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} = -a^{a+1}(1-a)^{1-a} \frac{m}{p_1^{a+1}\, p_2^{1-a}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{a^a(1-a)^{1-a}}{p_1^a\, p_2^{1-a}}.$$

A função de demanda pelo bem 1 pode ser aplicada, empregando-se a identidade de Roy:

$$x_1(p_1, p_2, m) = -\frac{\frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial p_1}}{\frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m}} = -\frac{-a^{a+1}(1-a)^{1-a} \frac{m}{p_1^{a+1} p_2^{1-a}}}{\frac{a^a(1-a)^{1-a}}{p_1^a p_2^{1-a}}} = a \frac{m}{p_1}$$

Você pode verificar que essa é exatamente a função de demanda (3) que encontramos ao resolver diretamente o problema de maximização de utilidade.

Ainda considerando que a função de utilidade do consumidor seja $U(x_1, x_2) = x_1^a\, x_2^{1-a}$, já vimos que a função de dispêndio associada a essa função de utilidade, dada por (7), é

$$e(p_1, p_2, u) = u \frac{p_1^a\, p_2^{1-a}}{a^a (1-a)^{1-a}}$$

de tal sorte que

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = a\, u \frac{p_1^{a-1}\, p_2^{1-a}}{a^a(1-a)1-a} = u \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a},$$

que é exatamente igual à função de demanda compensada pelo bem 1, descrita pela expressão (9), conforme prevê o lema de Shephard.

3.4 Variação compensatória e variação equivalente: novas definições.

Estamos agora em condições de reformular as definições 2.1 e 2.2 de variação compensatória e de variação equivalente, de modo mais preciso. Fazemos isso usando as função de utilidade indireta ou, alternativamente, a função de dispêndio:

Definição 3.1. Suponha que um consumidor experimente uma mudança nos preços e em sua renda de (p_1^0, p_2^0, m^0) para (p_1^1, p_2^1, m^1). Sejam $V(p_1, p_2, m)$ sua função de utilidade indireta e $e(p_1, p_2, u)$ sua função de dispêndio. Então a *variação compensatória* associada a essa mudança de preços e renda é o valor VC que resolve a seguinte igualdade:

$$V(p_1^1, p_2^1, m^1 - VC) = V(p_1^0, p_2^0, m^0). \tag{13}$$

A variação compensatória também pode ser definida de modo equivalente por

$$VC = m^1 - e(p_1^1, p_2^1, v(p_1^0, p_2^0, m^0)) \tag{14}$$

Definição 3.2. Suponha que um consumidor experimente uma mudança nos preços e em sua renda de (p_1^0, p_2^0, m^0) para (p_1^1, p_2^1, m^1). Sejam $V(p_1, p_2, m)$ sua função de utilidade indireta e $e(p_1, p_2, u)$ sua função de dispêndio. A *variação equivalente* equivalente associada a essa mudança em preços e renda, VE, é tal que

$$V(p_1^0, p_2^0, m^0 + VE) = V(p_1^1, p_2^1, m^1). \tag{15}$$

Uma forma equivalente de definir o mesmo conceito é

$$VE = e(p_1^0, p_2^0, V(p_1^1, p_2^1, m^1)) - m^0. \tag{16}$$

Essas duas definições são equivalentes às definições 2.1 e 2.2, mas têm a vantagem de mostrar o mecanismo de cálculo para a obtenção da variação compensatória e da variação equivalente.

Exemplo: calculando a VC e a VE.

Imagine um consumidor cujas preferências sejam representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Nas condições iniciais, os preços dos dois bens e sua renda são $p_1^0 = 9$, $p_2^0 = 9$ e $m^0 = 90$. Nas condições iniciais eles passam a $p_1^1 = 4$, $p_2^1 = 9$ e $m^1 - 90$. Vamos calcular as variações compensatória e equivalente associadas a essa mudança. Para tal, observe que a função de utilidade de nosso consumidor é uma função do tipo Cobb-Douglas com os coeficientes somando a unidade. Desse modo, podemos fazer $a = 1/2$ e usar a expressão (5) para encontrar a função de utilidade indireta e a expressão (7) para encontrar a função de dispêndio:

$$V(p_1, p_2, m) = a^a (1-a)^{1-a} \frac{m}{p_1^a \, p_2^{1-a}} = \frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

$$e(p_1,p_2,u)=u\frac{p_1^a p_2^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}}=2u\sqrt{p_1 p_2}$$

A variação compensatória pode ser encontrada empregando-se (13):

$$V(p_1^1,p_2^1,m^1-VC)=V(p_1^0,p_2^0,m^0)\Rightarrow\frac{90-VC}{2\sqrt{4\cdot 9}}=\frac{90}{2\sqrt{9\cdot 9}}\Rightarrow VC=30$$

Alternativamente, podemos encontrar a variação compensatória usando (14):

$$VC=m^1-e(p_1^1,p_2^1,V(p_1^0,p_2^0,m^0))\Rightarrow VC=90-2\frac{90}{2\sqrt{9\cdot 9}}\sqrt{4\cdot 9}=30$$

Já a variação equivalente, pode ser encontrada empregando-se (15):

$$V(p_1^0,p_2^0,m^0+VE)=V(p_1^1,p_2^1,m^1)\Rightarrow\frac{90+VE}{2\sqrt{9\cdot 9}}=\frac{90}{2\sqrt{4\cdot 9}}\Rightarrow VE=45,$$

ou, alternativamente, (16):

$$VE=e(p_1^0,p_2^0,V(p_1^1,p_2^1,m^1))-m^0=2\frac{90}{2\sqrt{4\cdot 9}}\sqrt{9\cdot 9}-90=45.$$

3.5 Curvas de demanda compensada, variação compensatória e variação equivalente

Consideremos novamente o caso em que apenas o preço de um bem varia. Imagine que ocorra uma alteração no preço do bem 1, mas que tanto o preço do bem 2 quanto a renda do consumidor permaneçam inalterados em, respectivamente, $\bar{m}$ e $\bar{p}_2$. Na notação que vimos usando até aqui, isso significa que $p_1^0\neq p_1^1$, $p_2^0=p_2^1=\bar{p}_2$ e $m^0=m^1=\bar{m}$. Sejam u^0 e u^1 as utilidades do consumidor na situação inicial (com $p_1=p_1^0$) e final ($p_1=p_1^1$), respectivamente, isto é,

$$u^0=V(p_1^0,\bar{p}_2,\bar{m})\text{ e }u^1=V(p_1^1,\bar{p}_2,\bar{m}).\tag{17}$$

Desde que assumamos que as preferências de nosso consumidor sejam monotônicas, a função de utilidade indireta será estritamente crescente em relação à renda, o que significa que, se mantivermos constantes p_1 e p_2, o valor dessa função para um determinado nível de renda é diferente desse valor para qualquer outro nível de renda. Além disso, usando a definição da função de dispêndio, sabemos que

$$V(p_1^0,\bar{p}_2,e(p_1^0,\bar{p}_2,u^0))=u^0\text{ e }V(p_1^1,\bar{p}_2,e(p_1^1,\bar{p}_2,u^1))=u^1.$$

Comparando esse resultado com (17), concluímos que

$$e(p_1^0,\bar{p}_2,u^0)=e(p_1^1,\bar{p}_2,u^1)=\bar{m}.\tag{18}$$

Vamos usar essa igualdade nas definições (14) e (16) variação compensatória e variação equivalente, quando aplicadas ao presente caso, para obter

$$VC=m^1-e(p_1^1,\bar{p}_2,u^0)=e(p_1^0,\bar{p}_2,u^0)-e(p_1^1,\bar{p}_2,u^0)$$

e

$$VE = e(p_1^0, \bar{p}_2, u^1) - m^0 = e(p_1^0, \bar{p}_2, u^1) - e(p_1^1, \bar{p}_2, u^1).$$

Assim, no caso em que há apenas uma variação no preço de um bem, tanto a variação compensatória quanto a variação equivalente podem ser calculadas como uma diferença entre os valores assumidos pela função dispêndio quando tanto o preço do outro bem quanto a utilidade do consumidor são mantidos constantes. Combinando esse resultado com o lema de Shephard, chegamos a

$$VC = e(p_1, \bar{p}_2, u^0)\Big]_{p_1^1}^{p_1^0} = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_2, u^0)\, dp_1 \tag{19}$$

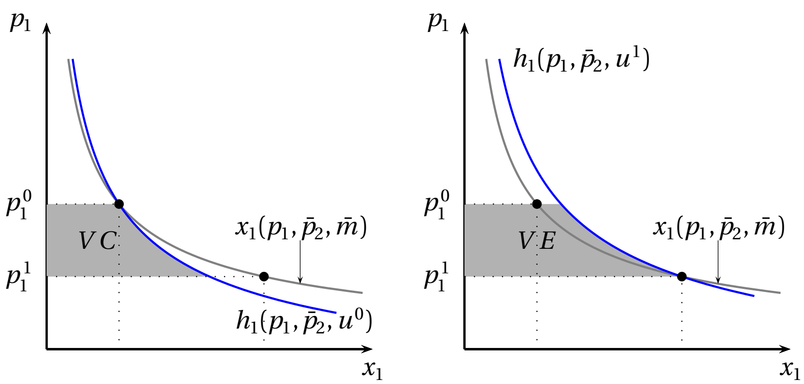
e

$$VE = e(p_1, \bar{p}_2, u^1)\Big]_{p_1^1}^{p_1^0} = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_2, u^1)\, dp_1. \tag{20}$$

Como ocorrem com as integrais definidas, as integrais definidas de (19) e (20) podem ser interpretadas como áreas definidas pelos gráficos das funções $h_1(p_1, \bar{p}_2, u^0)$ e $h_1(p_1, \bar{p}_2, u^1)$, respectivamente, pelas linhas de preço $p_1 = p_1^0$ e $p_1 = p_1^1$ e pelo eixo do preço do bem 1. Em outras palavras, tanto a variação compensatória quanto a variação equivalente associadas a uma mudança no preço de um bem são dadas pela variação na área acima da linha de preço e abaixo da curva de demanda compensada provocada por essa mudança no preço. A diferença entre essas duas áreas é que, para o cálculo da variação compensatória, a curva de demanda compensada considerada é curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade inicial u^0 e, para o cálculo da variação equivalente, considera-se a curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade final u^1.

Isso é ilustrado na Figura 19 para o caso em que há uma redução no preço do bem 1 de p_1^0 para p_1^1. Na Figura 19(a), aparece em cor azul a curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade inicial u^0. Note que essa curva de demanda compensada cruza a curva de demanda marshalliana na altura do preço inicial p_1^0. A variação compensatória é a área em cinza à esquerda dessa curva de demanda compensada limitada pelas linhas de preço inicial e final. Na Figura 19(b) vemos, cruzando a curva de demanda marshalliana na altura do preço p_1^1, a curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade final u^1. A área cinza à esquerda dessa curva e entre as linhas de preço inicial e final é a variação equivalente.

No caso ilustrado na Figura 19 o bem 1 é um bem normal. Podemos concluir isso observando que as curvas de demanda compensada nas figuras 19(a) e 19(b) cruzam a curva de demanda marshalliana de cima para baixo. Isso também faz com que a curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade final u^1 (mais elevado) fique acima e à direita da curva de demanda associada ao nível de utilidade inicial u^0 (mais baixo). Como consequência, conforme deveríamos esperar, nesse caso (de uma variação apenas no preço de um bem normal), a medida da variação equivalente na forma de área à esquerda da curva de demanda compensada, é superior à medida da variação compensatória.



(a) Variação compensatória

(b) Variação equivalente

Figura 19: Variações compensatórias e equivalentes como áreas

3.6 Excedente do consumidor

A possibilidade de obter as medidas de variação compensatória e de variação equivalente como variações da área abaixo da curva de demanda compensada e acima da linha de preço, parece, à primeira vista promissora: ela sugere que não precisamos conhecer as preferências do consumidor para mensurar variações em seu nível de bem-estar. Precisamos apenas conhecer suas curvas de demanda compensada.

O único problema é que usualmente não somos capazes de observar diretamente a demanda compensada do consumidor, mas apenas sua demanda marshalliana, isto é, podemos estimar como a demanda por um bem responde a variações nos preços e na renda do consumidor. Embora teoricamente seja possível, empregando a equação de Slutsky, deduzir o formato das funções de demanda compensada a partir das funções de demanda marshallianas, isso pode implicar procedimentos computacionais complicados. Além disso, limitações frequentes de dados, podem fazer com que as demandas marshallianas estimadas sejam incompletas no número de variáveis consideradas, ou mesmo, como ocorre com grande frequência, estimadas apenas para um agregado de consumidores. Isso dificulta enormemente, quando não impossibilita, a tarefa de deduzir as funções de demanda compensada a partir de funções estimadas de demanda marshalliana.

Tendo isso em vista, cabe colocar a questão: e se, ao invés de mensurarmos a variação no bem-estar de um consumidor através da variação da área acima da linha de preço e abaixo da curva de demanda compensada, mensurássemos essa variação de bem-estar através da variação na área acima da linha de preços e abaixo da curva de demanda *marshalliana*? Qual o significado dessa medida? Como essa medida se relaciona aos conceitos estudados de variação compensatória e variação equivalente?

Chamamos, usualmente, a área abaixo da curva de demanda marshalliana e

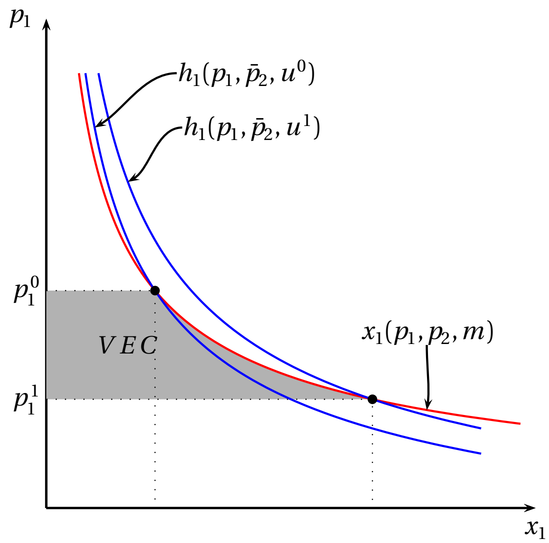


Figura 20: Variação no excedente marshalliano do consumidor

acima da linha de preço, de *excedente do consumidor* (EC) ou, por vezes, *excedente do consumidor líquido*.[5] Infelizmente, a variação no excedente do consumidor (*VEC*) provocada por uma variação no preço de um bem não possui, no caso geral, uma interpretação precisa como as que demos para os conceitos de variação compensatória e variação equivalente. Todavia, podemos muitas vezes justificar o uso da variação no excedente do consumidor como uma boa aproximação desses conceitos.

Considere inicialmente, o caso de um bem cuja demanda não seja afetada por variações na renda. Isso ocorre, por exemplo, caso as preferências do consumidor sejam quase-lineares. Nesse caso, como compensações na renda não alteram a quantidade demandada, as curvas de demanda marshalliana e compensada coincidirão, para quaisquer níveis de renda e utilidade. Isso significa que a medida da variação no excedente do consumidor associada à mudança no preço de um bem será a representação exata tanto da variação compensatória quanto da variação equivalente associadas a essa mudança de preço. Isso sugere também que, desde que a demanda pelo bem em questão seja pouco elástica em relação à renda, a variação no excedente do consumidor será uma boa aproximação das medidas de variação compensatória e equivalente. O mesmo deve ocorrer quando uma variação no preço de nosso bem implicar uma necessidade de variação muito pequena na renda do consumidor para compensar o impacto sobre seu bem-estar.

[5]O *excedente do consumidor bruto* é dado pela área abaixo da curva de demanda marshalliana e acima do eixo das quantidades. O termo *excedente do consumidor líquido* é empregado para ressaltar que se trata do excedente bruto *menos* o valor pago pelo consumidor pela aquisição do bem.

Além disso, desde que possamos identificar se o bem analisado é um bem normal ou inferior, também podemos dizer em que direção estamos errando quando empregamos a variação no excedente do consumidor como uma medida aproximada da variação compensatória ou da variação equivalente. Para ver isso, considere por exemplo, o caso ilustrado na Figura 20. A curva em vermelho é a curva de demanda marshalliana de um consumidor por determinado bem. As curvas em azul são as curvas de demanda compensadas associadas ao nível de utilidade u^0 que esse consumidor obtém ao preço p_1^0 e ao nível de utilidade u^1 que ele obtém quando o preço cai para p_1^1. Trata-se de um bem normal e, portanto, as curvas de demanda compensadas cruzam a curva de demanda marshalliana de cima para baixo. A área marcada em cinza é a variação no excedente do consumidor. Ela é maior do que a área delimitada pelo curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade inicial u^0. Esta, por sua vez é, conforme vimos a variação compensatória *VC* associada a essa mudança de preço. Por outro lado, a variação no excedente do consumidor é menor do que a área que seria delimitada pela curva de demanda compensada associada ao nível de utilidade final u^1. Esta área é, por sua vez, igual à variação equivalente.

Esses resultados ocorrem porque as curvas de demanda compensadas cruzam a curva de demanda marshalliana de cima para baixo, o que ocorre no caso em que o bem 1 é um bem normal. Você pode verificar com facilidade que, caso o bem 1 seja um bem inferior, de tal sorte que as curvas de demanda compensada cruzem a curva de demanda marshalliana de baixo para cima, as desigualdades acima serão invertidas.

Podemos, portanto, resumir nossas conclusões com relação à comparação entre as medidas de variação compensatória, variação equivalente e variação no excedente do consumidor, associadas à mudança no preço de um bem, da seguinte maneira:

- Caso a demanda do bem em questão não seja afetada por alterações na renda do consumidor, como ocorre no caso de preferências quase-lineares, teremos
$$VC = VEC = VE.$$
- Caso se trate de um bem normal, isto é, caso a demanda desse bem seja crescente em relação à renda do consumidor, então deverão valer as desigualdades
$$VC < VEC < VE.$$
- Caso, o bem seja um bem inferior, ou seja, caso sua demanda seja decrescente em relação à renda do consumidor, então teremos
$$VC > VEC > VE.$$

Nos dois últimos casos, a variação no excedente do consumidor não pode ser considerada uma medida precisa nem da variação compensatória nem da variação equivalente. Ainda assim, ela indica um limite inferior para uma dessas variações e um limite superior para a outra. Nesse sentido, ela, pode ser justificada como um “compromisso intermediário” entre as medidas de variação compensatória e de variação equivalente.

Exemplo: comparação numérica entre a *VC*, a *VE* e a *VEC*.

Considere um consumidor cujas preferências sejam representadas pela função de utilidade $U(x_1, x_2) = x_1^{1/10} x_2^{9/10}$. A renda desse consumidor e o preço do bem 2 são mantidos constantes em, respectivamente, $m = 1.000$ e $p_2 = 1$, mas o preço do bem 1 sofre uma variação de $p_1^0 = 10$ para $p_1^1 = 8$. Vamos calcular a variação compensatória, a variação equivalente e a variação no excedente do consumidor associadas a essa variação no preço do bem 1.

Usando (3) e fazendo $a = 1/10$ e $b = 9/10$, encontramos a expressão da curva de demanda marshalliana do bem 1:

$$x_1(p_1, 1, 100] = \frac{1}{10}\frac{1000}{p_1} = \frac{100}{p}$$

A variação no excedente do consumidor é encontrada integrando-se essa função entre $p_1 = p_1^0 = 8$ e $p_1 = p_1^0 = 10$:

$$VEC = \int_8^{10} \frac{100}{p}\,dp = 100(\ln 10 - \ln 8) \approx 22,31$$

Para calcularmos a variação equivalente e a variação compensatória, primeiramente empregamos (5) para determinar os níveis de utilidade inicial u^0 e final u^1:

$$u^0 = a^a(1-a)^{1-a}\frac{m}{p_1^{0\,a}\,p_2^a} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{9}{10}}\frac{1000}{10^{1/10}1^{1/9}} \approx 573,88$$

$$u^1 = a^a(1-a)^{1-a}\frac{m}{p_1^{1\,a}\,p_2^a} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{9}{10}}\frac{1000}{8^{1/10}1^{1/9}} \approx 586,83$$

Empregando agora (7) e a definição de variação compensatória e variação equivalente obtemos:

$$VC = m - e(p_1^1, p_2, u^0) = 1000 - 573,88\frac{8^{9/10}1^{1/10}}{(9/10)^{9/10}(1/10)^{1/10}} \approx 22,07$$

$$VE = e(p_1^0, p_2, u^1) - m = 586,83\frac{10^{1/9}1^{1/10}}{(9/10)^{9/10}(1/10)^{1/10}} - 100 \approx 22,57.$$

Nesse exemplo, a variação no excedente do consumidor difere pouco – aproximadamente 1% – tanto da variação compensatória quanto da variação equivalente.

Exercícios

1. O governo de determinado país pratica uma política de subsídio ao consumo de trigo que faz com que o preço ao consumidor desse produto seja 10% inferior ao preço que seria praticado sem essa política de subsídio. Esse governo está pensando em modificar sua política de subsídio. Para mensurar o impacto de bem estar decorrente das variações do preço do produto, ele contratou uma pesquisa que fez quatro tipos de perguntas a diversos consumidores. Determine, para cada uma dessas perguntas listadas abaixo, que medida de variação de bem estar – variação compensatória ou variação equivalente – corresponde à resposta esperada:

    a) Quanto você estaria disposto a pagar, na forma de imposto adicional sobre a renda, para que ocorra uma elevação no subsídio ao consumo do trigo que levasse a uma redução adicional de 5% no preço desse produto?

    b) a.Que redução no valor do imposto sobre a renda que você paga que você consideraria tão boa quanto uma redução de 5% no preço do trigo?

    c) Qual seria a redução no valor do imposto sobre a renda que você paga que faria com que você aceitasse uma redução nos subsídios ao trigo que implicasse em um aumento de 5% em seu preço?

    d) Qual o aumento no imposto de renda que você estaria disposto a aceitar para evitar que haja uma elevação de 5% no preço do trigo?

2. Encontre as funções de utilidade indireta, dispêndio e demanda compensada para as seguintes funções de utilidade:

    a) $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ b) $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$
    c) $U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ d) $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
    e) $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ f) $U(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$

3. Um consumidor possui uma renda igual a R$ 1.200,00. Ele consome apenas dois bens – o bem 1 e o bem 2. O preço do bem 2 é constante e igual a R$ 4,00 por unidade. Calcule a variação equivalente e a variação compensatória associadas a uma elevação no preço do bem 1 de R$ 1,00 por unidade para R$ 4,00 por unidade supondo que a função de utilidade desse consumidor seja:

    a) $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ b) $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$
    c) $U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ d) $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
    e) $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ f) $U(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$

4. Para o mesmo consumidor do exercício anterior, com função de utilidade igual à do item a), calcule a variação no excedente do consumidor associada a uma elevação no preço do bem 1 de R$ 1,00 para R$ 4,00 por unidade. Em que percentual sua resposta difere da variação compensatória e da variação equivalente encontradas no item a) do exercício anterior? Você deve ter encontrado um percentual superior ao que encontramos no exemplo que se inicia na página 36. Como você explica essa diferença?

Respostas

1. a) Variação compensatória, b) Variação equivalente; c) Variação compensatória; d) Variação equivalente.

2. a)

$$V(p_1,p_2,m) = \frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}} \qquad e(p_1,p_2,u) = 2u\sqrt{p_1 p_2}$$
$$h_1(p_1,p_2,u) = 2u\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \qquad h_2(p_1,p_2,u) = 2u\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$$

b)

$$V(p_1,p_2,m) = \begin{cases} \frac{m}{p_2} - \ln p_1 + \ln p_2 - 1 & \text{caso } p_2 \leq m \\ \ln m - \ln p_1 & \text{caso } p_2 > m \end{cases}$$

$$e(p_1,p_2,u) = \begin{cases} p_2(u - \ln p_2 + \ln p_1) & \text{caso } \ln p_2 \leq u + \ln p_1 \\ e^{u+\ln p_1} & \text{caso} \ln p_2 < u + \ln p_1 \end{cases}$$

$$h_1(p_1,p_2,u) = \begin{cases} \frac{p_2}{p_1} & \text{caso } \ln p_2 \leq u + \ln p_1 \\ \frac{e^{u+\ln p_1}}{p_1} & \text{caso } \ln p_2 > u + \ln p_1 \end{cases}$$

$$h_2(p_1,p_2,u) = \begin{cases} u - \ln p_2 + \ln p_1 & \text{caso } \ln p_2 \leq u + \ln p_1 \\ 0 & \text{caso } \ln p_2 > u + \ln p_1 \end{cases}$$

c)

$$V(p_1,p_2,m) = \frac{m}{p_1+p_2} \qquad e(p_1,p_2,u) = u(p_1+p_2)$$
$$h_1(p_1,p_2,u) = u \qquad h_2(p_1,p_2,u) = u$$

d)

$$V(p_1,p_2,m) = \frac{m}{\min\{p_1,p_2\}} \qquad e(p_1,p_2,u) = u\min\{p_1,p_2\}$$

$$(h_1(p_1,p_2,u), h_2(p_1,p_2,u)) = \begin{cases} (u,0) & \text{caso } p_1 < p_2 \\ (x_1,x_2) : x_1 + x_2 = u & \text{caso } p_1 = p_2 \\ (0,u) & \text{caso } p_1 > p_2 \end{cases}$$

e)

$$V(p_1,p_2,m)=\sqrt{m\frac{p_1+p_2}{p_1\,p_2}} \qquad e(p_1,p_2,u)=u^2\,\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}$$
$$h_1(p_1,p_2,u)=\left(\frac{u\,p_2}{p_1+p_2}\right)^2 \qquad h_2(p_1,p_2,u)=\left(\frac{u\,p_1}{p_1+p_2}\right)^2$$

f)

$$V(p_1,p_2,m)=\frac{m}{(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2} \qquad e(p_1,p_2,u)=u(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2$$
$$h_1(p_1,p_2,u)=u\left(1+2\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\right) \qquad h_2(p_1,p_2,u)=u\left(1+2\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right)$$

3. a) $VE=-600$ e $VC=-1200$.
   b) $VE=-VC=-4\ln 4$
   c) $VE=-450$ e $VC=-720$.
   d) $VE=-900$ e $VC=-3600$.
   e) $VE=-720$ e $VC=-1800$.
   f) $VE=-300$ e $VC=-400$.

4. a) $VEC=-600\ln 4\approx -831.78$;

$$\frac{VEC-VC}{VC}=\frac{600(-\ln 4+2)}{-1200}\approx -0,31;$$
$$\frac{VEC-VE}{VE}=\frac{600(-\ln 4+1)}{600}\approx 0,39.$$

   b) $VEC=-4\ln 4$;

$$\frac{VEC-VC}{VC}=\frac{VEC-VE}{VE}=0.$$

   c) $VEC=1200\ln\frac{8}{5}\approx -564.00$:

$$\frac{VEC-VC}{VC}=\frac{-1200\ln\frac{8}{5}+720}{-720}\approx -0,22;$$
$$\frac{VEC-VE}{VE}=\frac{-1200\ln\frac{8}{5}+450}{-450}\approx 0,25.$$

   d) $VEC=-1200\ln 4\approx -1663.55$;

$$\frac{VEC-VC}{VC}=\frac{-1200\ln 4+3600}{-3600}\approx -0,54;$$
$$\frac{VEC-VE}{VE}=\frac{-1200\ln 4+900}{-900}\approx 0,85.$$

e) $VEC = -1200 \ln \frac{2}{5} \approx -1099.55$;

$$\frac{VEC - VC}{VC} = \frac{-1200 \ln \frac{2}{5} + 1800}{-1800} \approx -0,39;$$

$$\frac{VEC - VE}{VE} = \frac{-1200 \ln \frac{2}{5} + 720}{-720} \approx 0,53.$$

f) $VEC = 2400 \ln \frac{3}{4} \approx -690.44$

$$\frac{VEC - VC}{VC} = \frac{2400 \ln \frac{3}{4} + \frac{2800}{3}}{-\frac{2800}{3}} \approx -0,26.$$

$$\frac{VEC - VE}{VE} = \frac{2400 \ln \frac{3}{4} + 525}{-525} \approx 0,32$$