Preferências Cobb-Douglas

Roberto Guena de Oliveira

24 de maio de 2023

1 Função de utilidade Cobb-Douglas

Se as preferências de um agente puderem ser representadas por uma função de utilidade com a forma

$$U(c_0, c_1, \ldots, c_T) = c_0^{a_0} \times c_1^{a_1} \times \cdots \times c_T^{a_T}. \tag{1}$$

na qual, $a_0, a_1, \ldots, a_T$ são constantes reais positivas, dizemos que esse agente tem *preferências Cobb-Douglas* e chamamos a função de utilidade com o formato acima de *função de utilidade Cobb-Douglas*. Caso $a_0 + a_2 + \cdots + a_T = 1$, dizemos que trata-se de uma função de utilidade Cobb-Douglas *normalizada*. Para simplificar a notação, utilizaremos $\mathbf{c}$ para representar o vetor $(c_0, c_1, \ldots, c_T)$, e subsituiremos $U(c_0, c_1, \ldots, c_T)$ por $U(\mathbf{c})$.

Como qualquer transformação monotônica de uma função de utilidade não altera sua capacidade de representar as preferências de um agente, podemos elevar a função (1) ao inverso de $a_0 + a_2 + \cdots + a_T$ obtendo uma nova função Cobb-Douglas na qual a soma dos expoentes é igual a 1:

$$V(c_0, c_1, \ldots, c_T) = c_0^{\alpha_0} \times c_1^{\alpha_1} \times \cdots \times c_T^{\alpha_T}, \tag{2}$$

na qual que para todo $t = 0, 1, \ldots, T$,

$$\alpha_t = \frac{a_t}{\sum_{q=0}^{T} a_t}.$$

A função de utilidade (2) de *função de utilidade Cobb-Douglas normalizada.* Note que essa função nada mais é do que a média geométrica dos consumos em cada data.

Uma outra forma usual de representar as mesmas preferências, assumindo-se consumo positivo em todas as datas, consiste em aplicar às funções (1) e (2) a transformação logarítmica obtendo-se as funções de utilidade

$$\Omega(c_0, c_1, \ldots, c_T) = a_0 \ln c_0 + a_1 \ln c_1 + \cdots + \ln c_T \tag{3}$$

e

$$\Upsilon(c_0, c_1, \ldots, c_T) = \alpha_0 \ln c_0 + \alpha_1 \ln c_1 + \cdots + \alpha_T \ln c_T. \tag{4}$$

Frequentemente, a função de utilidade Cobb-Douglas é apresentada com apenas dois argumentos, o que, no caso de nosso modelo de escolha intertemporal implica apenas duas datas:

$$U(c_0, c_1) = c_0^{a_0}\, c_1^{a_1}. \tag{5}$$

A função de utilidade (1) é muitas vezes chamada de *função de utilídade Cobb-Douglas generalizada* seja porque contempla um número qualquer de argumentos, ao invéz da função de utilidade (5), seja porque, ao invéz do que acontece com a função (2), não impõem que a soma dos expoentes seja igual a 1.

2 Taxa marginal de substituição e curvas de indiferença

Derivando a função (1) em relação a c_t, encontramos a utilidade marginal do consumo em t:

$$UMg_t = \frac{\partial}{\partial c_t} U(\mathbf{c}) = a_t c_0^{a_0}\, c_0^{a_0}\, \ldots\, c_{t-1}^{a_{t-1}}\, c_t^{a_t - 1}\, c_{t+1}^{a_{t+1}}\, \ldots\, c_T^{a_T} = \frac{a_t}{c_t} U(\mathbf{c}). \tag{6}$$

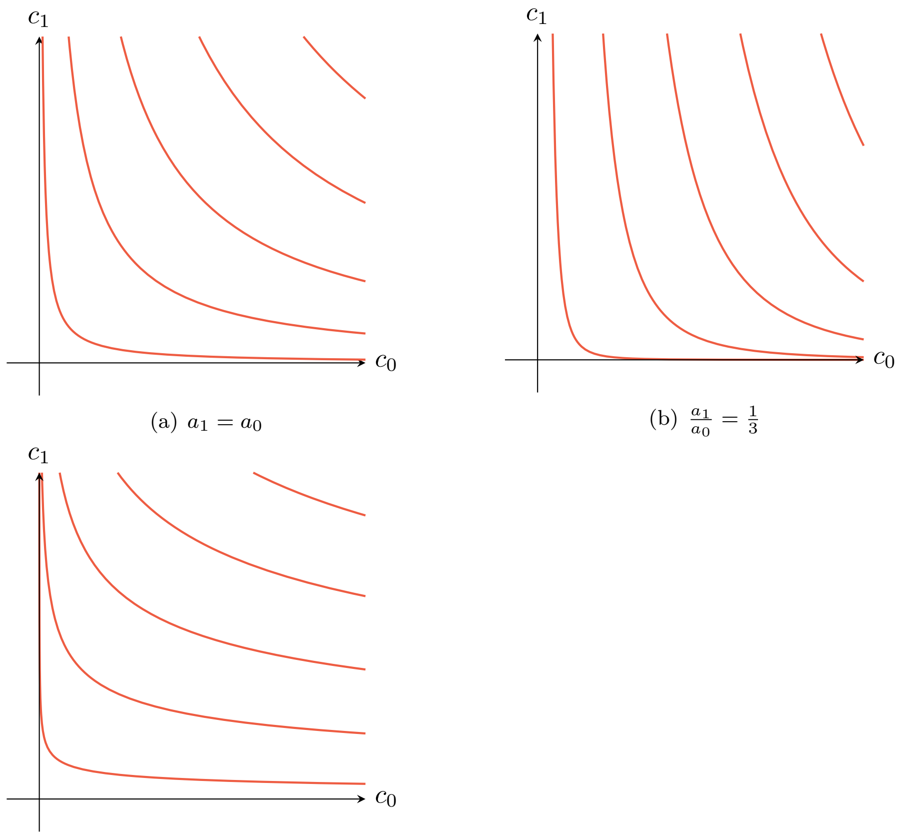
Usando essa expressão, determinamos a taxa marginal de substituição entre os consumos em duas datas distintas, τ e t, expressa em unidades de consumo na data τ por unidade de consumo na data t:

$$TMS_{t,\tau} = \frac{UMg_t}{UMg_\tau} = \frac{\frac{a_t}{c_t} U(\mathbf{c})}{\frac{a_\tau}{c_\tau} U(\mathbf{c})} = \frac{a_t}{a_\tau} \frac{c_\tau}{c_t}. \tag{7}$$

A equação (7) mostra que a taxa marginal de substituição depende exclusivamente dos consumos relativos e não dos consumos absolutos.

A Figura 1 mostra mapas de curva de indiferença para a função de utilidade Cobb-Douglas no caso em que $T = 1$, ou seja, no caso da função (5), para diferentes razões entre os coeficientes a_0 e a_1. Tais curvas de indiferença apresentam duas propriedades importantes: elas são convexas em relação à origem e as curvas de indiferença associadas a níveis de utilidade positivo não têm ponto em comum com os eixos, mas sim, aproximam-se assintoticamente deles. A convexidade das curvas de indiferença garante que, em um problema de maximização de utilidade, o ponto que atende as condições de ótimo de primeira ordem será um ponto de máximo. O fato de que as curvas de indiferença não cruzam os eixos garante que a solução desse problema será uma solução interior.

Tais conclusões se estendem para a função de utilidade Cobb-Douglas generalizada, com mais do que duas datas. Também nesse caso, não há solução de canto e o ponto que satisfaz as condições de máximo de primeira ordem dada uma restrição orçamentária linear é um ponto de máximo.



(a) $a_1 = a_0$

(b) $\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{3}$

(c) $\frac{a_1}{a_0} = 3$

Figura 1: Curvas de indiferença para a função de utilidade Cobb-Douglas considerando diferentes valores para a razão $\frac{a_0}{a_1}$.

3 Maximização de utilidade e funções de demanda

3.1 O caso em que $T = 1$

Consideremos inicialmente o caso no qual há apenas duas datas e no qual a função de utilidade do agente é a função (5), isto é, $U(c_0, c_1) = c_0^{a_0}\, c_1^{a_1}$. Esse agente deseja maximizar essa função dada a restrição orçamentária

$$p_0\, c_0 + p_1\, c_1 \leq p_0\, w_0 + p_1\, w_1. \tag{8}$$

Como as curvas de indiferença não cruzam os eixos, podemos ter certeza que a solução desse problema implicará consumo positivo nas duas datas. Assim, podemos ignorar as condições de consumo não negativo. Adicionalmente, como a função de utilidade é monotônica, podemos ter certeza de que a solução encontrar-se-á sobre a linha de restrição orçamentária, com a condição (8) sendo atendida com igualdade.

O Lagrangeano desse problema é

$$\mathcal{L} = c_0^{a_0}\, c_1^{a_1} - \lambda\,[p_0\, c_0 + p_1\, c_1 - (p_0\, w_0 + p_1\, w_1)] \tag{9}$$

A solução do problema deve atender às condições de máximo de 1º ordem abaixo

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_0} = 0 \Rightarrow a_0 c_0^{a_0-1}\, c_1^{a_1} - \lambda p_0 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow a_1 c_0^{a_0}\, c_1^{a_1-1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_0\, c_0 + p_1\, c_1 - (p_0\, w_0 + p_1\, w_1) = 0 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações, obtemos,

$$\lambda = \frac{a_0 c_0^{a_0-1}\, c_1^{a_1}}{p_0}$$

e

$$\lambda = \frac{a_1 c_0^{a_0}\, c_1^{a_1-1}}{p_1}.$$

Portanto,

$$\frac{a_0 c_0^{a_0-1}\, c_1^{a_1}}{p_0} = \frac{a_1 c_0^{a_0}\, c_1^{a_1-1}}{p_1} \Rightarrow c_1 = \frac{a_1}{a_0}\frac{p_0}{p_1}. \tag{10}$$

Substituindo esse resultado na terceira equação, obtemos

$$\begin{aligned} p_0\, c_0 + p_1\, \frac{a_1}{a_0}\frac{p_0}{p_1} &= p_0\, w_0 + p_1\, w_1 \\ p_0\, c_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\right) &= p_0\, w_0 + p_1\, w_1 \\ c_0 &= \frac{a_0}{a_0 + a_1}\frac{p_0\, w_0 + p_1\, w_1}{p_0}. \end{aligned} \tag{11}$$

O lado direito da (11) é a função de demanda pelo consumo na data zero. Para encontrar a função de demanda pela consumo na data 1, basta substituir (11) em (10), para obter

$$c_1 = \frac{a_1}{a_0 + a_1}\frac{p_0\, w_0 + p_1\, w_1}{p_1}. \tag{12}$$

As funções de demanda em (11) e (12) mostram que o agente deverá dispender a fração $\frac{a_0}{a_0+a_1}$ do valor de sua dotação inicial na aquisição do consumo na data 0 e a fração restante, $\frac{a_1}{a_0+a_1}$ na aquisição do consumo na data 1. Se definirmos a taxa de juros entre as duas datas i pela fórmula:

$$i = \frac{p_0}{p_1} - 1,$$

de tal sorte que $p_0 = (1+i)p_1$ as funções de demanda podem ser reescritas em função dessa taxa de juros como

$$c_0 = \frac{a_0}{a_0 + a_1} \left(w_0 + \frac{w_1}{1+i} \right) \tag{13}$$

e

$$c_1 = \frac{a_1}{a_0 + a_1} \left[(1+i)w_0 + w_1 \right]. \tag{14}$$

O que indica que o consumo na data 0 será igual à fraça $\frac{a_0}{a_0+a_1}$ do valor presente da dotação inicial e que o consumo na data 1 será igual à fração $\frac{a_1}{a_0+a_1}$ do valor futuro (na data 1) da dotação inicial.

3.2 O caso geral

O caso mais geral, em que T é qualquer número inteiro maior do que 1, é em tudo similar ao caso com apenas duas datas. Para mostrar isso, usaremos, para economizar espaço, a seguinte notação:

$\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_T)$ é o vetor de preços da economia,

$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_T)$ é o vetor de consumo de nosso agente;

$\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_T)$ é o vetor de dotação inicial de nosso;

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} = \sum_{t=0} T p_t \, c_t$ é o valor do plano de consumo do agente;

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = \sum_{t=0} T p_t \, w_t$ é o valor da dotação inicial do agente de consumo do agente;

O problema do agente é maximizar sua função de utilidade, dada por (1):

$$U(\mathbf{c}) = c_0^{a_0} \, c_1^{a_1} \ldots c_T^{a_T},$$

atendendo à restrição orçamentária

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}$$

e às restrições de consumo não negativo $\mathbf{c} \geq 0$.

Novamente, as propriedades da função de utilidade Cobb-Douglas garantem que a solução desse problema implica consumo positivo em todas as datas, de tal sorte que as restrições de consumo não negativo podem ser ignoradas, e que, nessa solução a restrição orçamentária é atendida com sinal de igualdade.

Para encontrar essa solução, montamos o lagrangeano

$$\mathcal{L} = U(\mathbf{c}) - \lambda \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \right)$$

As condições de primeira ordem serão atendidas quando

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U(\mathbf{c})}{\partial c_t} - \lambda p_t = 0 & \text{para todo } t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\} \text{ e} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = 0 \end{cases}$$

Usando (6), a primeira condição pode ser reescrita como

$$\frac{a_t}{c_t} U(\mathbf{c}) = \lambda p_t \quad \text{para todo} t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\} \tag{15}$$

Resolvendo essa equação para λ, assumindo $t = 0$, obtemos

$$\lambda = \frac{a_0}{c_0} \frac{U(\mathbf{c})}{p_0}.$$

Substituindo esse resultado em (15), obtemos

$$\frac{a_t}{c_t} U(\mathbf{c}) = \frac{a_0}{c_0} U(\mathbf{c}) \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow c_t = \frac{a_t}{a_0} \frac{p_0}{p_t} c_0. \tag{16}$$

Substituindo esse resultado na restrição orçamentária,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \\ p_0\, c_0 + p_1\, c_1 + \cdots + p_T\, c_T &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \\ p_0\, c_0 + p_1 \frac{a_1}{a_0} \frac{p_0}{p_1} + \cdots + p_T \frac{a_T}{a_0} \frac{p_0}{p_T} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \\ p_0\, c_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} + \cdots + \frac{a_T}{a_0} \right) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \\ p_0\, c_0 \left(\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_T}{a_0} \right) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \\ c_0 &= \frac{a_0}{\sum_{\tau=0}^{T}} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}}{p_0} \end{aligned} \tag{17}$$

Substituindo esse resultado de volta em (16), obtemos a função de demanda de consumo em qualquer data t:

$$c_t = \frac{a_t}{\sum_{\tau=0}^{T} a_\tau} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}}{p_t}. \tag{18}$$

A função de demanda acima mostra que o agente deve despender a fração $\frac{a_t}{\sum_{\tau=0}^{T} a_\tau}$ do valor de sua dotação inicial no consumo na data t. Note que trata-se de uma generalização das funções de demanda (11) e (12) derivadas para o caso em que $T = 1$.

Se definirmos, para cada data $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ $r_t = \left(\frac{p_t}{p_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$, então a função de demanda por consumo em qualquer data t pode ser reescrita como:

$$c_t = \frac{a_t}{\sum_{\tau=0}^{T} a_\tau} (1 + r_t)^t \left[w_0 + \frac{w_1}{1 + r_1} + \frac{w_2}{(1 + r_2)^2} + \cdots + \frac{w_T}{(1 + r_T)^T} \right] \tag{19}$$

A função acima mostra que o agente irá demandar, em cada data t, um consumo igual à fração $\frac{a_t}{\sum_{\tau=0}^{T}}$ do valor de sua dotação inicial atualizado para unidades de consumo dessa data. Esse resultado é uma generalização das funções de demanda derivadas para o caso em que $T = 1$ apresentadas em (13) e (14).

3.3 Exemplo

Considere o caso em que $T = 3$, a função de utilidade do agente seja

$$U(c_0, c_1, c_2) = c_0^3\, c_1^2\, c_2$$

e suas dotações iniciais sejam $w_0 = 5, w_1 = 8, w_2 = 8$. Para encontrarmos as funções de demanda em função dos preços relativos, aplicamos (18) para obtermos:

$$\begin{aligned}
c_0(p_0, p_1, p_2) &= \frac{5}{5+8+8}\,\frac{5p_0 + 8p_1 + 8p_2}{p_0} = \frac{5}{21}\,\frac{5p_0 + 8p_1 + 8p_2}{p_0} \\
c_1(p_0, p_1, p_2) &= \frac{8}{5+8+8}\,\frac{5p_0 + 8p_1 + 8p_2}{p_1} = \frac{8}{21}\,\frac{5p_0 + 8p_1 + 8p_2}{p_1}
\end{aligned}$$

e

$$c_2(p_0, p_1, p_2) = \frac{8}{5+8+8}\,\frac{5p_0 + 8p_1 + 8p_2}{p_2} = \frac{8}{21}\,\frac{5p_0 + 8p_1 + 8p_2}{p_2}.$$

Para determinarmos as funções de demanda em função das taxas de juros, usamos (19), obtendo

$$\begin{aligned}
c_0(r_1, r_2) &= \frac{5}{21}\left[5 + \frac{8}{(1+r_1)} + \frac{8}{(1+r_2)^2};\right] \\
c_1(r_1, r_2) &= \frac{5}{21}(1+r_1)\left[5 + \frac{8}{(1+r_1)} + \frac{8}{(1+r_2)^2}\right] \\
&= \frac{5}{21}\left[5(1+r_1) + 8 + 8\frac{1+r_1}{(1+r_2)^2}\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c_2(r_1, r_2) &= \frac{5}{21}(1+r_2)^2\left[5 + \frac{8}{(1+r_1)} + \frac{8}{(1+r_2)^2};\right] \\
&= \frac{5}{21}\left[5(1+r_2)^2 + 8\frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} + 8\right].
\end{aligned}$$