

# Estrutura a termo da taxa de juros

Roberto Guena de Oliveira

8 de setembro de 2014

# Exemplo 1

Suponha dois títulos sem coupon:

**Título A:** vencimento em um ano e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$925,93.

**Título B:** vencimento em dois anos e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$826,45.

Determine as taxas de juros de cada título.

# Exemplo 1

Suponha dois títulos sem coupon:

**Título A:** vencimento em um ano e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$925,93.

**Título B:** vencimento em dois anos e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$826,45.

Determine as taxas de juros de cada título.

**Título A:**  $1000/(1 + r_A) = 925,93$

# Exemplo 1

Suponha dois títulos sem coupon:

**Título A:** vencimento em um ano e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$925,93.

**Título B:** vencimento em dois anos e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$826,45.

Determine as taxas de juros de cada título.

**Título A:**  $1000/(1 + r_A) = 925,93 \Rightarrow r_A \approx 8\%$

# Exemplo 1

Suponha dois títulos sem coupon:

**Título A:** vencimento em um ano e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$925,93.

**Título B:** vencimento em dois anos e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$826,45.

Determine as taxas de juros de cada título.

**Título A:**  $1000/(1 + r_A) = 925,93 \Rightarrow r_A \approx 8\%$

**Título B:**  $1000/(1 + r_B)^2 = 826,25$

# Exemplo 1

Suponha dois títulos sem coupon:

**Título A:** vencimento em um ano e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$925,93.

**Título B:** vencimento em dois anos e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$826,45.

Determine as taxas de juros de cada título.

**Título A:**  $1000/(1 + r_A) = 925,93 \Rightarrow r_A \approx 8\%$

**Título B:**  $1000/(1 + r_B)^2 = 826,25 \Rightarrow r_B \approx 10\%$

# Exemplo 1

Suponha dois títulos sem coupon:

**Título A:** vencimento em um ano e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$925,93.

**Título B:** vencimento em dois anos e valor de face de R\$1000 negociado a valor de mercado por R\$826,45.

Determine as taxas de juros de cada título.

**Título A:**  $1000/(1 + r_A) = 925,93 \Rightarrow r_A \approx 8\%$

**Título B:**  $1000/(1 + r_B)^2 = 826,25 \Rightarrow r_B \approx 10\%$

Nesse caso, a taxa de juros à vista para empréstimos de 2 anos é diferente da taxa de juros à vista para empréstimos de um ano.

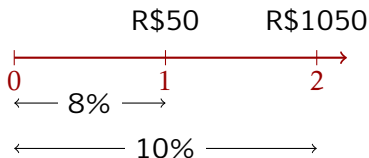
## Exemplo 2

Se a taxa de juros à vista para empréstimo de 1 ano é  $r_1 = 8\% \text{a.a.}$  e a taxa de juros à vista para empréstimos de 2 anos é  $r_2 = 10\% \text{a.a.}$ , calcule o preço de um título com maturação de 2 anos, valor de face de R\$1000 e coupon igual a R\$50 (5%).



## Exemplo 2

Se a taxa de juros à vista para empréstimo de 1 ano é  $r_1 = 8\% \text{a.a.}$  e a taxa de juros à vista para empréstimos de 2 anos é  $r_2 = 10\% \text{a.a.}$ , calcule o preço de um título com maturação de 2 anos, valor de face de R\$1000 e coupon igual a R\$50 (5%).



## Exemplo 2

Se a taxa de juros à vista para empréstimo de 1 ano é  $r_1 = 8\% \text{a.a.}$  e a taxa de juros à vista para empréstimos de 2 anos é  $r_2 = 10\% \text{a.a.}$ , calcule o preço de um título com maturação de 2 anos, valor de face de R\$1000 e coupon igual a R\$50 (5%).



$$VP = \frac{50}{1 + 0,08} + \frac{1050}{(1 + 0,1)^2} = 914,06.$$

# Retorno até o vencimento

É a taxa de desconto que iguala o valor presente do fluxo de pagamentos de um título, considerados os coupons e o pagamento do valor de face no prazo de maturidade, ao seu preço de mercado.

## Exemplo 3

Considerando o título do exemplo 2. Qual o retorno esperado até o vencimento?

$$914,06 = \frac{50}{1+r} + \frac{1050}{(1+r)^2}$$

## Exemplo 3

Considerando o título do exemplo 2. Qual o retorno esperado até o vencimento?

$$914,06 = \frac{50}{1+r} + \frac{1050}{(1+r)^2} \Rightarrow r = 9,5\%.$$

## Exemplo 4

Um título possui maturidade de dois anos, coupon de 12% e valor da face de R\$1000. Sabendo que a taxa de juros para empréstimos de um ano é de 8% a.a. e que a taxa de juros para títulos de dois anos sem coupon é de 10% a.a., determine:

- 1 o valor presente do título;
- 2 o seu retorno até o vencimento.

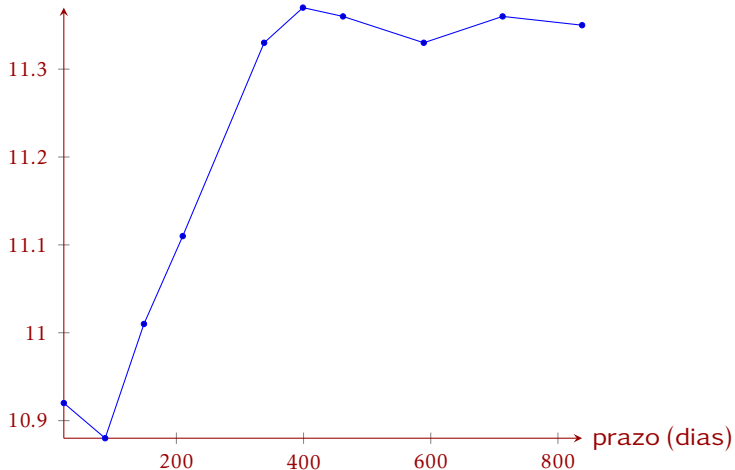
$$VP = \frac{120}{1,08} + \frac{1120}{1,10^2} = 1036,73$$

$$\frac{120}{1+r} + \frac{1120}{(1+r)^2} = 1036,73 \Rightarrow r = 9,89.$$

**Estrutura a termo da taxa de juros** ou **estrutura temporal da taxa de juros** é a descrição da relação entre a taxa de juros a vista (*spot*) e o prazo de vencimento.

# Exemplo: a taxa de juros à vista com base na cotação da LTN em 29/08/2014.

taxa de juros efetiva (%a.a.)





# Taxa de juros a termo

A taxa de juros a termo entre as datas  $a$  e  $b$ , com  $b > a$ , é a taxa de juros à vista, para títulos sem coupon vendidos em  $a$  com vencimento em  $b$ , que deve ocorrer para que um investidor que invista em um título sem coupon com vencimento em  $b$ , obtenha o mesmo resultado que obteria caso investisse em um título sem coupon e vencimento em  $a$  e reinvestisse, em  $a$ , o valor obtido com esse título em novos títulos sem coupon com vencimento em  $b$ .

# Taxa de juros a termo: definição matemática

Sejam

- $r_a$  a taxa de juros a vista para títulos sem coupon com vencimento em  $a$ ;
- $r_b$  a taxa de juros a vista para títulos sem coupon com vencimento em  $b$ ;
- 0 a data presente.

Então, a taxa de juros a termo entre  $a$  e  $b$ ,  $f_{a,b}$  é tal que:

$$(1 + r_b)^b = (1 + r_a)^a$$

# Taxa de juros a termo: definição matemática

Sejam

- $r_a$  a taxa de juros a vista para títulos sem coupon com vencimento em  $a$ ;
- $r_b$  a taxa de juros a vista para títulos sem coupon com vencimento em  $b$ ;
- $0$  a data presente.

Então, a taxa de juros a termo entre  $a$  e  $b$ ,  $f_{a,b}$  é tal que:

$$(1 + r_b)^b = (1 + r_a)^a \times (1 + f_{a,b})^{b-a}$$

# Taxa de juros a termo: definição matemática

Sejam

- $r_a$  a taxa de juros a vista para títulos sem coupon com vencimento em  $a$ ;
- $r_b$  a taxa de juros a vista para títulos sem coupon com vencimento em  $b$ ;
- 0 a data presente.

Então, a taxa de juros a termo entre  $a$  e  $b$ ,  $f_{a,b}$  é tal que:

$$(1 + r_b)^b = (1 + r_a)^a \times (1 + f_{a,b})^{b-a}$$

ou ainda, resolvendo para  $f_{a,b}$ ,

$$f_{a,b} = \left[ \frac{(1 + r_b)^b}{(1 + r_a)^a} \right]^{\frac{1}{b-a}} - 1.$$

## Exemplo 5

- $r_1 = 8\%$
- $r_2 = 10\%$
- $f_{1,2} = ?$

$$(1 + 0,1)^2 = (1,08) \times (1 + f_{1,2})$$

## Exemplo 5

- $r_1 = 8\%$
- $r_2 = 10\%$
- $f_{1,2} = ?$

$$(1 + 0,1)^2 = (1,08) \times (1 + f_{1,2})$$

$$f_{1,2} = \frac{1,21}{1,08} - 1$$

## Exemplo 5

- $r_1 = 8\%$
- $r_2 = 10\%$
- $f_{1,2} = ?$

$$(1 + 0,1)^2 = (1,08) \times (1 + f_{1,2})$$

$$f_{1,2} = \frac{1,21}{1,08} - 1 = 12,04\%.$$

## Exemplo 6

Considere a estrutura a termo da taxa de juros abaixo

Vencimento anos	Taxa à vista % a.a.
1	5
2	6
3	7
4	6

Determine as taxas de juros a termo entre as datas

- 1 1 e 2;
- 2 1 e 3;
- 3 1 e 4;
- 4 2 e 3;
- 5 2 e 4;
- 6 3 e 4.



## Exemplo 7

Você deseja poupar um determinado valor por dois anos e considera duas alternativas. A primeira delas consiste em usar esse valor para comprar títulos sem cupom com vencimento em dois anos. A segunda consiste em usar esse valor para comprar títulos sem cupom com vencimento em um ano e, passado esse ano, usar o valor recebido para adquirir títulos sem cupom de um ano. Qual a melhor alternativa considerando:

- 1 que a taxa de juros a termo entre o início e o fim do próximo ano seja inferior à taxa de juros à vista para títulos com prazo de um ano e sem cupom vigente no próximo ano?
- 2 que a taxa de juros a termo entre o início e o fim do próximo ano seja superior à taxa de juros à vista para títulos com prazo de um ano e sem cupom vigente no próximo ano?

## Exemplo 7 (continuação)

Você deseja poupar um determinado valor por um ano e considera duas alternativas. A primeira delas consiste em usar esse valor para comprar títulos sem coupon com vencimento em dois anos e vendê-los ao final de um ano. A segunda consiste em usar esse valor para comprar títulos sem coupon com vencimento em um ano. Qual a melhor alternativa considerando:

- 1 que a taxa de juros a termo entre o início e o fim do próximo ano seja inferior à taxa de juros à vista para títulos com prazo de um ano e sem coupon vigente no próximo ano?
- 2 que a taxa de juros a termo entre o início e o fim do próximo ano seja superior à taxa de juros à vista para títulos com prazo de um ano e sem coupon vigente no próximo ano?

## Exemplo 7 (continuação)

Considerando suas respostas, caso todos sejam capazes de prever com precisão a taxa de juros à vista a ser praticada daqui a um ano, qual deverá ser a relação entre essa taxa de juros e a taxa de juros a termo?

# Relação entre a taxa a termo e a taxa à vista esperada.

- Hipótese 1:**  $f_{a,b} = r_{a,b}^e$ , em que  $r_{a,b}^e$  é a taxa de juros à vista esperada para títulos sem coupons negociados na data  $a$  e com vencimento na data  $b$  (Hipótese das expectativas);
- Hipótese 2:**  $f_{a,b} > r_{a,b}^e$  (Hipótese da preferência por liquidez);
- Hipótese 3:**  $f_{a,b} < r_{a,b}^e$ .