

# Teoria do Consumidor:

Excedente do consumidor e equação de Slutsky

---

Roberto Guena de Oliveira

13 de dezembro de 2022

Função de utilidade indireta

Funções dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar

Equação de Slutsky

## **Função de utilidade indireta**

---

Função de utilidade indireta

Funções dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar

Equação de Slutsky

## Função de utilidade indireta

A função de utilidade indireta ( $V$ ) é definida por

$$V(\mathbf{p}, m) = U(\mathbf{x}(\mathbf{p}, m))$$

## Exemplo: preferências Cobb-Douglas

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Função de demanda:

$$(x_1^*(p_1, p_2, m), x_2^*(p_1, p_2, m)) = \left( \frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1}, \frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2} \right)$$

Função de utilidade indireta:

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, m) &= \left( \frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1} \right)^a \left( \frac{b}{a+b} \frac{m}{p_2} \right)^b \\ &= \left( \frac{a}{p_1} \right)^a \left( \frac{b}{p_2} \right)^b \left( \frac{m}{a+b} \right)^{a+b} \end{aligned}$$

## Exemplo: substitutos perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \left\{ \left( \frac{m}{p_1}, 0 \right) \right\} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ \left\{ (x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 = m \right\} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \left\{ \left( 0, \frac{m}{p_2} \right) \right\} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases}$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \begin{cases} a \frac{m}{p_1} & \text{caso } p_1 < ap_2 \\ a \frac{m}{p_1} = \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 = ap_2 \\ \frac{m}{p_2} & \text{caso } p_1 > ap_2 \end{cases} = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}.$$

## Exemplo: complementares perfeitos

Função de utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, x_2\}$$

Função de demanda:

$$\mathbf{x}(p_1, p_2, m) = \left( \frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2} \right)$$

Função de utilidade indireta:

$$V(p_1, p_2, m) = \min \left\{ a \frac{m}{p_1 + ap_2}, \frac{am}{p_1 + ap_2} \right\} = \frac{am}{p_1 + ap_2}.$$



## Propriedades da função de utilidade indireta

- Homogênea de grau zero;
- não decrescente em relação à renda;
- não crescente em relação aos preços;
- quase convexa: quaisquer  $\mathbf{p}^0 > 0$ ,  $\mathbf{m}^0 > 0$ ,  $\mathbf{p}^1 > 0$ ,  $\mathbf{m}^1 > 0$  e  $0 < \alpha < 1$ , se  $V(\mathbf{p}^0, m^0) \geq V(\mathbf{p}^1, m^1)$ , então

$$V[\alpha \mathbf{p}^0 + (1 - \alpha) \mathbf{p}^1, \alpha m^0 + (1 - \alpha) m^1] \leq V(\mathbf{p}^0, m^0);$$

- se ela for diferenciável,

$$x_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{m}) = - \frac{\frac{\partial V(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(\mathbf{p}, m)}{\partial m}} \quad (\text{Identidade de Roy})$$

## Identidade de Roy e quase convexidade

Considere  $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$  e  $\hat{m}$  quaisquer.

Denote  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})$  de sorte que  $V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}) = U(\hat{\mathbf{x}})$ .

Para qualquer outro vetor de preços  $\mathbf{p} \gg 0$ , se a renda for dada por  $m = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ ,  $V(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \geq U(\hat{\mathbf{x}}) = V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})$ .

Assim,  $\hat{\mathbf{p}}$  resolve o problema de minimizar  $V(\mathbf{p}, m)$  dada a restrição  $m = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ .

O lagrangeano desse problema é

$$\mathcal{L} = V(\mathbf{p}, m) - \lambda (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}} - m)$$

## Identidade de Roy e quase convexidade (continuação)

As condições de mínimo de primeira ordem devem ser verificadas para  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$ :

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} V(\hat{\mathbf{p}}, m) + \lambda \hat{x}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, L$$

e

$$\frac{\partial}{\partial m} \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial m} V(\hat{\mathbf{p}}, m) - \lambda = 0$$

Combinando as duas, obtemos

$$x_i^*(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}) = \hat{x}_i = - \frac{\frac{\partial V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(\hat{\mathbf{p}}, \hat{m})}{\partial m}}$$

## Identidade de Roy e quase convexidade (continuação)

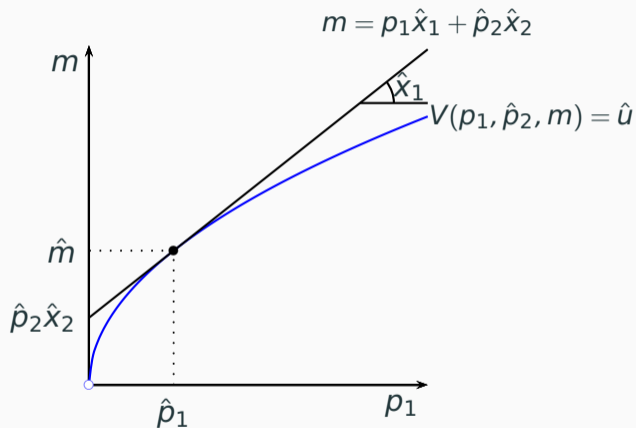
A condição de mínimo de segunda ordem também deve ser atendida em  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$ .

Esta requer, que a função objetivo,  $V(\mathbf{p}, m)$  seja localmete quase-convexa no ponto  $\hat{\mathbf{p}}, \hat{m}$ .

Como esse resultado é válido para quaisquer  $\hat{\mathbf{p}} \gg 0$  e  $m > 0$ , a função de utilidade indireta é globalmente quase convexa.

Note que a quase convexidade da função de utilidade indireta não depende de qualquer hipótese de convexidade da função de utilidade.

## Exemplo com $p_2$ constante.



$$\hat{x}_1 = x_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{m}) \quad \hat{x}_2 = x_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{m})$$

$$\hat{u} = U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = V(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{m})$$

## Exemplo: preferências Cobb Douglas

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -a \frac{a^a}{p_1^{a+1}} \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = (a+b) \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \frac{m^{a+b-1}}{(a+b)^{a+b}}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial p_1}}{\frac{\partial}{\partial m}} = \frac{a}{a+b} \frac{m}{p_1} = x_1^*(p_1, p_2, m)$$

## Exemplo: complementares perfeitos

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -\frac{am}{(p_1 + ap_2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = \frac{a}{p_1 + ap_2}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial p_1}}{\frac{\partial}{\partial m}} = \frac{m}{p_1 + ap_2} = x_1^*(p_1, p_2, m)$$

# **Dispêndio e demanda compensada**

---



Função de utilidade indireta

Funções dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar

Equação de Slutsky

## O problema da minimização do gasto

Considere o problema de escolher a cesta de bens  $\mathbf{x}$  para uma consumidora de modo a minimizar o custo com a aquisição dessa cesta,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

atendendo a um requisito de utilidade mínima

$$U(\mathbf{x}) \geq \bar{u}$$

e às condições de consumo não negativo,

$$\mathbf{x}_i \geq 0.$$

## O problema de minimização de gasto

O lagrangeano do problema é

$$\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda[U(\mathbf{x}) - \bar{u}] - \sum_{i=1}^L \mu_i x_i$$

Assumindo não saciedade local, as condições de 1ª ordem implicam

$$U(\mathbf{x}) = \bar{u}$$

e

$$\lambda = \frac{p_i - \mu_i}{UMg_i}, \quad i = 1, \dots, L$$

## Minimização de gasto: propriedades da solução

Caso na solução  $x_i, x_j > 0$ ,

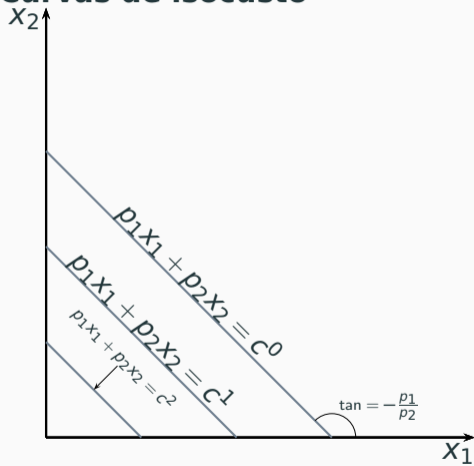
$$\frac{p_i}{UMg_i} = \frac{p_j}{UMg_j} \Rightarrow \frac{UMg_i}{UMg_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

Caso na solução  $x_i = 0$  e  $x_j > 0$ ,

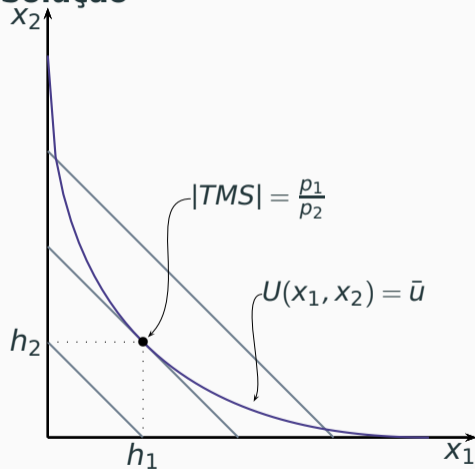
$$\frac{p_i - \mu_i}{UMg_i} = \frac{p_j}{UMg_j} \Rightarrow \frac{p_i}{UMg_i} \geq \frac{p_j}{UMg_j} \Rightarrow \frac{UMg_i}{p_i} \leq \frac{UMg_j}{p_j} \Rightarrow \frac{UMg_i}{UMg_j} \leq \frac{p_i}{p_j}$$

# Solução gráfica

## Curvas de isocusto



## Solução



## Função de demanda compensada

Sejam  $h_1(\mathbf{p}, u), \dots, h_L(\mathbf{p}, u)$  as funções que geram as quantidades ótimas de bens para o problema de minimização de gastos. Elas são chamadas **funções de demanda compensadas** ou **funções de demanda hicksianas** dos bens,  $1, \dots, L$ .

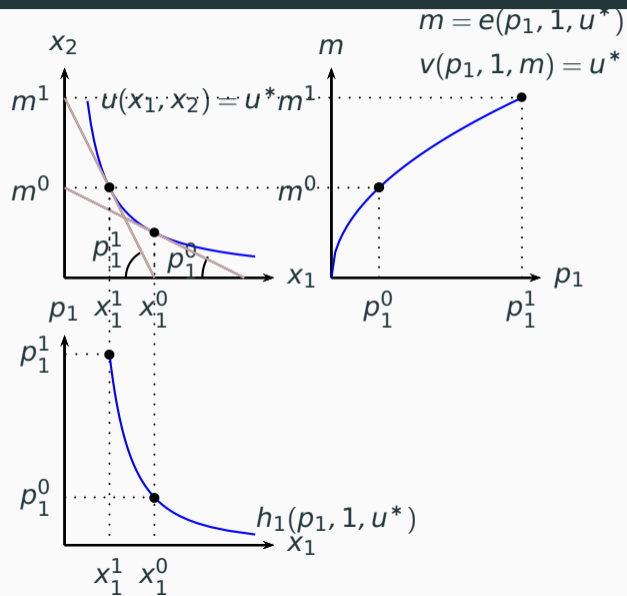
A função  $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = (h_1(\mathbf{p}, u), \dots, h_L(\mathbf{p}, u))$  é denominada, função de demanda compensada.

## A função dispêndio

A **função dispêndio**, notada por  $e(\mathbf{p}, u)$ , é a função que determina o gasto ótimo associado ao problema de minimização de gasto. Ela é definida por

$$e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$$

## Exemplo: derivando curvas com $p_2 = 1$





## Identidades importantes

$$V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$$

$$e(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = m$$

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$$

## Exemplo: preferências Cobb-Douglas

### A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{m}{a+b}\right)^{a+b}$$

### Função dispêndio:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$$

$$\left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{e(p_1, p_2, u)}{a+b}\right)^{a+b} = u$$

$$e(p_1, p_2, u) = (a+b)u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} \left(\frac{p_2}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}$$

## Exemplo: Substitutos perfeitos

### A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{\min\{p_1, ap_2\}}$$

### Função dispêndio:

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) &= u \\ \frac{ae(p_1, p_2, u)}{\min\{p_1, ap_2\}} &= u \\ e(p_1, p_2, u) &= \frac{u}{a} \min\{p_1, ap_2\}. \end{aligned}$$

## Exemplo: Complementares perfeitos

### A função de utilidade indireta

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1 + ap_2}$$

### Função dispêndio:

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) &= u \\ \frac{ae(p_1, p_2, u)}{p_1 + ap_2} &= u \\ e(p_1, p_2, u) &= \frac{u}{a}(p_1 + ap_2) \end{aligned}$$

## Propriedades da função de dispêndio

1. Não decrescente em relação aos preços.
2. Homogênea de grau 1 em relação aos preços:

$$e(\alpha p_1, \alpha p_2, u) = \alpha e(p_1, p_2, u), \quad \alpha > 0$$

3. Crescente em relação à utilidade.
4. Côncava em relação aos preços
5. Lema de Shephard:  $\frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_1} = h_1(\mathbf{p}, u)$

## Lema de Shephard

Denote  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}})$ .

Para qualquer  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}} \geq e(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}})$ , ou seja,

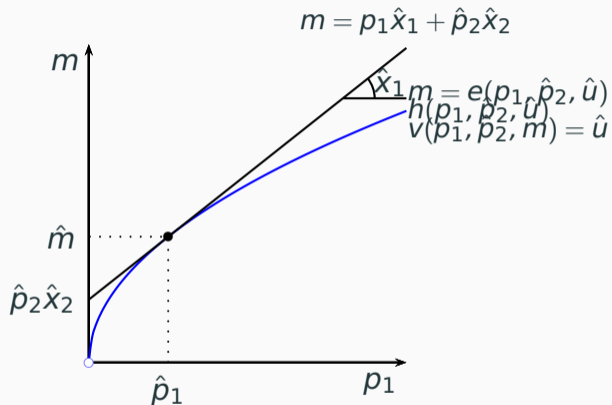
$$g(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}} \leq 0.$$

Como  $g(\hat{\mathbf{p}}) = 0$ , então  $\hat{\mathbf{p}}$  maximiza  $g(\hat{\mathbf{p}})$ , portanto, deve valer a condição de 1<sup>a</sup> ordem

$$\frac{\partial g(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial e(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_i} - \hat{x}_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial e(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_i} = \hat{x}_i = h_i(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{u}).$$

Também deve valer a condição de 2<sup>a</sup> ordem, o que implica que  $g(\mathbf{p})$  deve ser convexa, o que requer que  $e(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}})$  também seja côncava.

$e(p_1, p_2, u)$  é côncava em relação a  $p_1$



$$\hat{x}_1 = h_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{u}) \quad \hat{x}_2 = h_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{u})$$

$$\hat{u} = U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = e(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{m})$$

## Exemplo: preferências Cobb-Douglas

$$e(p_1, p_2, u) = (a + b)u^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} \left(\frac{p_2}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}$$

$$h_1(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = a \left(\frac{u}{a^a b^b}\right)^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{b}{a+b}}$$

$$h_2(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_2} = b \left(\frac{u}{a^a b^b}\right)^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{a}{a+b}}$$



## Exemplo: complementares perfeitos

$$e(p_1, p_2, u) = \frac{u}{a}(p_1 + ap_2)$$

$$h_1(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = \frac{u}{a}$$

$$h_2(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_2} = u$$

## Lei da demanda compensada

Pela definição da função dispêndio,

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}, u) \leq \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, u)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, u) \leq \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}, u)$$

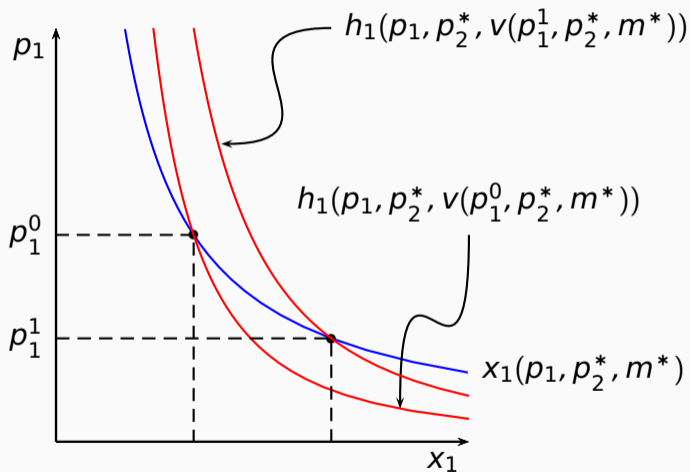
Somando as duas desigualdades e rearranjando os termos,

$$(\hat{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}) \cdot [\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}, u) - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, u)] \leq 0$$

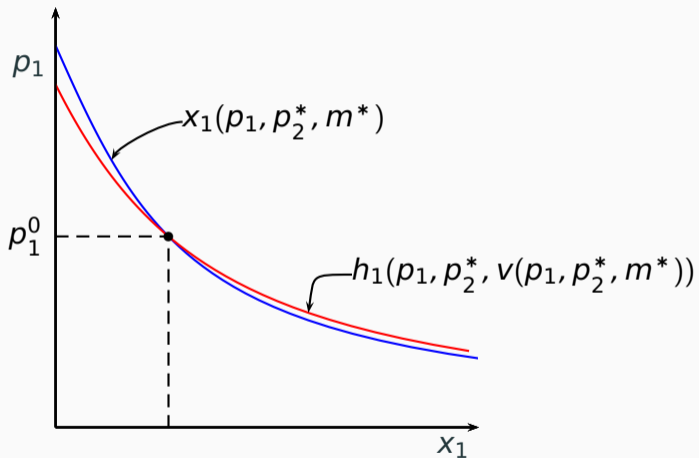
$$\Delta \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \leq 0$$

A demanda compensada varia em direção oposta à da variação nos preços. Se o preço de um único bem varia a demanda compensada desse bem não pode variar na mesma direção.

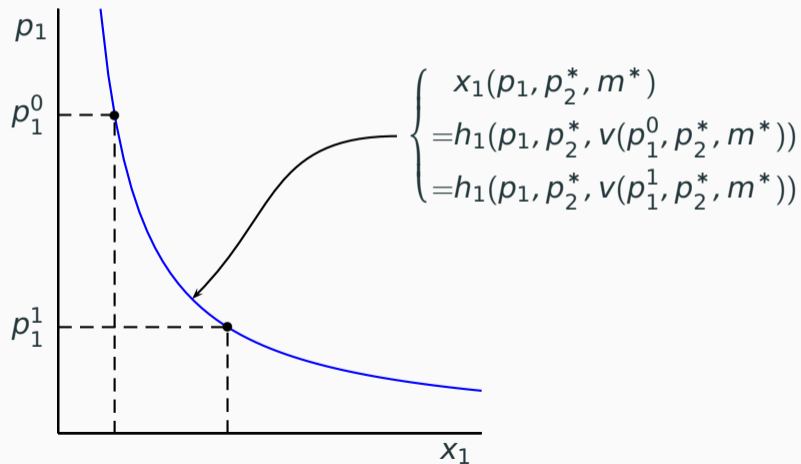
# Curvas de demanda marshalliana e de demanda compensada – bem normal



# Curvas de demanda marshalliana e de demanda compensada – bem inferior



# Curvas de demanda marshalliana e de demanda compensada – preferências quase-lineares



# **Medidas de variação de bem estar**

---

Função de utilidade indireta

Funções dispêndio e demanda compensada

Medidas de variação de bem estar

- Variação compensatória

- Variação equivalente

- Excedente do consumidor

Equação de Slutsky

## Variação compensatória

Seja uma mudança nos preços e na renda do consumidor dos valores iniciais  $(p_1^0, p_2^0, m^0)$  para os valores finais  $(p_1^1, p_2^1, m^1)$ . Associada a essa mudança definimos a variação compensatória na renda desse consumidor (VC) como a redução na renda (ou o negativo do aumento na renda) necessária(o) para fazer com que, a partir dos preços e renda finais  $(p_1^1, p_2^1, m^1)$ , o consumidor volte a obter em equilíbrio, o mesmo nível de utilidade que obtia com os preços e renda originais,  $(p_1^0, p_2^0, m^0)$ .



## Variação compensatória – definições equivalentes

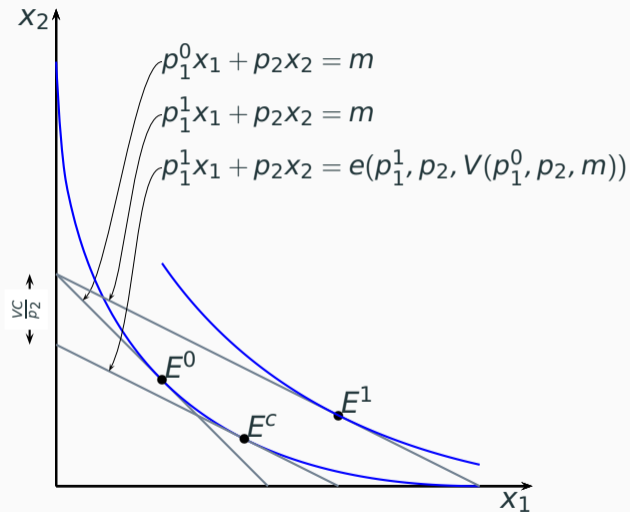
**Usando a função de utilidade indireta:**

$$V(p_1^1, p_2^1, m^1 - VC) = V(p_1^0, p_2^0, m^0)$$

**Usando a função dispêndio:**

$$VC = m^1 - e(p_1^1, p_2^1, V(p_1^0, p_2^0, m^0))$$

## Representação gráfica: redução em $p_1$ .



## Varição equivalente

Seja uma mudança nos preços e na renda do consumidor dos valores iniciais  $(p_1^0, p_2^0, m^0)$  para os valores finais  $(p_1^1, p_2^1, m^1)$ . Associada a essa mudança definimos a variação equivalente na renda desse consumidor (VE) como o aumento na renda (ou o negativo da redução na renda) necessário(a) para fazer com que, a partir dos preços e renda iniciais  $(p_1^0, p_2^0, m^0)$ , o consumidor passasse a obter em equilíbrio, o mesmo nível de utilidade que obteria com os preços e renda finais,  $(p_1^1, p_2^1, m^1)$ .

## Variação equivalente – definições equivalentes

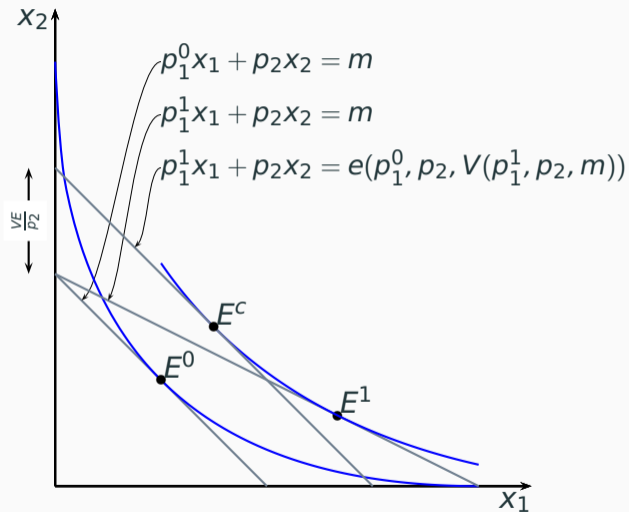
**Usando a função de utilidade indireta:**

$$V(p_1^0, p_2^0, m^0 + VE) = V(p_1^1, p_2^1, m^1)$$

**Usando a função dispêndio:**

$$VE = e(p_1^0, p_2^0, V(p_1^1, p_2^1, m^1)) - m^0$$

## Representação gráfica: redução em $p_1$ .



# Varição compensatória e equivalente e demanda compensada

## Varição compensatória

$$VC = e(p_1^0, p_2, u^0) - e(p_1^1, p_2, u^0) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, p_2, u^0) dp_1$$

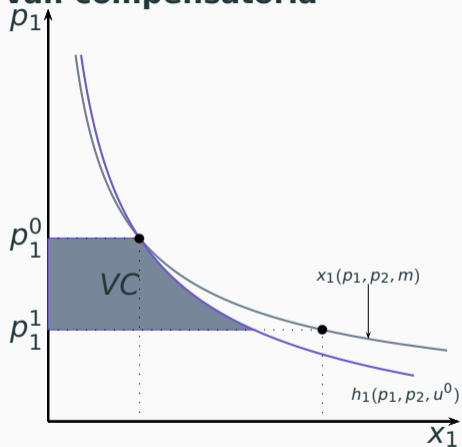
## Varição equivalente

$$VE = e(p_1^0, p_2, u^1) - e(p_1^1, p_2, u^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, p_2, u^1) dp_1$$

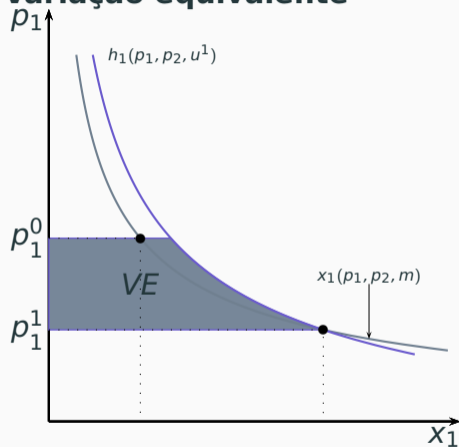
Nas quais  $u^0 = V(p_1^0, p_2, m)$  e  $u^1 = V(p_1^1, p_2, m)$

# Variações compensatória e equivalente como áreas

## Var. compensatória



## Variação equivalente



## Comparando as medidas

**Bens normais**  $VC < VE$

**Bens inferiores**  $VC > VE$

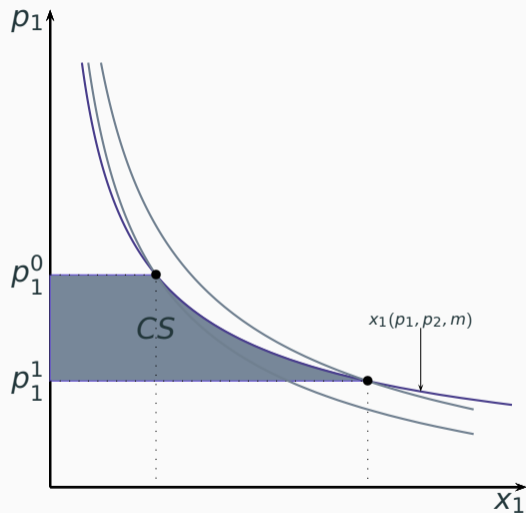
**Preferências quase-lineares**  $VC = VE$



## Excedente do consumidor

Em se tratando de um bem com demanda independente da renda (preferências quase-lineares), as duas áreas do slide anterior coincidem e são chamadas **variação no excedente do consumidor**.

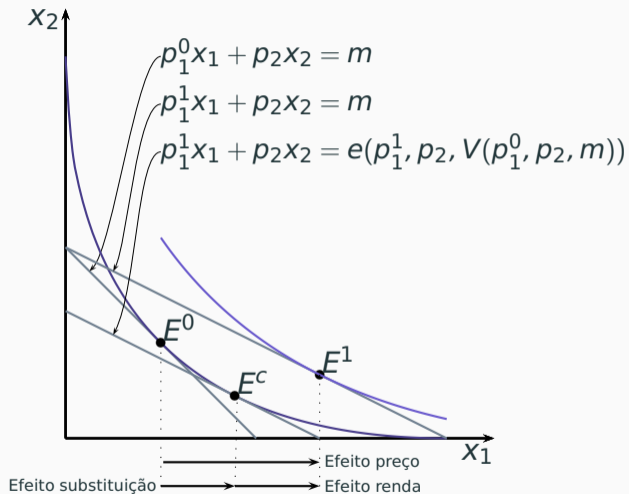
## Uma medida aproximada



## **Equação de Slutsky**

---

## Decomposição de Hicks – bem normal, redução em $p_1$



## Efeito substituição

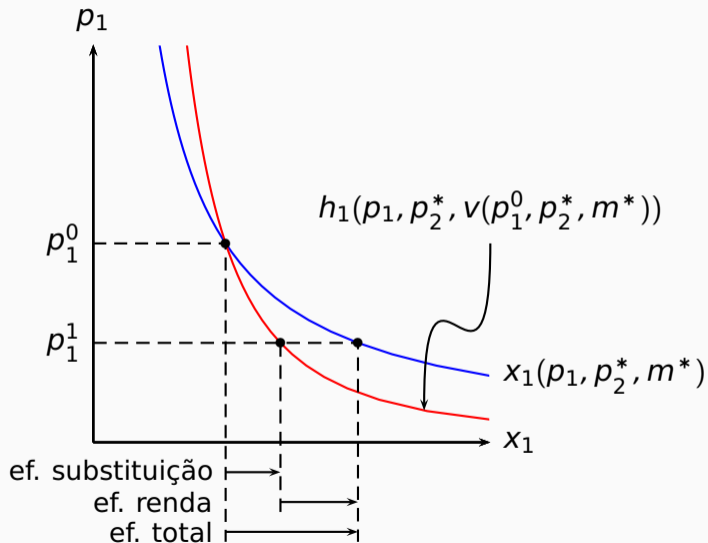
O **efeito substituição** associado a uma mudança no preço do bem 1 de  $p_1^0$  para  $p_1^1$ , com o preço do bem dois e a renda constantes em  $p_2$  e  $m$  é dado por

$$\begin{aligned} ES &= h_1(p_1^1, p_2, V(p_1^0, p_2, m)) - x_1(p_1^0, p_2, m) \\ &= h_1(p_1^1, p_2, V(p_1^0, p_2, m)) - h_1(p_1^0, p_2, V(p_1^0, p_2, m)) \end{aligned}$$

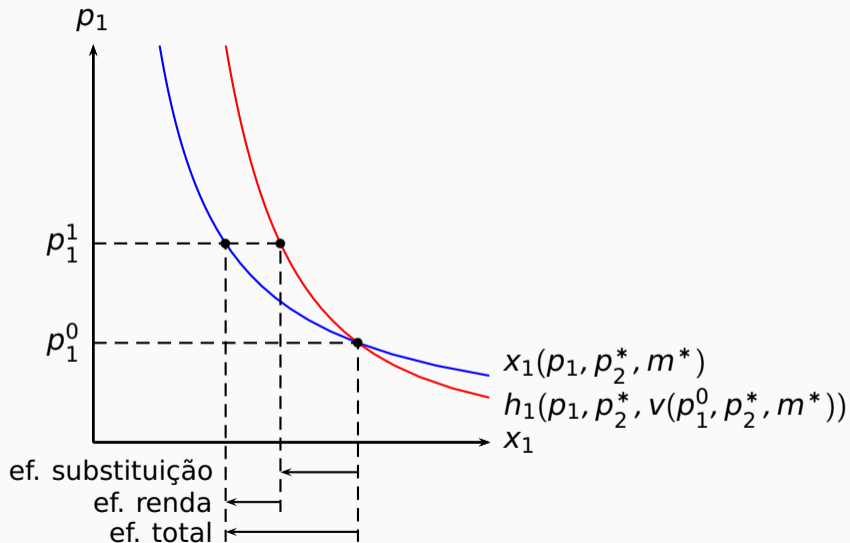
O **efeito renda** associado a uma mudança no preço do bem 1 de  $p_1^0$  para  $p_1^1$ , com o preço do bem dois e a renda constantes em  $p_2$  e  $m$  é dado por

$$ER = x_1(p_1^1, p_2, m) - h_1(p_1^1, p_2, V(p_1^0, p_2, m))$$

# Ilustração gráfica – redução de preço, bem normal

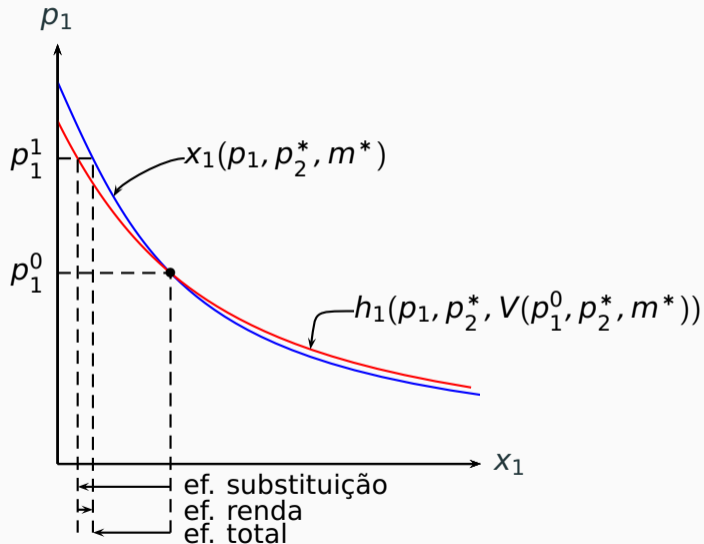


## Ilustração gráfica – aumento de preço, bem normal





## Ilustração gráfica – aumento de preço, bem inferior



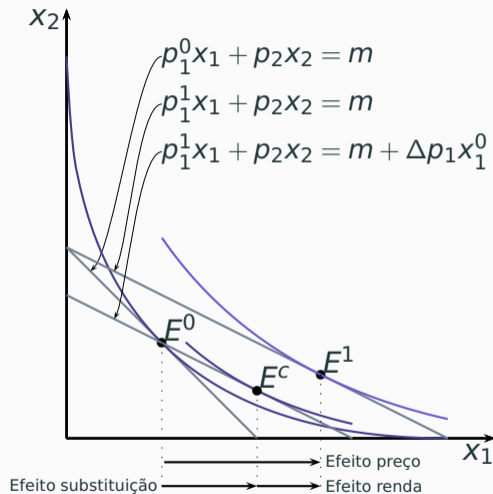
## Três possibilidades

**Bens normais:** Efeitos substituição e renda têm a mesma direção.

**Bens inferiores ordinários:** Efeitos substituição e renda têm sinal contrário e efeito substituição é maior, em módulo, ao efeito renda.

**Bens de Giffen:** Efeitos substituição e renda têm sinal contrário e efeito renda é maior, em módulo, ao efeito substituição.

## Decomposição de Slutsky: ilustração gráfica



# Efeitos substituição e renda de Slutsky

## Convenções

$$\Delta p_1 = p_1^1 - p_1^0 \quad x_1^0 = x_1(p_1^0, p_2, m)$$

## Definições:

Os efeitos substituição e renda de Slutsky (respectivamente *ESS* e *ERS*) associados a uma mudança no preço do bem 1 de  $p_1^0$  para  $p_1^1$ , com o preço do bem dois e a renda constantes em  $p_2$  e  $m$  são dados por

$$ESS = x_1(p_1^1, p_2, m + \Delta p_1 x_1^0) - x_1(p_1^0, p_2, m)$$

$$ERS = x_1(p_1^1, p_2, m) - x_1(p_1^1, p_2, m + \Delta p_1 x_1^0)$$

## Efeitos substituição de Slutsky: aproximação linear

$$\begin{aligned}ESS &= x_1(p_1^1, p_2, m + \Delta p_1 x_1^0) - x_1(p_1^0, p_2, m) \\ &= x_1(p_1^0 + \Delta p_1, p_2, m + \Delta p_1 x_1^0) - x_1(p_1^0, p_2, m) \\ &\approx \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial m} x_1^0 \Delta p_1 \\ &= \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial m} x_1(p_1^0, p_2, m) \Delta p_1 \\ \\ ESS &\approx \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial m} x_1(p_1^0, p_2, m) \Delta p_1\end{aligned}$$

## Efeitos substituição de Hicks: aproximação linear

$$\begin{aligned} ESH &= h_1(p_1^1, p_2, u^0) - x_1(p_1^0, p_2, m) \\ &= x_1(p_1^1, p_2, e(p_1^1, p_2, u^0)) - x_1(p_1^0, p_2, m) \\ &= x_1(p_1^0 + \Delta p_1, p_2, e(p_1^1, p_2, u^0)) - x_1(p_1^0, p_2, e(p_1^0, p_2, u^0)) \\ &\approx \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial m} \frac{\partial e(p_1^0, p_2, u^0)}{\partial p_1} \Delta p_1 \\ &= \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial m} h_1(p_1^0, p_2, u_0) \Delta p_1 \\ \\ ESH &\approx \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial x_1(p_1^0, p_2, m)}{\partial m} x_1(p_1^0, p_2, m) \Delta p_1 \end{aligned}$$

# A equação de Slutsky

## Derivação

$$h_1(p_1, p_2, u) \equiv x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial p_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} h_1(p_1, p_2, u) \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1$$

## Equação de Slutsky em elasticidades

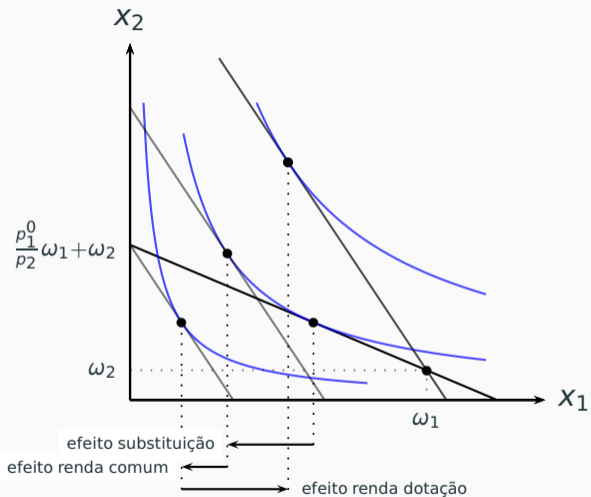
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{h_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} \frac{m}{x_1} \frac{p_1}{m} \frac{x_1}{m}$$

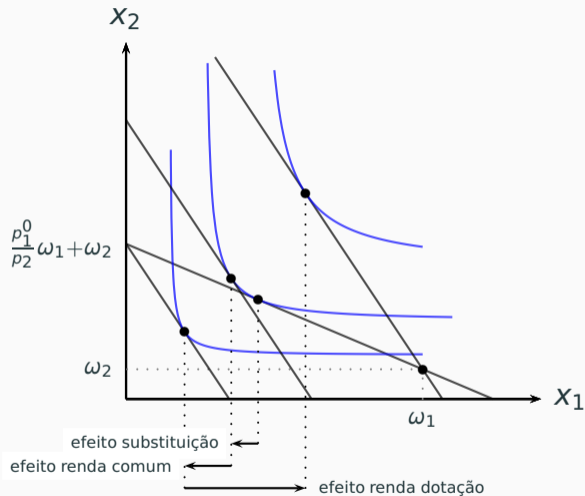
$$\epsilon_{1,1} = \epsilon_{h_1,p_1} - S_1 \epsilon_{1,m}$$



# Compra e Venda – exemplo 1



## Compra e Venda – exemplo 2



## O caso de compra e venda

A função de demanda do bem 1 é  $x_1(p_1, p_2, m(p_1, p_2))$  na qual

$$m(p_1, p_2) \equiv p_1\omega_1 + p_2\omega_2.$$

Assim

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m}\omega_1$$
$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m}(\omega - x_1)$$

Caso o bem 1 seja normal e o consumidor seja ofertante líquido desse bem, o efeito renda total (ordinário + dotação) terá sinal contrário ao efeito substituição.